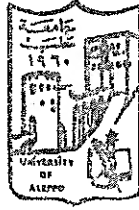


UNIVERSITY OF ALEPPO
ACULTY OF ENGINEERING



جامعة حلب
كلية الهندسة

مُقَابِلَة مَقَامَاتِ الْمَوَادِّ

STRENGTH OF MATERIALS

الصف الاول عمارة

الدكتور المهندس

عبد الرزاق عروزي

دكتوراه في الهندسة الانشائية
دبلوم في الهندسة المدنية
مؤثر - المسانيد الهندسية

مدرس مقاومة المواد وحساب الانشاءات في كلية الهندسة
جامعة حلب

Dr. - Ing. ABDOUL - RAZZAK AROUR
Lecturer of Strength of Materials
and Theory of Structures
Faculty of Engineering, Aleppo University

الطبعة الاولى

١٩٧٥ - ١٩٧٦

مديرية الكتب والطبوعات الجامعية

الإهداء

إلى من ربياني صغيراً
لأخدم وطني كبيراً .
إلى والدي الكريمين
أهدي هذا الكتاب .

كلمة المؤلف

إن منزلة حساب الانشاءات بما فيها مقاومة المواد بين العلوم الهندسية هي منزلة الاساس من البناء ومكانها بين هذه العلوم هو مكان الجسر في منتصف الطريق وهي ضرورة لكافة أقسام الهندسة مدنية كانت أم ميكانيكية ، معمارية كانت أم كهربائية ، لذلك يلزم أثناء التدريس اعطاءها العناية الكافية كما ينبغي عرضها بأسلوب يزيل كل غموض ليتمكن طالب الهندسة قبل وبعد التخرج من فهم هذه المادة الرئيسية ذات التطور السريع وايستطيع استخدام تطبيقاتها التي تزداد يوماً عن يوم .

يعود السبب في عدم تمكن طلاب الهندسة من هذه المادة الرئيسية بشكل جيد لمرتين اولها هو عدم عرض هذه المادة بأسلوب ايضاحي وثانيهما هو الاقلال في الامثلة والتطبيقات العملية ، اذاً ليكون الكتاب من الناحية التدريسية جيداً ينبغي ان يعرض بأسلوب ايضاحي وتدعمه في نفس الوقت امثلة متعددة ومتنوعة تنير كل فكرة ترد فيه . وبما ان الهدف من التدريس في كليات الهندسة ليس هو خلق كادر هندسي تطبيقي فيحسب وانما هو اضافة على ذلك تزويد البلاد بكوادر هندسية علمية ذات كفاءات خاصة ومستوى رفيع تستطيع مساهمة ركب العلوم الهندسية المتطورة ، لذلك يلزم تحقيق الشروط السابقة مع الاحتفاظ بالاسلوب العلمي لهذه المادة ولهذا السبب واثماً مني بهذه الفكرة فلقد وضعت نصب عيني وقبل البدء بتأليف هذا الكتاب امران اولهما تحقيق الفكرة الاولى الا وهي الاسلوب الايضاحي مع الاكثار في الامثلة والتطبيقات العملية وثانيهما تحقيق الفكرة الثانية ألا وهي متابعة تطور هذه المادة والاحتفاظ بالرياضيات المتطورة لغة المهندس الاولى .

لقد كان بالامكان وتلبية لرغبة الكثيرين التخلي عن استخدام الرياضيات وبعض اقسام الميكانيك في كثير من الفصول وال فقرات ، لكن هذا يساعد على هدم تطور هذه المادة الهامة ويعتبر خطراً بالنسبة للمستقبل الهندسي ، ففأيتنا وهدفنا هما البناء وليس الهدم . انطلاقاً من تلك الافكار وبعد ان بذلت قصارى جهدي لتحقيق الهدف المنشود ، أمل أن اكون قد وفقت لما سميت اليه وبلغت بهذا الكتاب الفكرة التي كنت اسعى اليها . فكلي أمل ان يفني كتابي هذا الغرض الذي وضع من اجله وأقدم اعتذاري عما فيه من نقص او غموض أو اخطاء مطبعية وكل رجائي من طلابي الأحبة وزملائي الكرام ان يكونوا لي عوناً باطلاعي على ارائهم السديدة ونقدم البناء لاستكمال الناقص أو ايضاح الغامض او اصلاح الخاطئ .

لقد زود هذا الكتاب بعدد من الجداول العملية الهامة التي تساعد الطالب والمهندس على
السواء من انجاز حلول سريعة باقصر وقت ممكن .

ولقد خص بهذا الكتاب طلاب الصف الاول قسم المارة .

أخيراً اتنى ان يجد الطلاب والمهندسون في صفحات هذا الكتاب منطلقاً يساعد على
توسيع ثقافتهم في هذا العلم كما اتنى ان يوفقني الله في الاستمرار في العمل لمتابعة تأليف
كتب أخرى تشرح فيها مواضيع جديدة ومتطورة من هذه المادة .

الدكتور المهندس

حلب ١٩٧٥

عبد الرزاق عرعور

المقدمة

تعنى مادة حساب الانشاءات بإيجاد القوى الداخلية في الانشاءات المختلفة وكيفية توزيع هذه القوى نتيجة للمؤثرات الخارجية أو الداخلية على إختلاف أنواعها ، كما تعنى أيضاً بما يحدث لهذه الانشاءات من تغير في الشكل نتيجة لتلك المؤثرات .

تشغل مادة حساب الانشاءات على علم السكون (الذي يشتمل بدوره على علم سكون القوى وعلم سكون الاجسام الحاملة) وعلم مقاومة المواد .

يختص علم سكون الأجسام الحاملة بإيجاد القوى الداخلية في الانشاء (ردود أفعال القطع أو ما تسمى أيضاً بقيم القطع) وكذلك التغيرات التي تنتج عن تأثير المؤثرات الخارجية أو الداخلية عليه . أما علم سكون الأجسام الحاملة فهو الجزء من علم الميكانيك الذي يبحث حالة التوازن الساكنة للانشاءات (للاجسام الحاملة) . ويهتم علم مقاومة المواد بإيجاد توزيع القوى الداخلية على سطح المقطع العرضي وذلك بعد معرفة القوى الداخلية (تحديد شكل توزيع الاجهادات) كما يهتم بهيئة القدر الكافي من المادة (بتعين الأبعاد الكافية للقواطع العرضية) لتحمل المؤثرات المطبقة على الانشاء مع توفير عامل الأمان والاقتصاد بالنسبة لما يتطلب تصميمه من الانشاء أو التأكد من صلاحية منشأ لتحمل مؤثرات معينة بأمان كاف .

يقصد بكلمة الانشاءات كل مادة صلبة (غير سائلة ولا غازية) تتعرض بقصد أو بغير قصد لمؤثرات داخلية أو خارجية من شأنها ان تولد فيها قوى داخلية ومع ذلك فان المعنى المألوف لفط الانشاءات هو ما انشئ لتحمل قوى معينة سواء في البر أو البحر أو الجو كالمباني بأنواعها المختلفة والالات والسفن والنواصات وكلها امثلة لما تعنيه كلمة الانشاءات وبالتالي تدخل هذه في مجال بحث حساب الانشاءات .

ويقصد بكلمة المؤثرات القوى التي تؤثر على الانشاء نتيجة للحمولات الخارجية أو وزن الانشاء ذاته (الوزن الذاتي للانشاء) وكذلك القوى التي تتولد نتيجة لتغير درجات الحرارة أو لتعرض الانشاء للحركة ؛ سواء أكانت دورانية أم إلتقالية بسرعات متغيرة ، كما تشمل ايضاً تلك القوى التي تنشأ عندما تتعرض مواضع إستناد الانشاء الى حركة ، نتيجة لما يتولد عندها من ردود فعل .

يأتي حساب الانشاءات في المقام الأول عند تصميم أي من الانشاءات مهما اختلف نوع المادة التي مستعمل في الانشاء (فولاذ ، بيتون مسلح ، خشب . . . الخ) وبقدر ما تكون دراسة الانشاء من هذه الناحية دقيقة بقدر ما تحقق له من وفر وأمان في التصميم. وقد تطورت أساليب حساب الانشاءات في الثلاثين سنة الأخيرة من القرن العشرين لتسير التطور الذي حدث في الانشاءات ذاتها وما استلزمه هذا من ايجاد طرق للحساب تمتاز بالسهولة والكفاءة والدقة معاً . كما ان انتشار استعمال الانشاءات القشرية الرقيقة (القشريات) على نطاق واسع قد استلزم الاهتمام بدراسة هذه الانشاءات من الناحية النظرية دراسة مستفيضة .

علم سكون القوى

مقدمة

ان وظيفة علم الميكانيك هي دراسة الحركات الموجودة في الطبيعة . تحتل الحالة الحدية « السكون » في دراسات الميكانيك رقعة كبيرة .

تهدف النتائج الرياضية التي استست على المراقبة التوصل الى معرفة مسبقة لنتائج الظواهر الفعلية ، حيث يلزم في كثير من الحالات المعقدة لجعل الظواهر مثالية وذلك للتمكن من معالجتها رياضياً .

يمكن تقسيم الميكانيك بالنسبة لطبيعة الاجسام الى الاقسام التالية :

- ١ - ميكانيك الاجسام غير القابلة للتغير (ميكانيك الاجسام الصلبة) .
- ٢ - ميكانيك الاجسام القابلة للتغير (من الاجسام القابلة للتغير ما هو مرن التغير ومنها ما هو لدن التغير وهناك أنواع اخرى) .
- ٣ - ميكانيك الاجسام السائلة (ميكانيك السوائل) .
- ٤ - ميكانيك الاجسام الغازية (ميكانيك الغازات) .

كما يمكن تقسيمه بالنسبة للحركة إلى الاقسام التالية :

١ - علم الحركة (Kinematik) : وهو العلم الذي يدرس الحركة الصلفية (المجردة) دون التعرض للاسباب .

٢ - الديناميك (Dynamik) : وهو يقسم بدوره الى قسمين ، الاول هو علم السكون (Statik) والثاني هو علم التحريك (Kinetik) . أما الاول ، وهو علم السكون فهو العلم الذي يدرس توازن القوى على الاجسام الصلبة الساكنة أو على أجزاء من الجسم الصلب وهو يقسم بدوره ايضاً إلى قسمين أولهما هو علم سكون القوى وثانيهما هو علم سكون الاجسام الحاملة وأما الثاني ، وهو علم التحريك ، فهو العلم الذي يدرس حركة الاجسام الناتجة عن تأثير القوى والمؤثرات .

يدور مجال البحث في هذا الكتاب حول دراسة سكون الاجسام القابلة والاجسام غير القابلة للتغير .

الجسم الصلب (Starre Körper) : هو الجسم الذي لا يتغير شكله بالتحميل (بتأثير القوى) مطلقاً وهو صورة مثالية غير موجودة في الطبيعة ، لكن عالمنا يحتوي على كثير من الاجسام التي تتغير نتيجة للتحميل تغيراً طفيفاً (صغيراً جداً) وذلك بحيث يمكن إعتبار تغيرها معدوماً وغير موجود أو بكلام آخر يمكن اعتبارها كجسم صلب .

الاجسام مرنة التغير : هي اجسام قابلة للتغير إذا ما أثرت عليها قوى ومؤثرات لكن هذا التغير يزول بزوال القوى والمؤثرات ، فإذا زال التغير كلياً سميت بالاجسام مرنة التغير كلياً أما إذا زال بعضه عندئذ تسمى بالاجسام مرنة التغير جزئياً .

الاجسام لدنة التغير : هي اجسام قابلة للتغير إذا ما أثرت عليها قوى ومؤثرات ، لكن هذا التغير لا يزول بزوال القوى والمؤثرات . من بين هذه الاجسام اجسام لا يزول تغيرها كلياً بزوال القوى والمؤثرة بل يبقى جزء منه وتسمى بالاجسام لدنة التغير جزئياً كما ان هناك اجسام يبقى تغيرها بكامله وهي تسمى بالاجسام لدنة التغير كلياً .

العنصر للفوتن

مجموعة القوى المستوية التي تؤثر على الجسم الصلب

١ - ١ القوة

القوة هي العنصر الرئيسي في علم السكون وتعرف في الميكانيك بأنها السبب في تحريك الجسم أو تغير حركته أو تغير شكله وتعرف في علم سكون الاجسام الحاملة بأنها السبب في التغيرات .
للقوى أنواع عديدة منها قوى الجاذبية ، قوى التماس والنج .

١ - ١ - ١ تصنيف القوى

ليس بإمكان الجسم التوازن تغير مكانه كما وان القوى هي التي تقوم بتحقيق التوازن .
أما القوى فهي اما ان تكون على شكل أفعال (الحمولات) او ان تكون على شكل ردود أفعال (قوى الاستناد ، ردود أفعال المساند) . يمكن للحمولات (الافعال) ان تؤثر على الجسم بأشكال مختلفة (على سبيل المثال الوزن الذاتي ، حمولة الرياح ، وزن الثلوج ، ضغط التربة النج) .

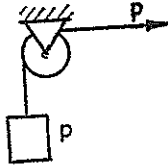
ان كافة القوى التي تؤثر على الجسم هي اما ان تكون قوى حجمية او ان تكون قوى سطحية . عندما يكون السطح ضيقاً عندئذ يقال عنها انها حمولة خطية وفي حالة كون الخط قصير جداً عندئذ يتكلم عن الحمولة الوحيدة او الحمولة النقطية او ما تسمى ايضاً بالحمولة المركزة .
يلجأ في الحسابات الهندسية غالباً الى تحويل القوى الفعلية الى قوى ذات شكل مثالي وذلك لتسهيل اجراء عملياتها .

ان واحدة القوى الوحيدة هي الكيلوبوند ويرمز له بالاحرف [kp] . اذا نسبت هذه الواحدة على الطول تم الحصول على واحدة القوى الخطية الا وهي كيلوبوند على المتر ويعبر عنها بالرمز [kp/m] واذا نسبت على السطح تم الحصول على واحدة القوى السطحية وهي كيلوبوند على المتر المربع ويعبر عنها بالرمز [kp/m²] اما اذا نسبت على الحجم عندئذ يتم الحصول على واحدة القوى الحجمية وهي كيلوبوند على المتر المكعب ويعبر عنه بالرمز [kp/m³] .

لا تتحدد القوة بقيمتها فقط بل أيضا باتجاهها وهي تمثل بشعاع يسمى شعاع القوة ويرمز له بحرف أسود غامق هكذا (P). يرتبط هذا الشعاع بحامله .

١ - ١ - ٢ القوة الوحيدة والجسم الصلب

للحصول على قوة باتجاه ما يربط جسم بجبل تحرفه عن اتجاهه بكرة يلف عليها ذلك الحبل . عندما تثبت البكرة بدون احتكاك وعندما يهمل وزن الحبل الذاتي فإن القوة لن تغير قيمتها المطلقة بتغير الاتجاه المذكور (شكل 1-1) .



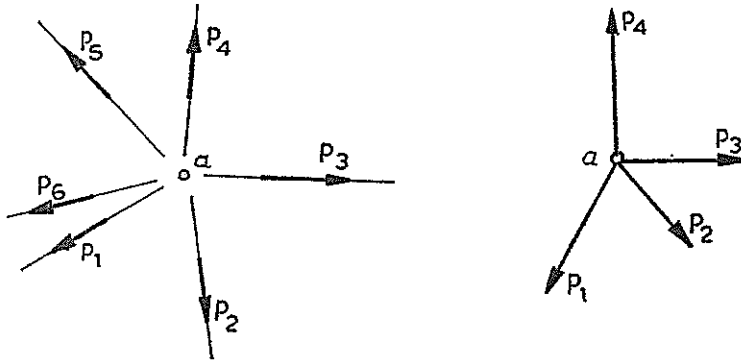
شكل 1-1

ان ازلاق القوة الوحيدة على حاملها لن يغير من تأثيرها الستاتيكي (السكوني) على الجسم الصلب ما دام الرباط بين القوة والجسم الصلب موجوداً . اذاً القوة هي ، كما ذكر أنفاً شعاع مرتبط بحامله.

ان نقطة تطبيق (تأثير) القوى الخارجية على الجسم الفعلي هي احدى العوامل التي تحدد القوى الداخلية التي ينبغي ان تحقق في كل قطع يجري على الجسم مع القوى الداخلية حالة التوازن .

١ - ٢ - ٢ مجموعة القوى المستوية المركزية

يقال عن مجموعة القوى المستوية أنها مركزية عندما يكون لها نقطة تطبيق (تأثير) واحدة أو عندما تتلاقى حواملها في نقطة واحدة (شكل 1-2) .

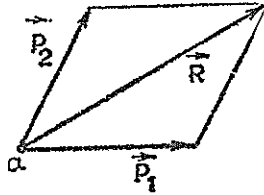


شكل 1-2

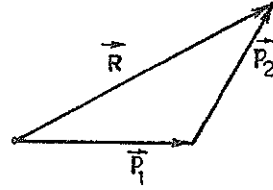
١ - ٢ - ١ معالجة مجموعة القوى المستوية المركزية تخطيطياً .

تركيب قوتين :

إذا أثرت قوتان P_1 و P_2 في النقطة a من جسم صلب كان تأثير هاتين القوتين مكافئاً لقوة وحيدة R نقطة تأثيرها هي نفس النقطة a ونساوي قطر متوازي الاضلاع (شكل 1-3) كما تساوي الضلع الناقص في مثلث القوى (وتر مثلث القوى) الذي يتشكل نتيجة توالي القوتين (شكل 1-4) يعبر عن ذلك بالقول أن القوة R تكافئ مجموعة القوى P_1 و P_2 ويعني إمكانية استبدال قوتين متلاقيتين بقوة وحيدة تسمى محصلتها والعكس صحيح أي يمكن استبدال قوة وحيدة بركبتها .



شكل 1-3

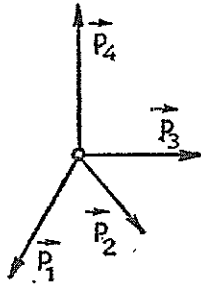


شكل 1-4

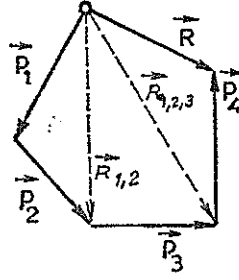
تركيب مجموعة قوى :

تؤثر في نقطة واحدة من جسم مجموعة قوى أعطيت قيمتها وإتجاهاتها في مخطط المكان (شكل 1-5) . يمكن إيجاد محصلة هذه القوى بواسطة مخطط القوى (شكل 1-6) . ترسم القوى ، بعد استخدام مقياس القوى ($1 \text{ cm} = x \text{ kp}$) ، على شكل مسافة تمثل حسب الشكل (1-6) ، حيث ينبغي إختيار إحدى قوى المجموعة واعطاءها الرمز P_1 واعتبارها قوة أولى ثم تضاف إليها بعد ذلك وتسلسل ما بقية قوى المجموعة فمثلاً إن القوتين $P_1 + P_2$ تعطي المحصلة $R_{1,2}$ وكذلك فإن القوى $R_{1,2} + P_3$ تعطي المحصلة $R_{1,2,3}$ والنخ .

إن نقطة البداية الواقعة على القوة الاولى ونقطة النهاية الواقعة على القوة الاخيرة تمثل المحصلة النهائية R لمجموعة القوى التي تؤثر في تلك النقطة . أما المحصلة فتتجه بعكس الاتجاه الذي تشير اليه مجموعة القوى المرسومة في مصلع القوى .



شكل 1-5



شكل 1-6

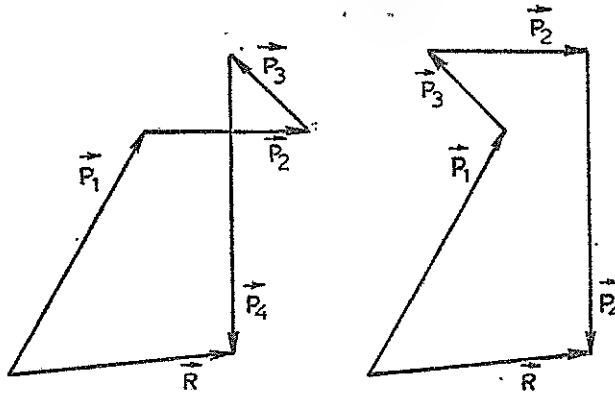
تحليلياً يمكن التعبير عن محصلة القوى التي تم الحصول عليها تخطيطياً بواسطة المعادلة الشعاعية التالية :

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i \quad (1-1)$$

أثناء الجمع الشعاعي لا يؤثر تسلسل الحدود على النتيجة مطلقاً فمثلاً :

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_1 + P_3 + P_2 + P_4$$

والخ . هذا يعني ان تسلسل رسم القوى في مضلع القوى هو كيني (شكل 1-7) .



شكل (1-7)

مثال 1 :

بجموعة قوى مستوية مركزية يحملها حامل واحد (شكل 1-8) .

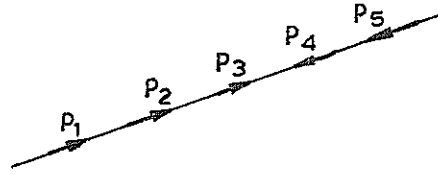
المعطى : P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 .

المطلوب : إيجاد محصلة مجموعة القوى .

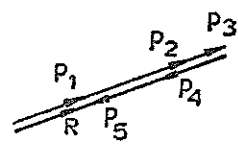
الحل :

لقد تم في مخطط القوى من الشكل (1-8) رسم مضع القوى ولقد تم فيه إيجاد المحصلة R .

مخطط المكان



مخطط القوى



(شكل 1-8)

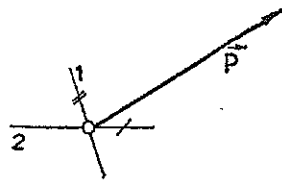
تحليل قوة لمركبتين:

المعطى : القوة P واتجاه كل من المركبتين (شكل 1-9) .

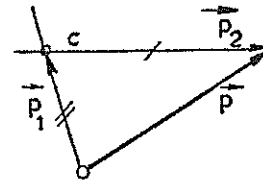
المطلوب : تعيين المركبتين P_1 و P_2 (مركبتى القوة P بالاتجاه 1 وبالاتجاه 2) .

الحل :

بنفس الطريق الذي تم به تركيب قوتين واعادتها الى قوة واحدة (المحصلة) يمكن عكسياً تحليل القوة P الى قوتين عرفت حواملها ، تسمى هذه القوى بمركبات القوة P (شكل 1-10) .



(شكل 1-9)



(شكل 1-10)

لقد تم في الشكل (1-10) رسم حامل المركبة الاولى 1 ابتداء من احدى نهايتي القوة المعطاة P ثم رسم حامل المركبة الثانية 2 ابتداء من النهاية الثانية . ان نقطة تقاطع حاملتي القوتين c تمثل نهاية القوة الاولى وكذلك بداية القوة الثانية .

١ - ٢ - ٢ معالجة مجموعة القوى المستوية المركزة تحليلياً

انطلاقاً من المعادلة الشعاعية (1-1) التي يمكن كتابتها على شكل مركبات كما يلي :

$$\mathbf{R} = \sum_{v=1}^n (P_{xv} \mathbf{i} + P_{yv} \mathbf{j}) = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad (1-2)$$

(حيث ان \mathbf{i} و \mathbf{j} هي الاشعة الواحدة ، الاول هو باتجاه المحور x والثاني هو باتجاه المحور y).

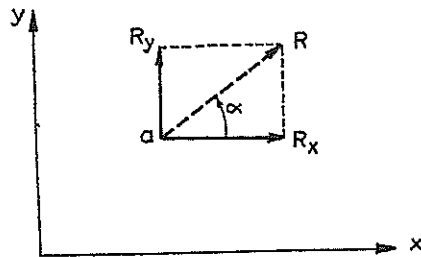
$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$$

يتم ، بمقارنة حدود طرفي العلاقة (1-2) ، التوصل للنتيجة التالية :

$$R_x = \sum_{v=1}^n P_{xv} \quad \text{و} \quad R_y = \sum_{v=1}^n P_{yv} \quad (1-3)$$

بالاستمارة بمركبات المحصلة (شكل 1-11) يتم تعيين قيمة المحصلة واتجاهها وذلك كالتالي :

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} \quad (1-4)$$



(شكل 1-11)

تقاس الزاوية دائماً ابتداء من المحور x الموجب وتتجه الى القوة بالمفهوم الرياضي الموجب .
فمثلاً من اجل القوى الممثلة في الشكل (1.12) يستطاع التعبير عن مركبات المحصلة كما يلي :

$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 = \sum_{v=1}^n P_v \cos \alpha_v \quad (1-5)$$

$$R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 = \sum_{v=1}^n P_v \sin \alpha_v$$

تعتبر R_x و R_y موجبة عندما تشير باتجاه المحاور الموجبة . تنظم الإشارة في هذه العلاقة بواسطة التوابع الزاوية المباشرة ، حيث يلزم اعتبار الزوايا المنفرجة أيضاً .

تمر المحصلة من النقطة المركزية المشتركة للقوى وهي تكافئ مجموعة القوى المستوية المركزية .

يفضل ان يتم حساب قيمة واتجاه ومنحى المحصلة بواسطة المخطط التالي :

v	P_v	α_v	$\cos \alpha_v$	$\sin \alpha_v$	$P_{xv} = P_v \cos \alpha_v$	$P_{yv} = P_v \sin \alpha_v$
الواحدة	Mp	°	°	°	Mp	Mp
1						
2						
⋮						
v						
⋮						
n						
Σ	+	°	°	°	$R_x = \dots$	$R_y = \dots$

ان القيم الموجودة على يسار الخط المزدوج هي قيم معطاة . يشتمل السطر الثاني من الجدول على وحدات القيم المدونة في السطر الاول .

اذا كانت ، على سبيل المثال ، نتيجة حساب مجموعة القوى المركزية هي : $R_x = 0$ و $R_y \neq 0$ عندئذ ينتج ان

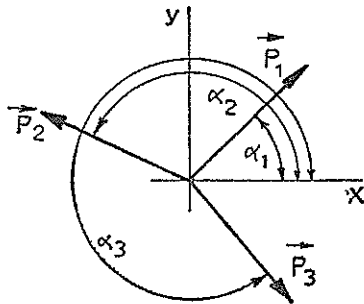
$$|R| = |R_y| , \cos \alpha = 0 , \sin \alpha = \frac{R_y}{R} = \pm 1$$

في هذه الحالة يكون حامل المحصلة موازيا للمحور y أما اتجاهها فيمين من اشارة المركبة R_y .

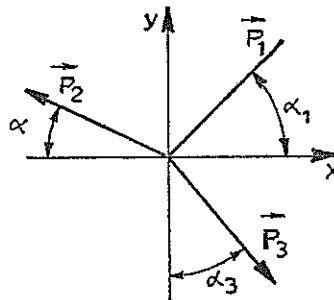
أما اذا كانت ، من اجل مجموعة قوى اخرى ، نتيجة الحساب هي : $R_x \neq 0$ و $R_y = 0$ فان المحصلة توازي المحور x .

لتنظيم اشارة المحصلة يفضل في الحالات العملية استخدام اصغر زاوية (شكل 1.13) وادخال اشارة المركبات بعين الاعتبار . فمثلا باعتبار ان القوى التي تشير باتجاه الاحداثيات الموجبة هي موجبة ينتج :

$$\begin{aligned} R_x &= P_1 \cos \alpha_1 - P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 \\ R_y &= P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 - P_3 \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (1-7)$$



(شكل 1-12)



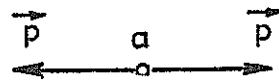
(شكل 1-13)

١ - ٢ - ٣ شروط التوازن

أ - شروط التوازن التخطيطية

مبدأ توازن قوتين :

توازن مجموعة قوى تتألف من قوتين اذا حملها حامل واحد وكانتا متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه (شكل 1-14) .

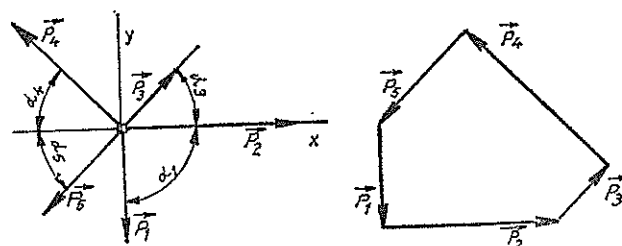


(شكل 1-14)

شروط توازن مجموعة قوى:

تؤثر في نقطة ما من جسم عدة قوى تسمح بتركيبها واعادتها الى محصلة . تسيطر على الجسم حالة التوازن عندما تقابل محصلة مجموعة القوى قوة وحيدة لها :

- ١ - نفس القيمة المطلقة و
 - ٢ - حامل واحد (يحملها حامل واحد) و
 - ٣ - اتجاه يعاكس اتجاهها .
- تسمى هذه القوى بقوة التوازن (او قوة رد الفعل) .
- على العموم لا حاجة لاعادة مجموعة القوى الى محصلتها وانما يمكن فوراً القول بأن الجسم موجود في حالة توازن عندما تشكل مجموعة القوى المؤثرة عليه مضلعاً قوى مغلقاً (مضلعاً مغلقاً للقوى) (شكل 1-15) .



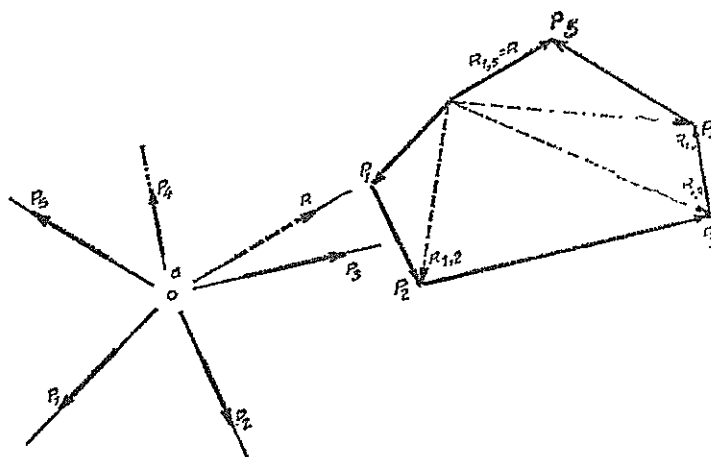
(شكل 1-15)

النتيجة :

أثناء تركيب (جمع) مجموعة القوى المستوية المركزية تم الحصول على النتائج التالية :

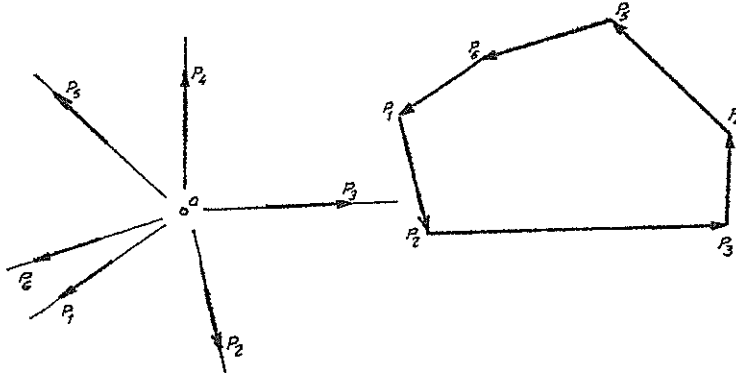
- ١ - تمديد مجموعة القوى نفسها الى قوة واحدة تكافئها (لها محصلة) .

العلامة التخطيطية : مضلع القوى مفتوح (شكل 1-16) .



(شكل 1-16)

- ٢ - تسيطر على مجموعة القوى حالة التوازن (ليس لها محصلة) .
العلامة التخطيطية : مضلع القوى مغلق (شكل 1-17) .



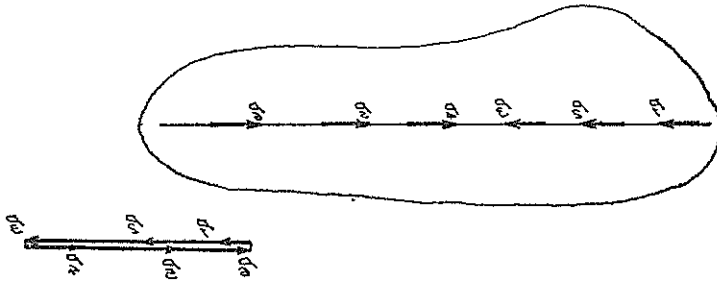
(شكل 1-17)

مثال 2 :

- مجموعة قوى مستوية مركزية يحملها حامل واحد (شكل 1-18) .
المعطى P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 .

المطلوب : التأكد من ان مجموعة القوى هي مجموعة متوازنة.

الحل :



(شكل 1-18)

لقد تم في مخطط القوى من الشكل (1-18) رسم مضلع القوى ، حيث يلاحظ انه مضلع مغلق ، اي ان مجموعة القوى هي مجموعة متوازنة .

ب - شروط التوازن التحليلية :

كما ذكر سابقاً فلا داعي لاعادة مجموعة القوى الى محصلتها بل يمكن فوراً القول :

بأن حالة التوازن تسيطر على الجسم عندما يكون مجموع كل القوى المؤثرة عليه مساوياً للصفر أو بكلام آخر عندما تنعدم محصلة مجموعة القوى ، اي ان $R=0$. يعبر عن ذلك تحليلياً بواسطة العلاقة التالية :

$$\sum_{v=1}^n P_v = 0$$

ان انعدام المحصلة يعني انعدام مركباتها ايضاً ، اي ان :

$$R_x = R_y = 0$$

هنا ايضاً يمكن تحليلياً التعبير عن العلاقة السابقة كما يلي :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{v=1}^n P_{yv} = 0 \quad (1-8)$$

ان العلاقة (1-8) التي تشتمل على معادلتين شرطيتين بالاتجاه x والاتجاه y هي معادلات لازمة وكافية لتوازن مجموعة القوى المستوية المركزية .

النتيجة :

تسيطر على مجموعة القوى المستوية المركزية حالة التوازن عندما ينعدم المجموع الجبري لمركبات قوى المجموعة باتجاه الاحداثي x وكذلك باتجاه الاحداثي y . وبما أن إختيار موضع الاحداثيات x و y كان كفيلاً لذلك يستطاع التعبير عن شروط التوازن بالشكل العام التالي : تسيطر على مجموعة القوى المستوية المركزية حالة التوازن عندما ينعدم المجموع الجبري لمركبات كل المجموعة باتجاهين ما (شريطة ان لا يقع هذين الاتجاهين على استقامة واحدة وباتجاه متعاكس ، اي ان الزاوية التي بينها هي 180° . على العموم يفضل اخذ أي اتجاهين متعامدين) . تسمى شروط التوازن هذه بشروط توازن القوى. اما شرط توازن العزوم فهو هنا محقق من البداية لكون مجموعة القوى المستوية مركزية .

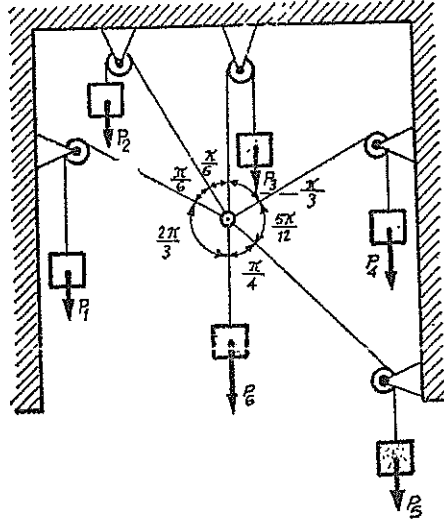
مثال 3 :

المعطى : قيم بعض قوى المجموعة المستوية المركزية :

$P_1 = 50,0 \text{ kp}$, $P_2 = 60,0 \text{ kp}$, $P_3 = 100,0 \text{ kp}$, $P_4 = 20,0 \text{ kp}$ (شكل 1-19)

المطلوب : إيجاد قيم القوى P_5 و P_6 وذلك حتى تسيطر على المجموعة حالة التوازن .

الحل :



شكل 1-19

سوف يتم اجراء الحل باستخدام الجدول (1.6) :

v	P_v	α_v	$\cos \alpha_v$	$\sin \alpha_v$	$P_{xv} = P_v \cos \alpha_v$	$P_{yv} = P_v \sin \alpha_v$
الوحدة	kp	°	.	.	kp	kp
1	50,0	$5 \pi/6$	-0,8660	0,5000	-43,3015	25,0000
2	60,0	$2 \pi/3$	-0,5000	0,8660	-30,0000	51,9618
3	100,0	$\pi/2$	0	1,0000	0	100,0000
4	20,0	$\pi/6$	0,8660	0,5000	17,3206	10,0000
5	P_5	$7 \pi/4$	0,7071	-0,7071	$0,7071 P_5$	$-0,7071 P_5$
6	P_6	$3 \pi/2$	0	-1,0000	0	$-P_6$
Σ	R_x	R_y

$$R_x = -55,981 + 0,707 P_5 \quad , \quad R_y = 186,962 - 0,707 P_5 - P_6$$

بالاستعانة بشرطي التوازن (1-8) ينتج :

$$-55,981 + 0,707 P_5 = 0$$

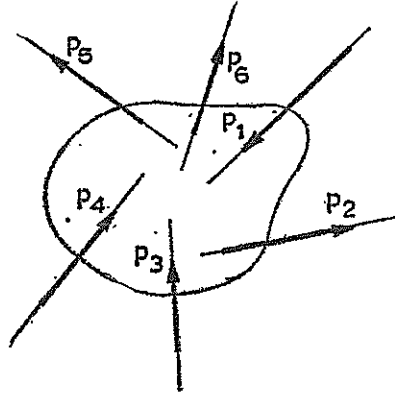
$$186,962 - 0,707 P_5 - P_6 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يتم التوصل للقوى المطلوبة :

$$P_5 = 79,12 \text{ kp} \quad , \quad P_6 = 130,98 \text{ kp}$$

١ - ٣ مجموعة القوى المستوية العامة

يقال عن مجموعة القوى المستوية انها عامة عندما تكون القوى المشكّلة للمجموعة واقعة في مستوى واحد ولكنها لا تؤثر في نقطة واحدة كما ان حواملها ايضاً لا تتلاقى في نقطة واحدة (شكل 1-20) .

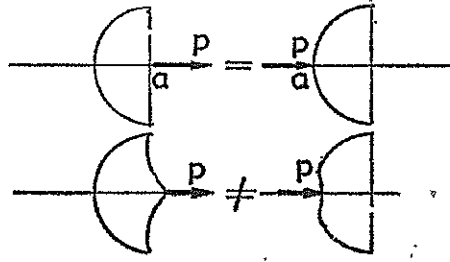


شكل 1-20

الفرض : مجموعة القوى المدروسة في هذه الفقرة تؤثر على الجسم الصلب .

١ - ٣ - ١ مبدأ زلق القوة على حاملها في الجسم الصلب

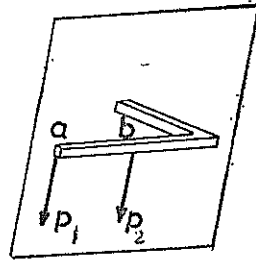
فقط في الجسم الصلب يمكن زلق القوة الوحيدة على حاملها دون ان يتغير تأثيرها. فيما يلي سوف يتم ايضاح هذه الحقيقة على نصف كرة صلبة واخرى قابلة للتغير (شكل 1-21) حيث تؤثر على كلا الجسمين قوة لها نفس القيمة (المطلقة) ونفس الحامل .



شكل 1-21

فمن أجل نصف الكرة الصلبة لا أهمية لنقطة تطبيق القوة a الواقعة على الحامل . أما من أجل نصف الكرة المتغيرة فعلى عكس ذلك فإن تأثير القوة P مرتبط بنقطة تطبيقها . يمكن التعبير عن هذه الحقيقة بالكلام كما يلي :

ان تأثير القوة الوحيدة على الجسم غير مرتبط بنقطة تطبيقها الواقعة على حاملها . في حالة انتقال القوة انتقالاً موازياً على نفسها يتغير تأثيرها على الجسم الصلب بشكل واضح . فسهولة يمكن ايضاح هذه الحقيقة على قبضة الباب (1-22) ، ففي الفقرة ١ - ٣ - ٦ سوف يتم شرح ذلك بالتفصيل



شكل 1-22

١ - ٣ - ٢ معالجة مجموعة القوى المستوية العامة تخطيطياً

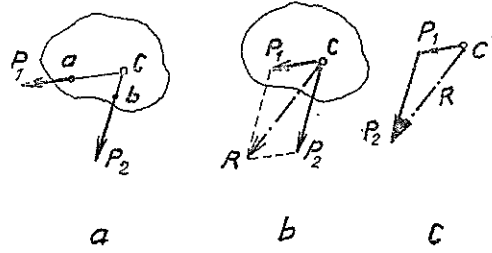
α - تركيب (جمع) قوتين :

- . المعطى : القوة P_1 ونقطة تأثيرها على الجسم الصلب a .
 - . القوة P_2 ونقطة تأثيرها على الجسم الصلب b .
- المطلوب : إيجاد محصلة القوتين .

الحل :

أ - بطريقة متوازي اضلاع القوى (شكل 1-23a) :

- أ - ١ - يمدد حاملتي القوتين P_1 و P_2 حتى يتلاقوا في نقطة واحدة هي النقطة c .
- أ - ٢ - ترلن القوتين P_1 و P_2 على حواملها حتى النقطة c .
- أ - ٣ - يرسم متوازي اضلاع القوى وتعين المحصلة R التي تمثل قطره .



شكل 1-23a

ب - بطريقة مضلع القوى (مثلث القوى) (شكل 1-23b) :

- ب - ١ - ترسم القوة P_1 (في مخطط القوى) .
- ب - ٢ - ترسم من نهاية القوة P_1 القوة P_2 .
- ب - ٣ - تعين المحصلة R التي تمثل الخط الواصل بين بداية P_1 ونهاية P_2 (خط اغلاق مضلع القوى) .

- ب - ٤ - يمدد ، في مخطط المكان ، حاملتي القوتين P_1 ، P_2 فيتلاقوا في النقطة c .
- ب - ٥ - يرسم ، في مخطط المكان ، موازياً للمحصلة R بحيث يمر من النقطة c .

β - تركيب (جمع) ثلاثة قوى (بواسطة المحصلة الجزئية) :

- المعطى : القوى الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 ونقاط تطبيقها على الجسم الصلب a ، b ، c .
- المطلوب : إيجاد محصلة هذه القوى .

الحل :

- ١ - تجمع القوتين P_1 و P_2 ، في مخطط القوى ، فيتم الحصول على المحصلة $R_{1,2}$.

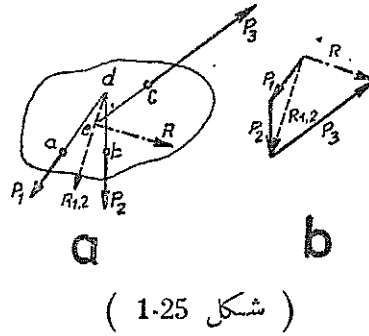
$$P_1 + P_2 = R_{1,2}$$

٢ - تجمع القوتين $R_{1,2}$ و P_3 فيتم الحصول على المحصلة النهائية R .

$$P_3 + R_{1,2} = R$$

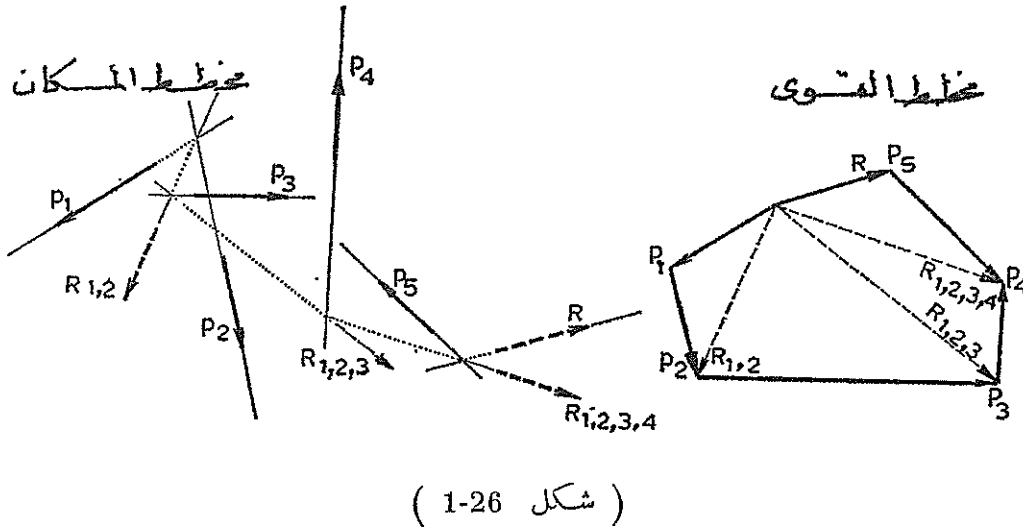
٣ - يمدد حاملتي القوتين P_1 و P_2 ، في مخطط المكان، فيتلاقوا في النقطة d ثم يرسم منها موازياً للمحصلة الجزئية $R_{1,2}$.

٤ - يمدد حاملتي القوتين P_3 و $R_{1,2}$ فيتلاقوا في النقطة e ثم يرسم منها موازياً للمحصلة النهائية R (شكل 1-25) .

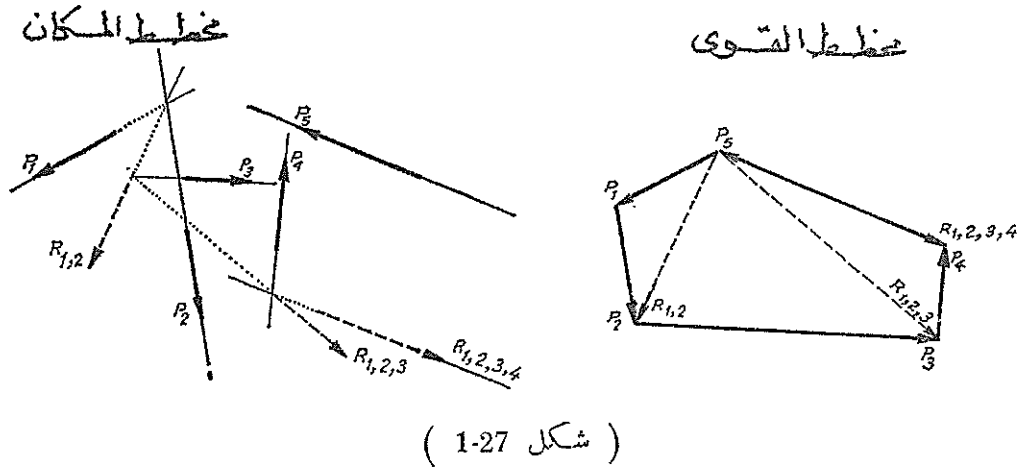


نتيجة :

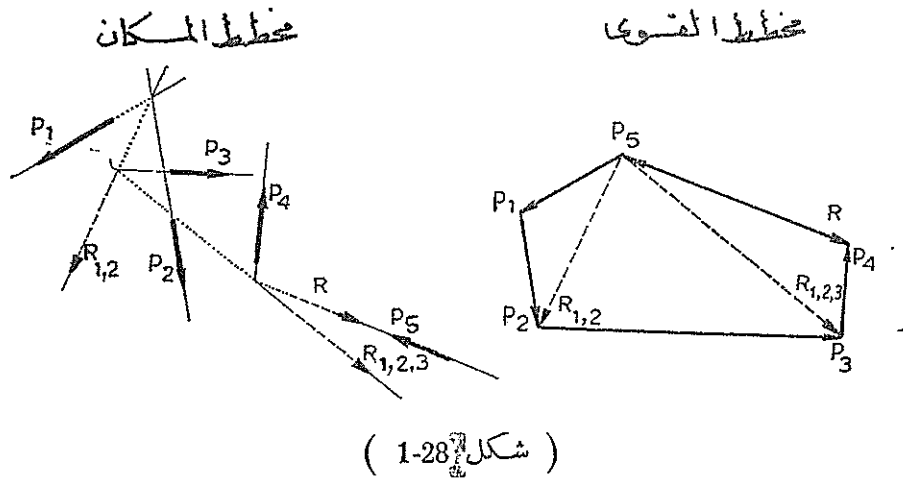
١ - مضلع القوى مفتوح ، هذا يعني ان لمجموعة القوى المستوية محصلة تكافئها (شكل 1-26) .



٢ - مضلع القوى مغلق ، هذا يعني انه يمكن الاستعاضة عن مجموعة القوى المستوية بمزدوجة قوى ، عزمها المحصل هو M (شكل 1-27) .



٣ - مضلع القوى مغلق ، وفي نفس الوقت لا تشكل ، في مخطط المكان مزدوجة قوى ، وهذا يعني ان مجموعة القوى المستوية هي مجموعة متوازنة (شكل 1-28) .



٧ - تركيب (جمع) مجموعة القوى المستوية العامة بطريقة المضلع الجلي :

يصعب استعمال الطريقة السابقة التي تم استعمالها في تركيب ثلاثة قوى (طريقة المحصلة الجزئية) لتعين محصلة مجموعة قوى مستوية عامة وذلك عندما تقع نقطة تقاطع حوامل القوى خارج ورقة الرسم وتصبح غير ممكنة عندما تتوازي قوى المجموعة كما وانها تفقد وضوحها عندما تتألف المجموعة

المدرسة من عدد كبير من القوى . للأسباب المذكورة يفضل دائماً استخدام طريقة المصنع الجلي التي تقود دائماً للهدف والتي سوف يتم شرحها على مجموعة القوى الممثلة في الشكل (1-29a).

المعطى : مجموعة القوى الممثلة في الشكل (1-29a) .

المطلوب : إيجاد محصلة مجموعة القوى (قيمتها واتجاهها وحاملها) .

الحل :

ترسم ، في مخطط المكان (شكل 1-29a) ، حوامل القوى بعد اختيار مقياس أطوال مناسب $(1 \text{ cm} = \lambda \text{ cm})$ بعد ذلك ترسم هذه القوى في مخطط القوى (شكل 1-29 b) وبمقياس قوى مناسب $(1 \text{ cm} = x \text{ kp})$ فينشأ عنها مضلعاً للقوى والذي يتم منه قراءة قيمة المحصلة R وكذلك يتم تحديد اتجاهها . أما تحديد مكان المحصلة فهي وظيفة المصنع الجلي .

يختار ، في مخطط القوى وبشكل كفي القطب P ثم ترسم الاشعة القطبية S_1 و S_2 بعد ذلك ترسم ، في مخطط المكان ، موازيات للاشعة القطبية مبتدئين بنقطة ما من حامل القوة التابعة لها وبذلك يتم التوصيل لما يسمى بالمصنع الجلي .

ينبغي اثناء انشاء المخطط القطبي مراعاة ما يلي : يحدد كل شعاعين قطبيين قوة واحدة في مخطط القوى (على سبيل المثال تحدد الاشعة القطبية S_1 و S_2 القوة P_1) كما ينبغي ان تقاطع الاشعة المذكورة على حامل نفس القوة في مخطط المكان .

بتعبير آخر : يقابل كل مضلع في مخطط القوى نقطة في مخطط المكان .

ان نقطة تقاطع الشعاع القطبي الاول والشعاع القطبي الاخير هي التي تحدد مكان حامل المحصلة (فالاشعة القطبية المذكورة هي التي تحدد ، في مخطط المكان ، موضع المحصلة R) . بسبب كون اختيار القطب ونقطة الابتداء في المصنع الجلي كفيّاً يتم الحصول من اجل كل مجموعة من القوى على عدد لا نهائي من المضلعات الجلية .

لبرهان على صحة انشاء المصنع الجلي يلجأ للتفكير التالي :

لقد تم ولأسباب في الرسم تحليل القوى $P_1 \dots P_4$ الى القوى $S_1 \dots S_5$.

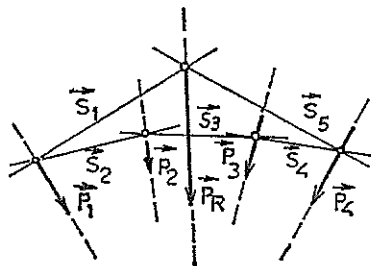
في البداية يستعاض عن القوة P_1 بمركبتها S_1 و S_2 بعد ذلك تجمع (تركيب) القوتين P_2 و S_2 فيتم الحصول على محصلتها S_3 ثم تجمع القوتين P_3 و S_3 فيتم الحصول على محصلتها S_4

وأخيراً تجمع القوتين P_4 و S_4 فتكون محصلتها هي S_5 . بواسطة تلك العمليات يكون قد تم إعادة القوى الأربعة P_1, \dots, P_4 إلى القوتين S_1 و S_5 .

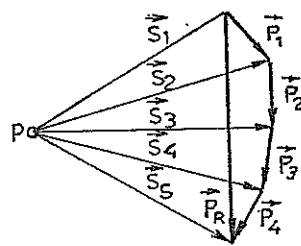
والآن ينبغي أن تمر المحصلة R من نقطة تقاطع حوامل القوتين S_1 و S_5 . وبهذا ينتهي تعيين مكان المحصلة أما قيمتها واتجاهها فيتم الحصول عليها من مضلع القوى الذي تم رسمه في مخطط القوى وهو التالي :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = S_1 + S_5 = R$$

في حالة كون مجموعة القوى متوازية يستطاع أيضاً استخدام نفس انشاء المضلع الجلي .



(شكل a 129)



(شكل b 1-29)

النتيجة :

لايجاد محصلة مجموعة قوى مستوية عامة تتألف من القوى P_1, P_2, \dots, P_n يلجأ لاستخدام طريقه المضلع الجلي التالية :

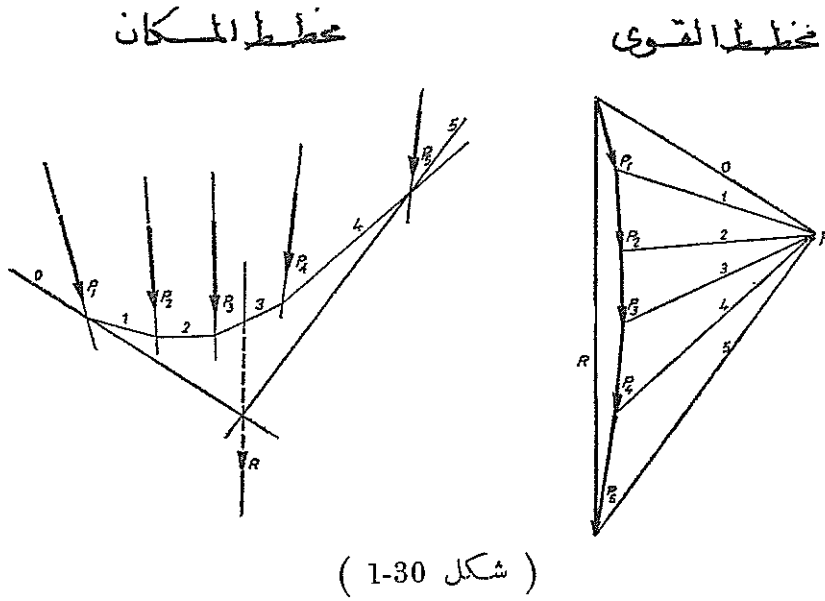
- ١ - ترسم مجموعة القوى ، في مخطط المكان، بعد اختيار مقياس طول مناسب .
- ٢ - يرسم في مخطط القوى ، مضلع القوى المائد للمجموعة وذلك بعد اختيار مقياس مناسب للقوى ومنه يتم تعيين قيمة واتجاه المحصلة R .
- ٣ - تختار نقطة ما ، في مخطط القوى ، يرمز لها بالحرف P وتسمى بقطب مضلع القوى .
- ٤ - يوصل القطب P مع كافة رؤوس مضلع القوى . تسمى خطوط الوصل المذكورة بالاشعة القطبية .
- ٥ - ترسم ، في مخطط المكان ، موازيات للاشعة القطبية والتي تسمى بالاشعة الجلية .

يدعى مضلع الاشعة الجبلية ، في مخطط المكان ، بالمضلع الجبلي (شكل 1-29 b) .
 عندما يغلق ، في مخطط القوى ، شعاعان قطبيان قوة ما فان الاشعة الجبلية الموازية لها تقاطع ،
 في مخطط المكان ، على هذه القوة .
 حسب هذه القاعدة فان نقطة تقاطع الشعاع الجبلي الاول والاخير ، في مخطط المكان ، هي
 نقطة من حامل المحصلة R .

٨- أمثلة :

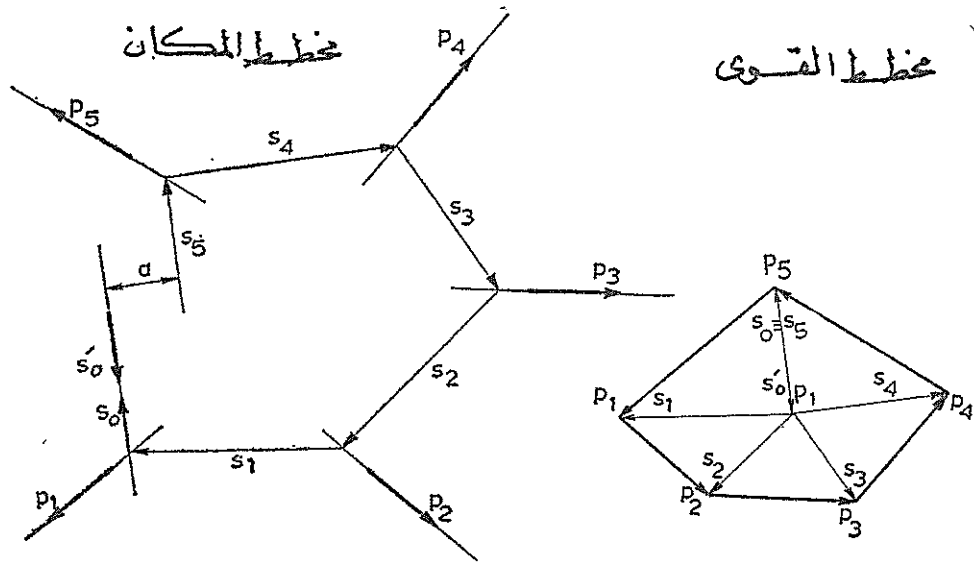
مثال 4 :

ايجاد محصلة مجموعة قوى (شكل 1-30) .



مثال 5 :

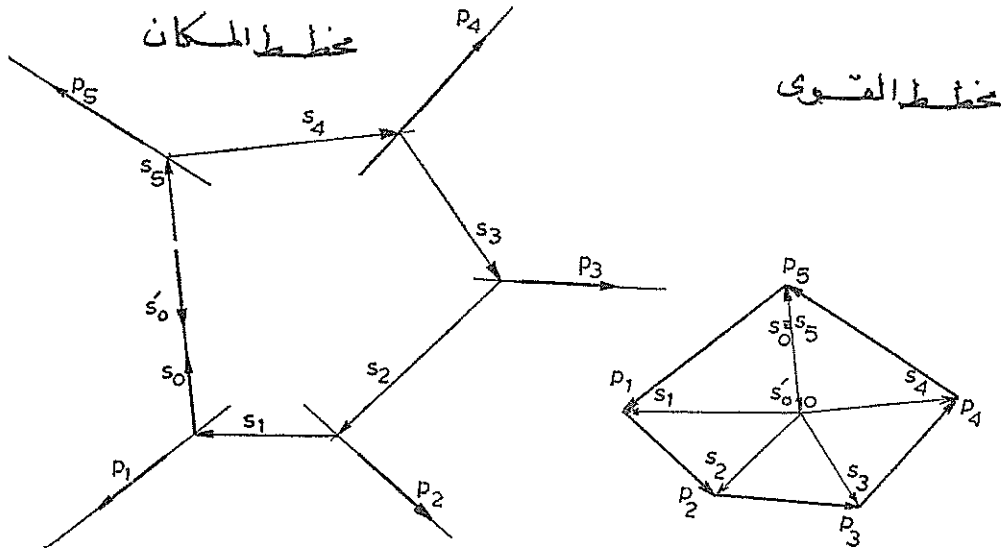
توازن القوى دون توازن العزوم (شكل 1-31) .



(شكل 1-31)

مثال 6 :

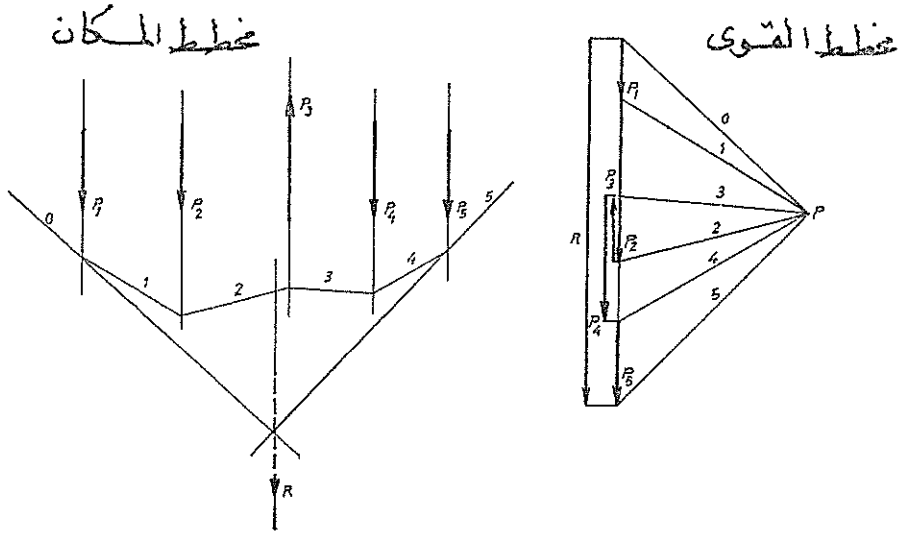
توازن القوى وتوازن العزوم (شكل 1-32) .



(شكل 1-32)

مثال 7 :

ايجاد محصلة مجموعة قوى متوازية (شكل 1-33)



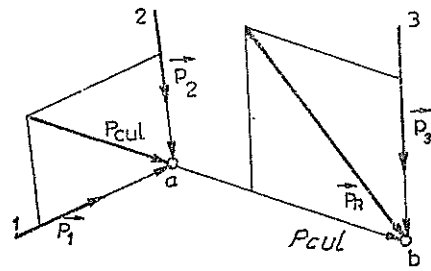
(شكل 1-33)

ε - تحليل قوة لثلاثة مركبات وفق ثلاثة اتجاهات معلومة غير متلاقية في نقطة واحدة (بواسطة القوة المساعدة لكولمان) :

المعطى : القوة P واتجاهات المركبات الثلاثة 1 , 2 , 3 (شكل 1-34)
المطلوب : إيجاد مركبات القوة بالاتجاهات الثلاثة المعطاة .

الحل :

- ١ - تمديد الاتجاهين 1 , 2 حتى يتلاقوا في نقطة مشتركة a .
- ٢ - تمديد الاتجاه 3 وحامل القوة P حتى يتلاقوا في نقطة مشتركة b .
- ٣ - وصل النقطة b بالنقطة a .



شكل 1-34

٤ - تحليل القوة P لمركبتين الأولى بالاتجاه 3 (ومنه يتم التوصل الى المركبة P_3) والثانية بالاتجاه \overline{ab} (ومنه يتم التوصل الى القوة المساعدة لكونان P_{cul}) .

٥ - زلق القوة P_{cul} الى النقطة a ثم تحليلها بالاتجاهين 1 , 2 وبذلك يتم التوصل للمركبتين P_1 و P_2 .

١ - ٣ - ٣ إيجاد محصلة مجموعة القوى المستوية العامة تحليلياً

يتم إيجاد قيمة واتجاه محصلة مجموعة القوى المستوية العامة حسب الفقرة ١ - ٢ - ٢ وذلك بالاستعانة بمجموع مركبات القوى :

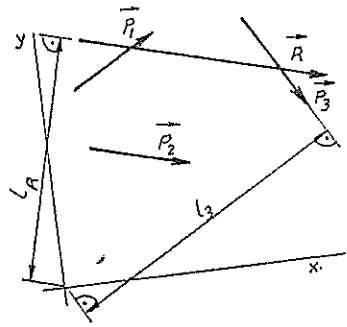
$$R_x = \sum_{v=1}^n P_{xv} = \sum_{v=1}^n P_v \cos \alpha_v$$

$$R_y = \sum_{v=1}^n P_{yv} = \sum_{v=1}^n P_v \sin \alpha_v$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

اما مكان المحصلة فيتم الحصول عليه من شرط تساوي العزم المحصل للقوى الافراذية (مجموع عزوم كل من القوى) بالنسبة لنقطة ما من المستوي وعزم محصلة القوى R (العزم الذي ينتج عن محصلة القوى R يبعدها عن نقطة النسب المذكورة) (شكل 1-35)



شكل 1.35

$$M_t = l_R R = \sum_{v=1}^n l_v P_v$$

(ينبغي في العلاقة السابقة أخذ اتجاه الدوران بعين الاعتبار) .
منها ينتج :

$$l = \frac{M_R}{R} = \frac{1}{R} \sum_{v=1}^n l_v P_v$$

يمكن التعبير عن العلاقات السابقة شعاعياً كما يلي :

$$R = \sum_{v=1}^n P_v$$

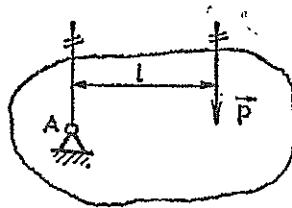
$$M_R = \sum_{v=1}^n l_v \times P_v = l_R \times R$$

لا تعطي الكتابة الشعاعية المذكورة في المشاكل المستوية منافعة كبيرة . بينما تقدم فوائد كثيرة في المشاكل الفراغية ولذلك يفضل استخدامها هناك .

١ - ٣ - ٤ العزم

إذا أثرت على جسم ، ذو استناد قابل للدوران ، قوة لاير حاملها من نقطة الدوران فإن هذه القوة مستحالة تدوير الجسم (شكل 1-36) يعرف عزم القوة P بالنسبة لنقطة الاستناد بواسطة العلاقة التالية :

$$M = l P$$



شكل 1-36

حيث أن l هو البعد العمودي بين حامل القوة P وبين نقطة الدوران ويسمى هذا البعد أيضاً بذراع الرافعة .

يمكن التعبير عن العلاقة السابقة بالكتابة الشعاعية كما يلي :

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{P}$$

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{l}| \cdot |\mathbf{P}| \cdot \sin(\angle \mathbf{l}, \mathbf{P})$$

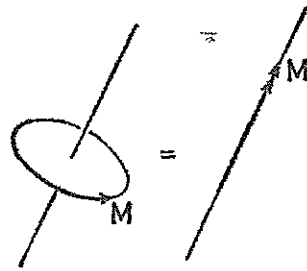
من هذه العلاقة يستنتج أن عزم قوة يتعلق بموضع نقطة النسب . أما واحدة العزم فهي واحدة القوة مضروبة بوحدة الطول (على سبيل المثال [kpm]) .

يعرف اتجاه دوران العزم على العموم بأنه موجب عندما يكون بعكس دوران عقارب الساعة . إذا أثرت على جسم عدة قوى فعزمها الكلي أو ما يسمى بالعزم المحصل هو

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{l}_2 \times \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{l}_n \times \mathbf{P}_n$$

$$\mathbf{M}_R = \sum_{v=1}^n \mathbf{l}_v \times \mathbf{P}_v$$

تماماً كالقوى يمكن اعتبار العزم كشعاع ويمالج معالجة شعاعية وللتفريق بينه وبين شعاع القوة لذلك سوف يرمز له بسهم له رأسين تشير إلى اتجاه دوران العزم . وفي بعض الأحيان يرمز لشعاع العزم بمنحني يحوي في نهايته سهم واحد يشير إلى اتجاه الدوران (شكل 1-37) .



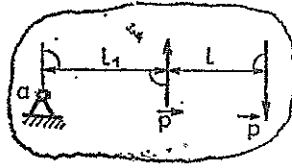
(شكل 1-37)

١ - ٣ - ٥ مزدوجة القوى

إذا أثرت على جسم قوتان متساويتان بالقيمة المطلقة ومتعاكستين بالاتجاه وذات حوامل متوازية (شكل 1-38) ، أدت لتشكيل العزم

$$M = -l_1 P + (l_1 + l) P$$

$$M = l P$$



شكل 1-38

بالمكان التعبير عن العلاقة الأخيرة شعاعياً كما يلي :

$$M = l \times P$$

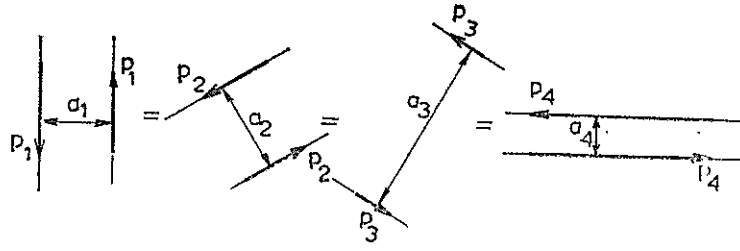
تسمى مجموعة القوى ذات الصفات السابقة الذكر بمزدوجة القوى .

من العلاقة السابقة يتبين أن عزم مزدوجة قوى يساوي القيمة العددية لاحدى قوى المزدوجة مضروبة بالبعد العمودي للقوتين وهو إما أن يكون موجباً أو سالباً وذلك حسبما يكون اتجاه دوران الجسم الذي تؤثر عليه مزدوجة القوى ، بعكس دوران عقارب الساعة أو باتجاه دوران عقارب الساعة .

ينبغي هنا التنويه إلى أن عزم مزدوجة القوى بالنسبة لردود أفعال خارجية له نفس التأثير ولا علاقة له بنقطة تطبيق القوى ولذلك يمكن نقلها كيفياً .

أن شعاع العزم هو شعاع طليق (freier Vector) أما شعاع القوة فهو شعاع مرتبط بخط (مرتبط بحامله) (binienflüchtige Vektor) .

تكافئ مزدوجات القوى التي لها نفس العزم وبالعكس فإن مزدوجات القوى المتكافئة لها نفس العزم، أي أن قيمة ومسافة قوى المزدوجة يمكن أن تتغير كيفياً شريطة بقاء عزمها ثابتاً (شكل 1-39)



شكل 1-39

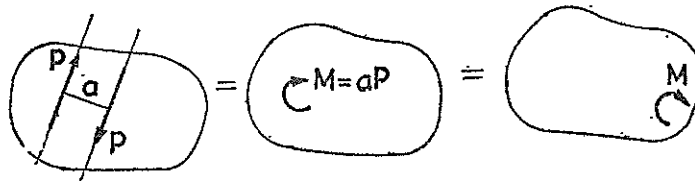
$$a_1 P_1 = a_2 P_2 = a_3 P_3 = a_4 P_4 = M$$

يتم جمع مزدوجات القوى مع بعض كما يشير اليه الشكل (1-40)

$M_1 = -8 \cdot 1,5 = -12 \text{ Mpm}$	
$M_2 = +4 \cdot 2 = +8 \text{ ,,}$	
$M_3 = -6 \cdot 3 = -18 \text{ ,,}$	
$M = -22 \text{ Mpm}$	

شكل 1-40

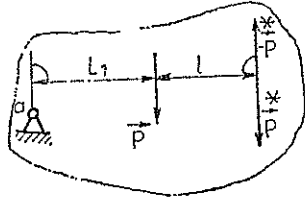
لامكانية تحديد اية مزدوجة قوى في المستوي من خلال عزمها M بشكل واضح لذلك يمكن الاستغناء عن تمثيل مزدوجة القوى بقوتين متماكستين ومتوازيتين والاكتفاء برمز العزم (شكل 1-41) .



شكل 1-41

١ - ٣ - ٦ انتقال القوة بموازاة نفسها

إذا نقلت القوة P التي تؤثر على جسم صلب نقلاً موازياً على نفسها بمسافة قدرها l ابقيت شروط توازن القوى فقط محققة أما شرط توازن العزوم فيبقى بدون تحقيق (شكل 1-42) .



شكل 1-42

لشرح ذلك سوف يؤثر على جسم صلب ، حسب الشكل (1-42) ، بقوتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه ويحملها حامل واحد هما P^* و P - (محصلاتها معدومة) وقوازيان القوة P وتحقق فيها العلاقة التالية :

$$|P| = |P^*|$$

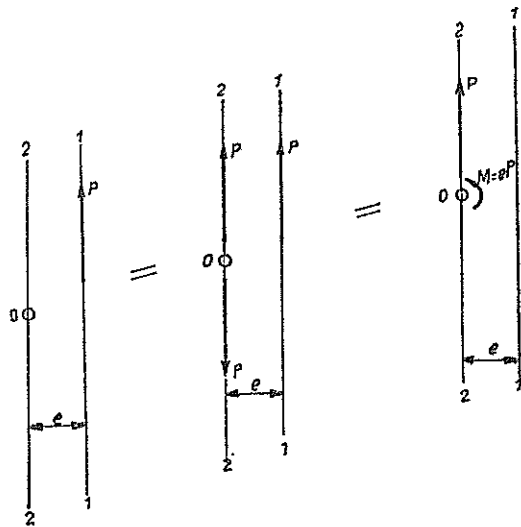
من الناحية الستاتيكية (السكونية) يبقى الجسم كما كان بدون تغير . بالامكان الآن إعادة P و P^* الى مزدوجة قوى

$$M = l P$$

أو

$$M = l \times P$$

إذاً يجب في حالة نقل القوة P نقلاً موازياً على نفسها بالمقدار e إضافة مزدوجة قوى قيمتها Pe وذلك لتعديل تغير العزوم وفي ذلك الحين تبقى حالة التوازن في الجسم محققة (بدون تغير) (شكل 1-44) .



شكل 1-44

١ - ٣ - ٧ شروط التوازن

أ - شروط التوازن التحليلية

تسيطر على جسم محمل، بمجموعة قوى مستوية ، حالة التوازن فقط عندما ينعدم مجموع مركبات القوى المؤثرة على الجسم باتجاهين وكذلك عندما ينعدم مجموع العزوم بالنسبة لأية نقطة ، ويعبر عن ذلك تحليلياً بواسطة المعادلات التالية :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0$$

$$\sum_{v=1}^n P_{yv} = 0$$

$$\sum_{v=1}^n M_{zv} = 0$$

أو بواسطة العلاقات الآتية (وذلك باختيار محاور احداثية افقية وشاقولية وأخذ القوى الأفقية H والقوى الشاقولية V بعين الاعتبار) :

$$\sum_{v=1}^n H_v = 0$$

$$\sum_{v=1}^n V_v = 0$$

$$\sum_{v=1}^n M_v = 0$$

لذلك يلزم لتوازن مجموعة قوى مستوية عامة تؤثر على جسم صلب ان تتحقق شروط التوازن الثلاثة المذكورة .

إذا تقاطعت حوامل جميع القوى في نقطة واحدة فإن شرط التوازن الثالث (شرط توازن العزوم)

$$\sum_{v=1}^n M_v = 0 \text{ محقق بالمطابقة.}$$

نتيجة :

تسيطر على جسم صلب تؤثر عليه مجموعة قوى مستوية عامة حالة التوازن عندما تتحقق الشروط الثلاثة التالية (شروط التوازن) :

- ١ - عندما ينعدم مجموع مركبات قوى المجموعة باتجاه الازديادي x (او باتجاه الافق H) .
 - ٢ - عندما ينعدم مجموع مركبات قوى المجموعة باتجاه الازديادي y (او باتجاه الشاقول V) .
 - ٣ - عندما ينعدم مجموع عزوم كل القوى المؤثرة على الجسم بالنسبة لاية نقطة .
- تسمى هذه الشروط بشروط توازن الجسم الصلب في المستوي .

ب - شروط التوازن التخطيطية :

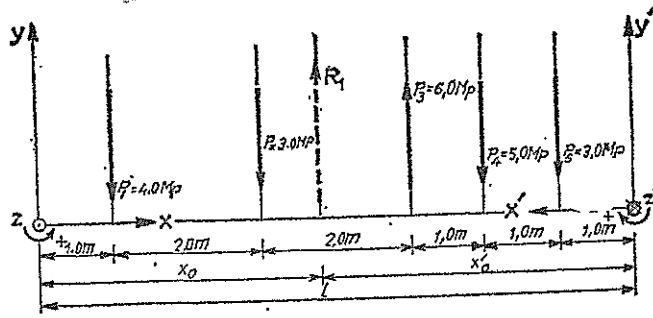
تتواجد مجموعة قوى مستوية عامة في حالة توازن عندما تنعدم محصلة القوى وكذلك عندما لا تكون لها محصلة عزوم (مزدوجات قوى) .

نتائج تركيب مجموعة القوى المستوية العامة :

- ١ - مجموعة القوى تعيد نفسها لقوة وحيدة (لها محصلة) .
- العلامة التخطيطية : مضلع القوى والمضلع الجلي مفتوحين . كلاهما قابلين للاغلاق .
- ٢ - مجموعة القوى تعيد نفسها لمزدوجة قوى .
- العلامة التخطيطية : مضلع القوى مغلق اما المضلع الجلي فمفتوح ولا يمكن اغلاقه في نقطة نهائية (في حالة كون القوتان متوازيتان يمكن اغلاقه في اللانهاية) .
- ٣ - مجموعة القوى موجودة في حالة توازن .
- العلامة التخطيطية : مضلع القوى والمضلع الجلي مغلقين .

مثال : 8 :

المعطى : مجموعة قوى مستوية متوازية (شكل 1-45) .



(شكل 1-45)

المطلوب : إيجاد محصلة مجموعة القوى بالطريقة التحليلية .

الحل :

لنثبت مجموعة النسب (مجموعة المحاور الاحداثية) x, y, z بحيث تقع مجموعة القوى في المستوي yx وفي نفس الوقت بحيث توازي المحور y . علاوة على ذلك سوف نثبت مجموعة نسب اخرى هي مجموعة المحاور الاحداثية x', y', z' (شكل 1-45) . باجراء الحساب على كلا المجموعتين تصبح في متناول اليد امكانية للتدقيق وهذا امر هام بالنسبة لكل مهندس . بسبب كون مجموعة القوى متوازية فيما بينها فان محصلتها هي ايضاً متوازية ولذلك يكفي لتثبيت مكانها تعيين x_0 او x'_0 .

$$R_y = -P_1 - P_2 + P_3 - P_4 - P_5 = -9,0 \text{ Mp}$$

$$M_R = x_0 R_y = \sum_{v=1}^5 x_v P_{yv} = -1,0 \cdot 4,0 - 3,0 \cdot 3,0 + 5,0 \cdot 6,0 - 6,0 \cdot 5,0 - 7,0 \cdot 3,0 = -34,0 \text{ Mpm}$$

$$M'_R = x'_0 R_y = \sum_{v=1}^5 x'_v P_{yv} = -1,0 \cdot 3,0 - 2,0 \cdot 5,0 + 3,0 \cdot 6,0 - 5,0 \cdot 3,0 - 7,0 \cdot 4,0 = -38,0 \text{ Mpm}$$

$$x_v = \frac{\sum_{v=1}^5 x_v P_{yv}}{R_y} = \frac{-34,0}{-9,0} = 3,78 \text{ m}$$

$$y_v = \frac{\sum_{v=1}^5 x'_v P_{yv}}{R_y} = \frac{-38,0}{-9,0} = 4,22 \text{ m}$$

التدقيق :

$$x_0 + x'_0 = 3,78 + 4,22 = 8,0 \text{ m}$$

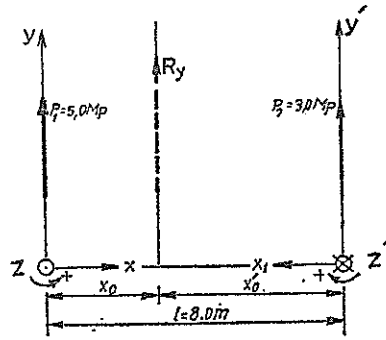
لقد اعطت نتائج الحسابات ما يلي :

تبلغ القيمة المطلقة للمحصلة $R=9,0 \text{ Mp}$ اما اتجاهها فهو بسبب الاشارة يعاكس اتجاه المحاور y و y' .

مثال 9 :

المعطى : مجموعة قوى تتألف من قوتين متوازيتين ولهما نفس الاتجاه وهما P_1 و P_2 (شكل 1-46) .

المطلوب : إيجاد محصلة القوتين P بالطريقة التحليلية .



(شكل 1-46)

الحل :

$$R_y = P_1 + P_2 = 5,0 + 3,0 = 8,0 \text{ Mp}$$

$$M_R = x_0 R_y = l P_2 \quad , \quad x_0 = \frac{l P_2}{R_y} = \frac{8,0 \cdot 3,0}{8,0} = 3,0 \text{ m}$$

$$M'_R = x'_0 R_y = l P_1 \quad , \quad y_0 = \frac{l P_1}{R_y} = \frac{8,0 \cdot 5,0}{8,0} = 5,0 \text{ m}$$

التدقيق :

$$x_0 + x'_0 = 3,0 + 5,0 = 8,0 \text{ m}$$

تقع المحصلة R بين القوتين وهي تقسم المسافة l بنسبة :

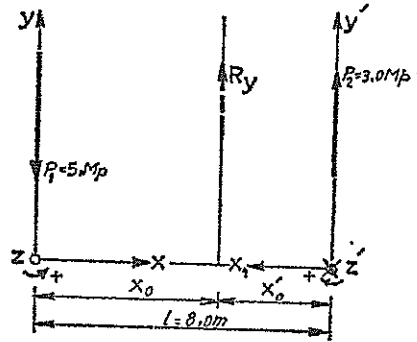
$$\frac{x_0}{x'_0} = \frac{P_2}{P_1}$$

إذا تم تخيل جسم صلب محمل بالقوى P_1 و P_2 وقابل للدوران على طول المحور المركزي فإن ذلك الجسم يتواجد في حالة توازن وذلك لأن :

$$x_0 P_1 = x'_0 P_2$$

مثال 10 :

المعطى : مجموعة قوى مستوية تتألف من قوتين متوازيتين ومتعاكستين هما P_1 و P_2 (شكل 1-47).
المطلوب : إيجاد محصلة مجموعة القوى بالطريقتين التحليلية والتخطيطية .



(شكل 1-47)

الحل :

الطريقة التحليلية لإيجاد المحصلة :

$$R_y = -P_1 + P_2 = -5,0 + 3,0 = -2,0 \text{ Mp}$$

$$M_R = x_0 R_y = l P_2 \quad ; \quad x_0 = \frac{l P_2}{R_y} = \frac{8,0 \cdot 3,0}{-2,0} = -12,0 \text{ m}$$

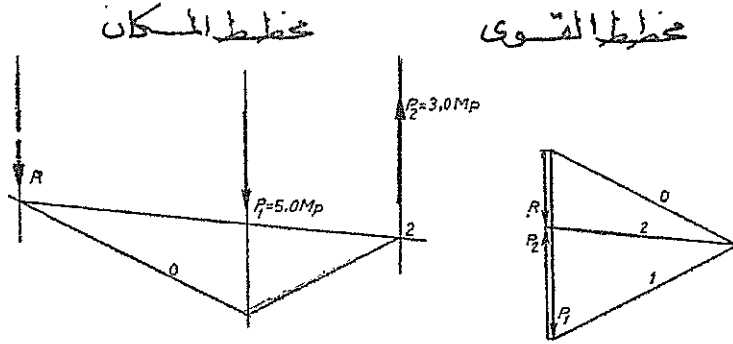
$$M'_R = x'_0 R_y = l P_1 \quad ; \quad x'_0 = \frac{l P_1}{R_y} = \frac{8,0 \cdot 5,0}{-2,0} = +20,0 \text{ m}$$

التدقيق :

$$x_0 + x'_0 = -12,0 + 20,0 = 8,0 \text{ m}$$

من نتائج الحسابات يتبين ان المحصلة تقع على يسار القوة P وعلى بعد $12,0\text{ m}$.
الطريقة التخطيطية لايجاد المحصلة :

لقد تم في الشكل (1-48) تعيين المحصلة . ان تقاطع الشعاعين الجليين 0 و 2 ، في مخطط المكان ، تحدد نقطة من حامل المحصلة .

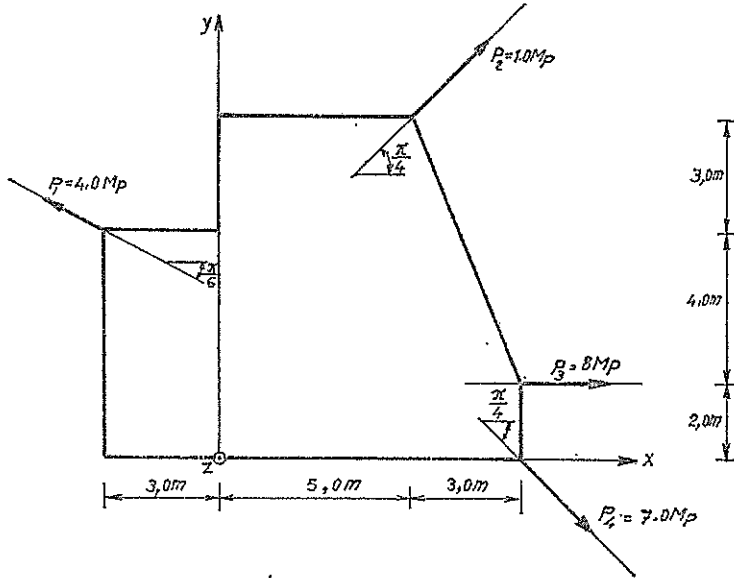


(شكل 1-48)

مثال 11 :

المعطى : مجموعة القوى المستوية P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 التي تؤثر على القرص الصلب (شكل 1-49) .

المطلوب : ايجاد محصلة مجموعة القوى بالطريقة التخطيطية .

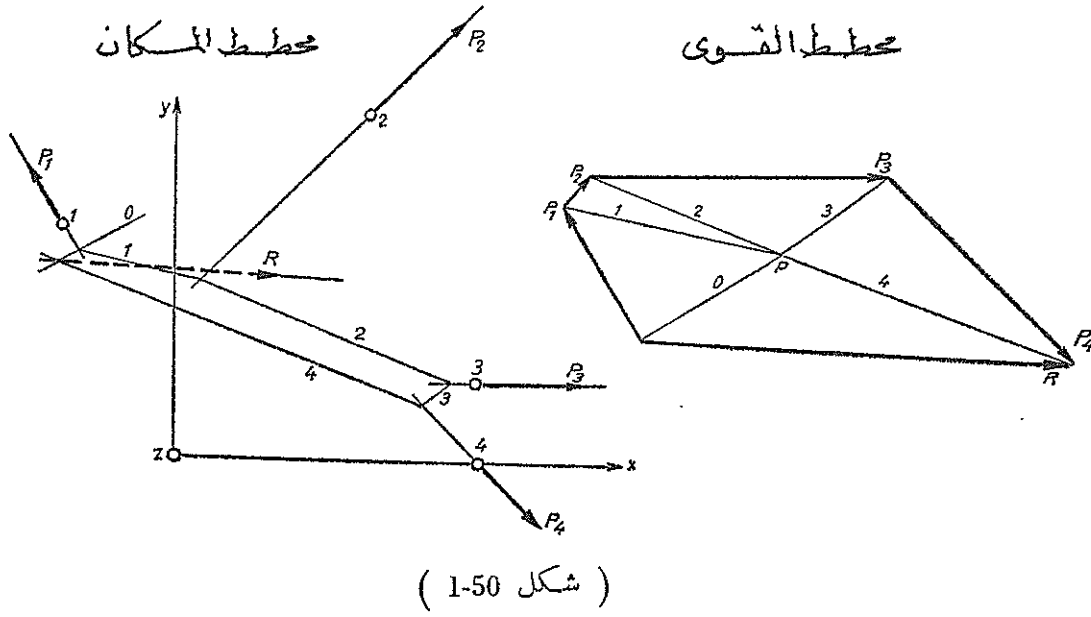


(شكل 1-49)

الحل :

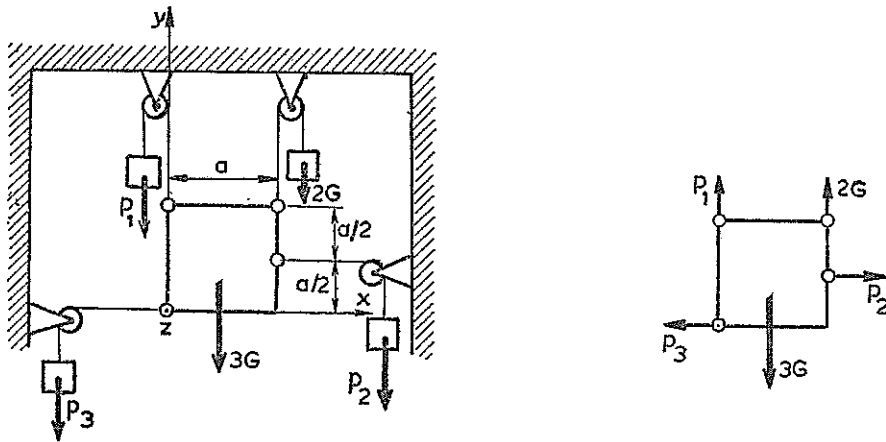
لقد تم في (الشكل 1-50) رسم مخطط القوى والمضلع الجلي وبواسطتها تم بعين المحصلة .

$$R = 11,683 \text{ Mp}$$



مثال 12 :

يبلغ وزن قرص 3G وتؤثر عليه القوى P_1 , P_2 , P_3 (شكل 1-51) .
المطلوب : إيجاد قيم القوى P_1 , P_2 , P_3 بحيث تسيطر على القرص حالة التوازن .



(شكل 1-51)

الحل :

تأخذ شروط التوازن في المستوي بعد التطبيق الشكل التالي :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 \quad : \quad -P_3 + P_1 = 0$$

$$\sum_{v=1}^n P_{yv} = 0 \quad : \quad P_1 + 2G - 3G = 0$$

$$\sum_{v=1}^n M_{zv} = 0 \quad : \quad 3G \frac{a}{3} - 2Ga + P_2 \frac{a}{2} = 0$$

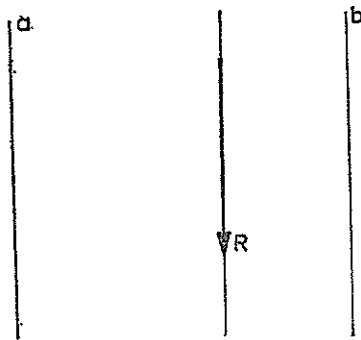
بحل هذه المعادلات يتم التوصل للمطلوب :

$$P_1 = P_2 = P_3 = G$$

مثال 13 :

المعطى : القوة R والحاملين a و b التي توازيها (شكل a 1-52) .

المطلوب : إيجاد القوتين A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن والتي علمت حواملها a و b الموازية للقوة R .



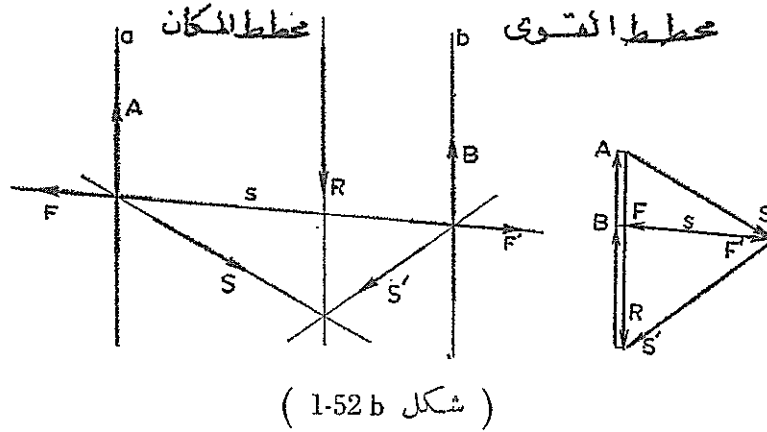
شكل a 1-52

الحل :

تخطيطياً :

ليستعاض عن القوة R بقوتين ما تكافئها ولكن S و S' (ان حاملي القوتين S و S' هما كيانان) شكل (1-52b) ولتنفذ هذه الاستعاضة في مخطط المكان ، بذلك فان نقاط تقاطعها مع الحوامل a و b هي التي تحدد المستقيم s . لتتحقق ، عند نقطة تقاطع المستقيمين s و a حالة التوازن بين القوة S والقوتين A و F وكذلك عند نقطة تقاطع المستقيمين s و b حالة التوازن بين القوة S' والقوتين B و F' وذلك بحيث تنطبق F و F' على المستقيم s وبذلك تفانى القوى F و F' مع بعضها .

تشكل القوى A و B التي تم الحصول عليها في مخطط القوى مع القوة R حالة التوازن وبالإمكان نقلها الى مخطط المكان .



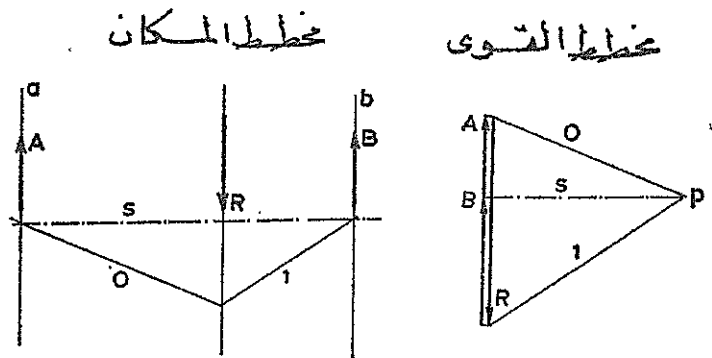
الخطوات المتبعة في الحل :

يستعاض في البداية عن القوة المعطاة R بركبتها S و S' بعد ذلك يحدد خط الاغلاق s ، في مخطط المكان . اما نقله الى مخطط القوى فيحدد القوى المطلوبة A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن .

يعتبر الطريق التخطيطي المتبع في الشكل (1-52 b) لتحديد A و B معكوس الطريقة التي تم شرحها في الفقرة ٣-٣-٢ والتي تم بواسطتها إيجاد محصلة مجموعة قوى مستوية متوازية باستخدام مخطط القوى والمضام الجبلي .

دون رسم اسمهم القوى S و S' وكذلك F و F' يختار ، في مخطط القوى ، القطب P كنقطة ما . بعد ذلك يرسم الشعاعين القطبيين 0 , 1 ثم تنقل الى مخطط المكان (شكل 153) .

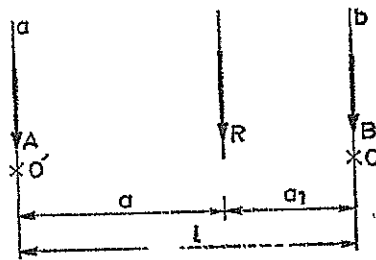
يحدد خط الاغلاق s ، في مخطط القوى ، القوتين المطابوتين A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن .



شكل 1-53

تحليلياً :

للتمكن من معالجة المشكلة تحليلياً ينبغي اللجوء الى شروط التوازن العامة (شكل 1-54)



(شكل 1-54)

فبتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة O ينتج :

$$\Sigma M_O = 0 : Al + R a' = 0 ; A = -R \frac{a'}{l}$$

وبتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة O' ينتج :

$$\Sigma M_{O'} = 0 : Bl + R a = 0 ; B = -R \frac{a}{l}$$

بالاستعانة بشرط توازن القوى باتجاه المحور y يتم تدقيق النتيجة والتأكد من صحتها :
التدقيق :

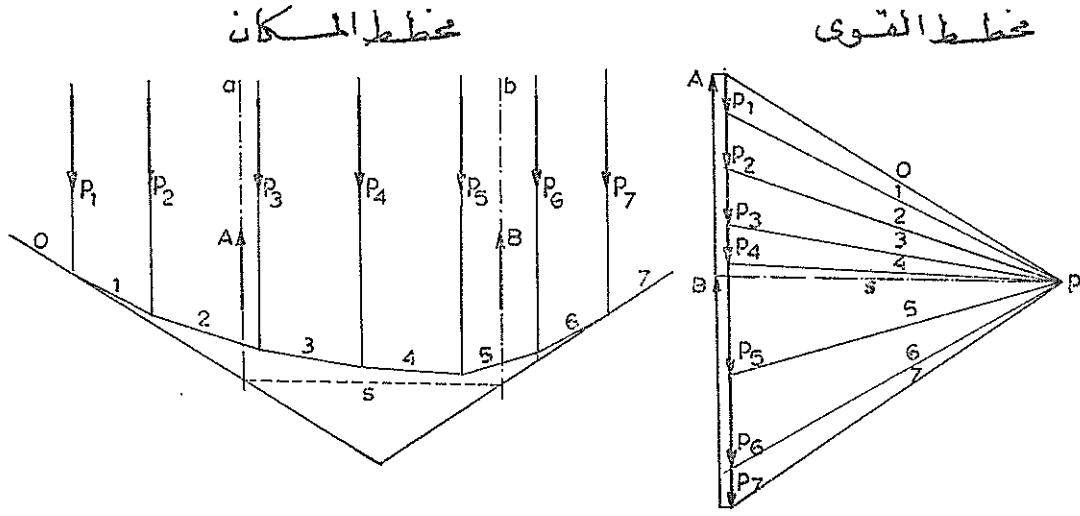
$$\sum P_{yv} = 0 : -R \frac{a'}{l} - R \frac{a}{l} + R = R \left(-\frac{a+a'}{l} + 1 \right) = 0$$

مثال 14 :

المعطى : الحوامل a و b ومجموعة القوى $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ (شكل 1-55) .

المطلوب : إيجاد القوتين A و B التي علمت حواملها a و b والتي تشكل مع مجموعة القوى المعطاة حالة التوازن .

الحل :



(شكل 1-55)

ان موضع محصلة مجموعة القوى ، في مخطط المكان ، يحدد بنقطة تقاطع الشعاع الجبلي الاول 0 والشعاع الجبلي الاخير 7 . بواسطة خط الاغلاق s ، في مخطط المكان ، يتم تعيين القوى المطلوبة A و B بحيث يكون الشرط :

$$(A, B, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7) = 0$$

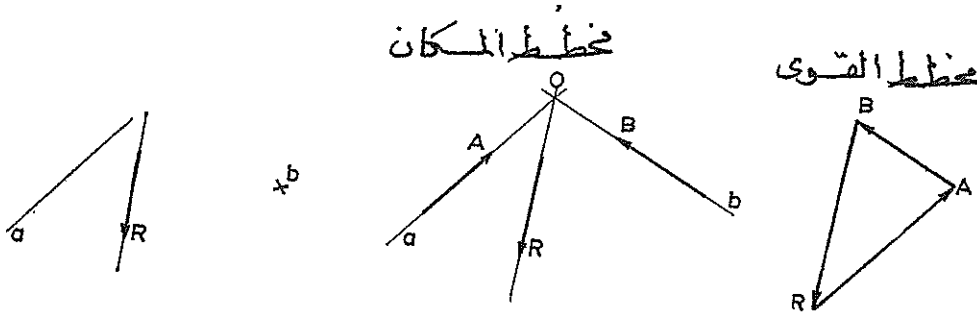
محققاً .

مثال 15 :

المعطى : القوة R والحامل a (حامل القوة A) والنقطة b (نقطة يمر منها حامل القوة B) (شكل 1-56) .

المطلوب : تعيين القوى A و B التي تشكل مع القوة R حالة التوازن .

الحل :



شكل 1-56

شكل 1-57

١ - تعيين في البداية نقطة تقاطع حامل القوة R والحامل a ولتكن هي النقطة 0 بعد ذلك توصل النقطة 0 مع النقطة b لتعيين حامل القوة B .

٢ - بالاستعانة بالنقطة 0 يتم تعيين القوى A و B بحيث تنطبق القوة A على الحامل a وبحيث يمر حامل القوة B من النقطة b (شكل 1-57) .

مثال 16 :

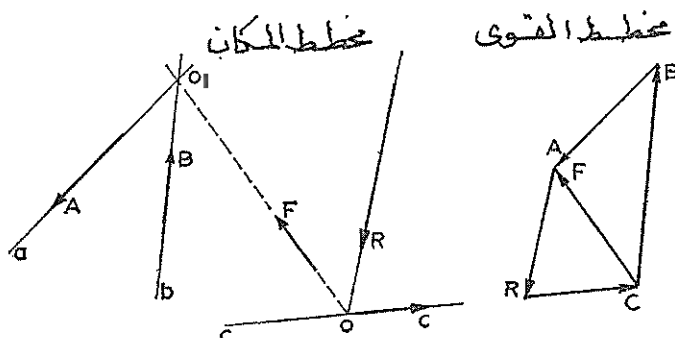
المطلوب : تعيين القوى A , B , C التي تشكل مع القوة R حالة التوازن والتي اعطيت حواملها a , b , c شريطة ان لا يتوازي اكثر من حاملين للقوى الاربعة (شكل 1-58) .

الحل :

١ - تمدد ، في مخطط المكان ، حوامل كل قوتين (في الحالة المدروسة a مع b وكذلك c مع R) حتى تتقاطع مع بعضها وبذلك يتم التوصل للنقاط 0 و $0'$.

٢ - تحقق، في النقطة 0 ، حالة التوازن بين القوى R و C وبين القوة المساعدة F بحيث تنطبق القوة C على c وبحيث تمر القوة F من $0'$.

٣ - ليستعاض عن المحصلة الجزئية F (انقوة المساعدة) في النقطة O بقوى تكافئها وهي A و B . بذلك فإن القوى A و B و C التي تم الحصول عليها تشكل مع القوة R مجموعة متوازنة . تعود هذه الطريقة التخطيطية لموجودها العالم كولمان (Carl CULMANN) .

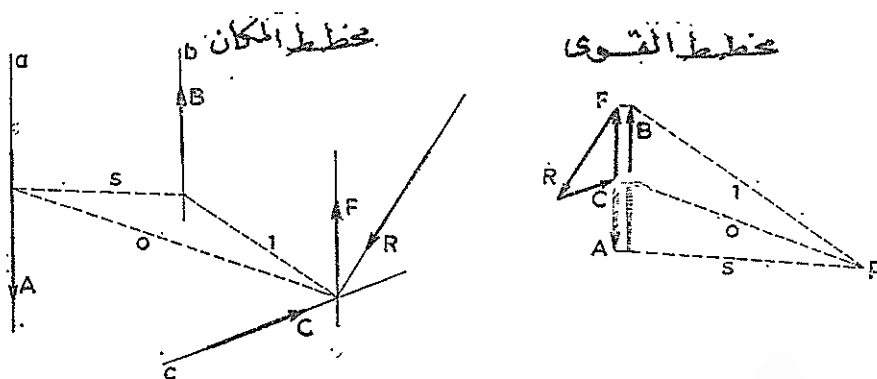


شكل 1-58

حالة خاصة :

إذا كان اتجاهان من الاتجاهات المعطاة ، وليكن الاتجاهان a و b ، متوازيين (شكل 1-59) . فبالإمكان علاوة على الطريقة التي تم اتباعها لتعيين القوى A و B و C أيضاً جعل القوة R تتوازن مع القوى C و F . ينبغي أن تكون القوى F موازية للحوامل a و b . تحلل المحصلة الجزئية F إلى القوتين A و B . للقيام بذلك نختار، في مخطط القوى ، النقطة P كقطب ثم نرسم الأشعة القطبية والأشعة الجبلية $0, 1$. عندئذ يحدد خط الإغلاق s القوى A و B ، في مخطط القوى .

تشكل القوى A و B و C التي تم إيجادها مع القوة R حالة التوازن .



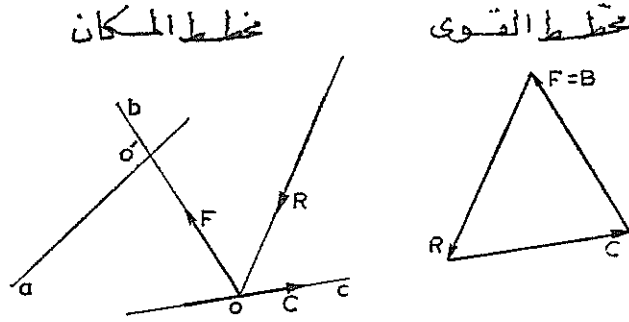
شكل 1-59

(دار)

(دار)

حالة خاصة :

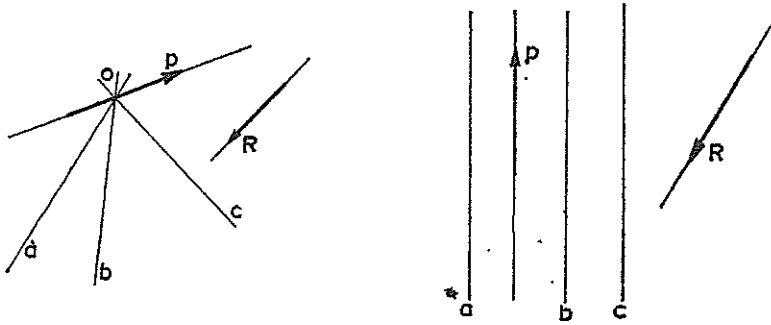
إذا تقاطعت الحوامل b و c على حامل القوة R (شكل 1-60) عند ذلك تنطبق المحصلة الجزئية \vec{F} على الحامل b وبذلك تنكافئ القوة B مع القوة المساعدة (المحصلة الجزئية) F كما وان القوة A تأخذ قيمة الصفر .



شكل 1-60

ان مسألة تحقيق حالة التوازن بين قوة معطاة وبين ثلاثة قوى علمت حواملها هي مسألة غير مقررة مستاتيكيًا وذلك عندما تقاطع كافة الحوامل الثلاثة في نقطة واحدة تقع على حامل القوة R .

في حاله كون نقطة التقاطع المشتركة واقعة على حامل القوة R ولكن في اللانهاية ، أي ان كافة القوى هي متوازية ، عندئذ لا يوجد حل وحيد (eindeutige Lösung) .



شكل 1-61

شكل 1-62

من اجل الحالة التى تكون فيها الحوامل كما في الشكل (1-61) لا يستطيع تحقيق التوازن وذلك لان اية محصلة R للقوى A و B و C تمر من النقطة المشتركة O كما ولا يمكنها ان تشكل ابداً مع القوة R قوة متعاكسة . ينطبق نفس التفكير على الشكل (1-62) ايضاً وذلك لان نقطة التقاطع O (بسبب توازي الحوامل) تقع في اللانهاية .

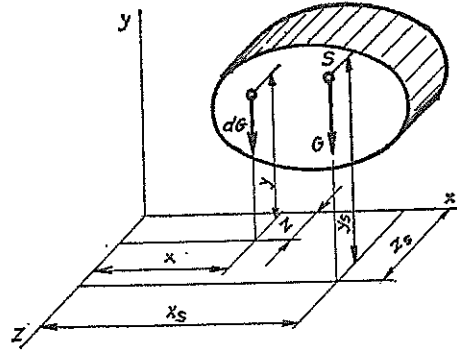
الفصل الثاني

مركز ثقل الجسم المتجانس

٢ - ١ مفهوم مركز الثقل

تشير التجارب الى ان الجسم المعلق من نقطة ما لا يأخذ وضع التوازن الا عندما يختار مركز ثقله s نقطة التعليق .

لتعيين احداثيات مركز الثقل s سوف يطبق شرط توازن العزم . لاجراء ذلك سوف يتخيل تجزيء الجسم الى اجزاء صغيرة وزن كل منها dG وهو شاقولي وينطبق ، في الحالة المدروسة على المحور y ويؤثر في النقطة ذات الاحداثيات y و z (شكل 2-1) .



شكل 2-1

يرمز لعزم القوة dG بالنسبة للمحور z بالرمز dM_z وهو يساوي :

$$d M_z = - x d G \quad (2-1)$$

(لقد وضعت اشارة السالب لتعكس اتجاه شعاع العزم واتجاه المحور z) .

كما يرمز لعزم القوة dG بالنسبة للمحور x بالرمز dM_x وهو يساوي :

$$d M_x = z d G \quad (2-2)$$

(لقد وضعت اشارة الموجب لتطابق اتجاه شعاع العزم واتجاه المحور x) .

ان العزم الكلي لجميع العناصر الجسمية يساوي مجموع (تكامل) العزوم الجزئية :

$$M_z = - \int_V x d G \quad \text{و} \quad M_x = \int_V z d G \quad (2-3)$$

يشير الحرف V تحت التكامل الى امتداد التكامل على كامل حجم الجسم .

ان القوة الموجودة في نقطة التعليق (قوة التعليق) ذات الاحداثيات x و y و z تساوي (حسب شرط توازن القوى) الوزن الكلي :

$$G = \int d G \quad (2-4)$$

بتطبيق شرط توازن العزوم على قوى العناصر الجسمية وعلى قوة التعليق ، ينتج :

$$x_s G = \int_V x d G \quad \text{و} \quad z_s G = \int_V z d G \quad (2-5)$$

من هاتين العلاقتين يتم التوصل للعلاقات التي تعطي احداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{1}{G} \int_V x d G = \frac{\int_V x d G}{\int_V d G} \quad , \quad z_s = \frac{1}{G} \int_V z d G = \frac{\int_V z d G}{\int_V d G} \quad (2-6)$$

وبنفس الافكار يتم التوصل للاحداثي الثالث ، وذلك عندما يتخيل أن الجسم قد دار بحيث ينطبق المحور z ، مثلاً على اتجاه الشاقول (الذي يمثل اتجاه الوزن dG) :

$$y_s = \frac{1}{G} \int_V y d G = \frac{\int_V y d G}{\int_V d G} \quad (2-7)$$

تسمى التكاملات :

$$\int_V x \, dG \quad , \quad \int_V y \, dG \quad , \quad \int_V z \, dG \quad (2-8)$$

بالغزوم الستاتيكية للجسم ، أما G فيرمز لوزن الجسم وهو يساوي :

$$G = \gamma \cdot V = g \cdot m \quad (2-9)$$

حيث أن γ هو الوزن النوعي لمادة الجسم كما أن V هو حجم الجسم وأن g هو التسارع الأرضي و m هي كتلة الجسم . بذلك تصبح علاقات تعيين إحداثيات مركز ثقل جسم كما يلي :

$$\left. \begin{aligned} x_g &= \frac{\int_V x \, dG}{\int_V dG} = \frac{\int_V x \, dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V x \, \gamma \, dV}{\int_V \gamma \, dV} \\ y_g &= \frac{\int_V y \, dG}{\int_V dG} = \frac{\int_V y \, dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V y \, \gamma \, dV}{\int_V \gamma \, dV} \\ z_g &= \frac{\int_V z \, dG}{\int_V dG} = \frac{\int_V z \, dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V z \, \gamma \, dV}{\int_V \gamma \, dV} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

٢ - ٢ مركز ثقل الاجسام :

إن أهم حالة خاصة هي حالة كون الوزن النوعي للجسم لا يتعلق بالمكان وبذلك تصبح العلاقات (2-10) كما يلي :

$$x_g = \frac{\int_V x \, dV}{V} \quad ; \quad y_g = \frac{\int_V y \, dV}{V} \quad ; \quad z_g = \frac{\int_V z \, dV}{V} \quad (2-11)$$

من هذه العلاقات يتبين أن إحداثيات مركز الثقل لا تتعلق بنوع المادة وإنما تتعلق فقط من الشكل الهندسي للجسم . وبهذا فإن مركز الثقل هو نقطة هندسية بحتة .

عندما يقسم جسم حجمه V إلى n جسم جزئي حجم كل منها هو V_v (حيث أن $v=1, 2, \dots, n$) وذلك بحيث يكون :

$$V = \sum_{v=1}^n V_v$$

عندئذ يتم التوصل، بعد الاستعانة بإحداثيات مركز ثقل الجسم الجزئي ذو الرقم n التالية :

$$x_{sv} = \frac{\int x dV}{V_v} \quad ; \quad y_{sv} = \frac{\int y dV}{V_v} \quad ; \quad z_{sv} = \frac{\int z dV}{V_v}$$

$$v = 1, 2, \dots, n$$

وذلك بتبديلها في تكاملات العلاقة (2-11) :

$$\int_V x dV = \int_{V_1} x dV + \int_{V_2} x dV + \dots + \int_{V_n} x dV =$$

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_n V_n = \sum_{v=1}^n x_v V_v$$

$$\int_V y dV = \int_{V_1} y dV + \int_{V_2} y dV + \dots + \int_{V_n} y dV =$$

$$y_1 V_1 + y_2 V_2 + \dots + y_n V_n = \sum_{v=1}^n y_v V_v$$

$$\int_V z dV = \int_{V_1} z dV + \int_{V_2} z dV + \dots + \int_{V_n} z dV =$$

$$z_1 V_1 + z_2 V_2 + \dots + z_n V_n = \sum_{v=1}^n z_v V_v$$

إلى إحداثيات مركز ثقل الجسم الكلي (العلاقة 2-11) بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{\sum_{v=1}^n x_v V_v}{V} \\ y_s &= \frac{\sum_{v=1}^n y_v V_v}{V} \\ z_s &= \frac{\sum_{v=1}^n z_v V_v}{V} \end{aligned} \right\} (2-12)$$

تستخدم العلاقات (2-12) لتحديد مركز ثقل جسم يتألف من عدة أجسام جزئية علمت مراكز ثقلها دون اللجوء للتكاملات .

يمكن أيضاً استخدام العلاقات (2-12) لحساب مركز ثقل جسم يحتوي على فجوات شريطة اعتبار القيم التابعة لأجزاء الجسم المملوء موجبة واعتبار القيم العائدة للفجوات سالبة .
لأجراء تطبيق العلاقات (2-12) يفضل إتباع المخطط الحسابي التالي :

v	x_v	y_v	z_v	V_v	$x_v V_v$	$y_v V_v$	$z_v V_v$
الوحدة	m	m	m	m ³	m ⁴	m ⁴	m ⁴
1							
2							
⋮							
v							
⋮							
n							
Σ	+	+	+	V=...	---	---	---

$$x_s = \frac{\sum_{v=1}^n x_v V_v}{V} = \dots, \quad y_s = \frac{\sum_{v=1}^n y_v V_v}{V} = \dots, \quad z_s = \frac{\sum_{v=1}^n z_v V_v}{V} = \dots$$

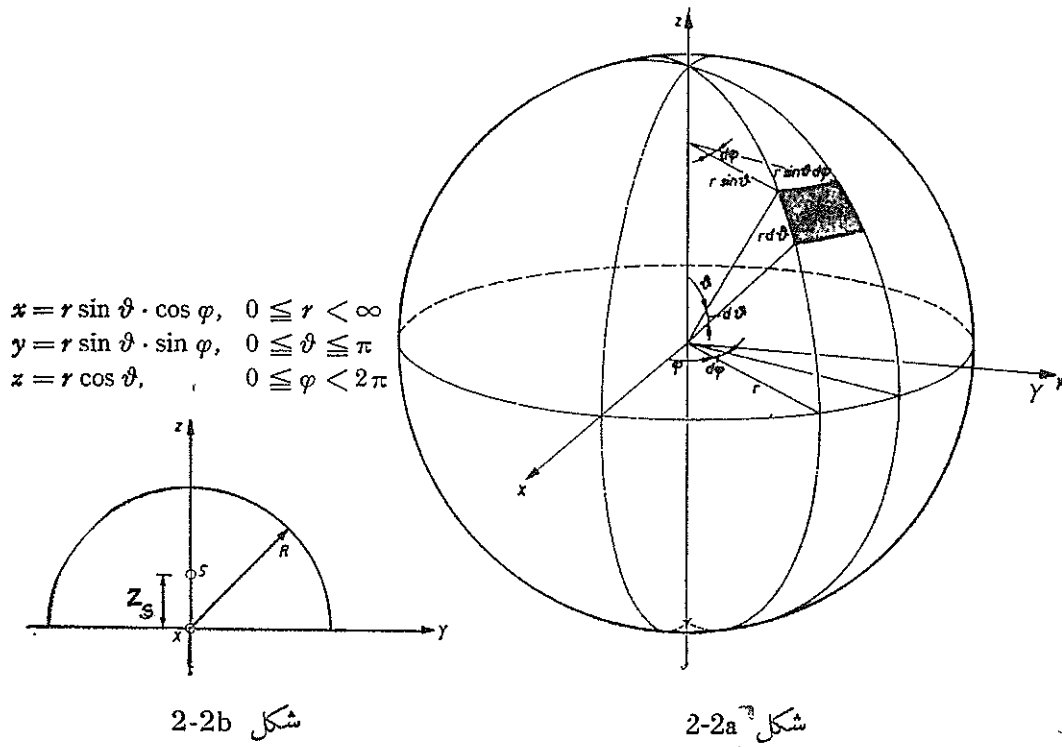
٢ - ٢ - ١ أمثلة

مثال 17 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل نصف كرة نصف قطرها R (شكل 2-2a) .

الحل :

باستخدام إحداثيات كروية (Kugelkoordinaten) r, ϑ, φ تتحقق فيها العلاقات التالية :



عندئذ يتم ، من الشكل (2-2b) ، التوصل من أجل عنصر من السطح المغلف الى العلاقة التالية:

$$dF = r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta d\varphi$$

ومن أجل عنصر حجمي إلى العلاقة الآتية :

$$dV = r^2 \sin \vartheta \cdot dr d\vartheta d\varphi$$

بالاستعانة. بالتكاملات التي تحتويها العلاقة (٢ - ١١) :

$$\begin{aligned}
 V &= \int_V dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot \left(-\cos \vartheta \right) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^3}{3}, \\
 \int_V x dV &= \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi = 0, \\
 \int_V y dV &= \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0, \\
 \int_V z dV &= \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left(-\frac{1}{4} \cos 2\vartheta \right) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{4}
 \end{aligned}$$

يتم تعيين إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = y_s = 0 \quad , \quad z_s = \frac{3R}{8}$$

مثال 18 :

لقد اقتطعت من نصف كرة كبيرة قطرها R نصف كرة صغيرة نصف قطرها r، (شكل 2-3).

المطلوب : إيجاد إحداثيات مركز ثقل الجسم المتبقي بالنسبة لمجموعة إحداثيات ينطبق فيها المستوى yx على مستوى الدائرة الرئيسية المشتركة كما ويمر فيها المحور z من مركز نصف الكرة الكبيرة .

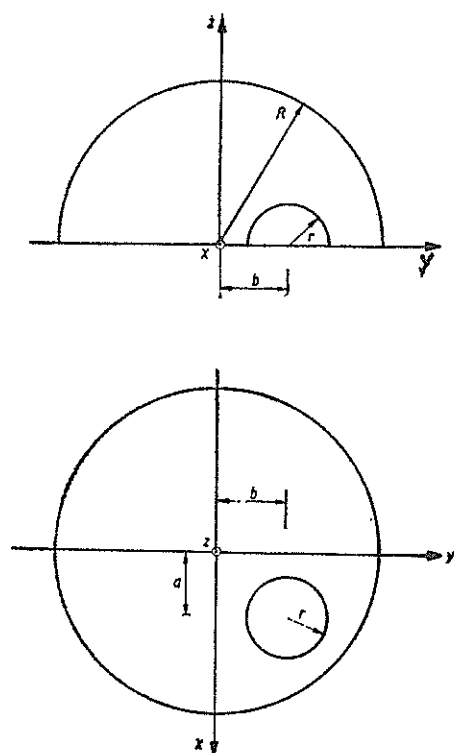
الحل :

الحجوم الجزئية ومراكز الثقل الجزئية :

$$V_1 = \frac{2R^3\pi}{3} \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad z_1 = \frac{3R}{8}$$

$$V_2 = -\frac{2r^3\pi}{3} \quad , \quad x_2 = a \quad , \quad y_2 = b \quad , \quad z_2 = \frac{3r}{8}$$

بإستخدام العلاقة (2-12) يتم التوصل لإحداثيات مركز الثقل :



شکل 2-3

$$x_s = \frac{0 - a \frac{2 r^3 \pi}{3}}{\frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)} = - \frac{a r^3}{(R^3 - r^3)}$$

$$y_s = \frac{0 - b \frac{2 r^3 \pi}{3}}{\frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)} = - \frac{b r^3}{(R^3 - r^3)}$$

$$z_s = \frac{\frac{3\pi}{8} \frac{2 R^3 \pi}{3} - \frac{3 r}{8} \frac{2 r^3 \pi}{3}}{\frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)} = \frac{3}{8} \frac{(R^4 - r^4)}{(R^3 - r^3)}$$

مثال 19 :

المطاب : تعیین مرکز ثقل جسم دورانی (Rotationskörper) (شکل 2.4) یشکل منحنیه الطولي (Meridiankurve) التابع $f(z)$.

الحل :

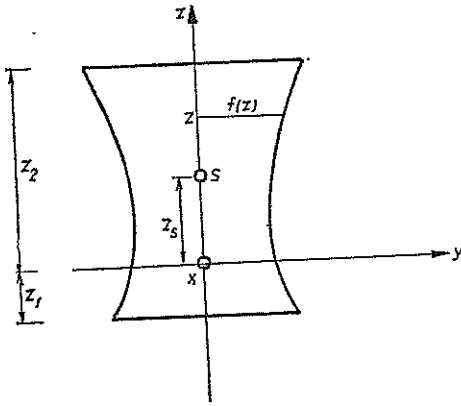
باستخدام إحداثيات اسطوانية (Zylinderkoordinaten) z, φ, r تتحقق فيها العلاقات التالية :

$$x = r \cos \varphi, \quad 0 \leq r < \infty$$

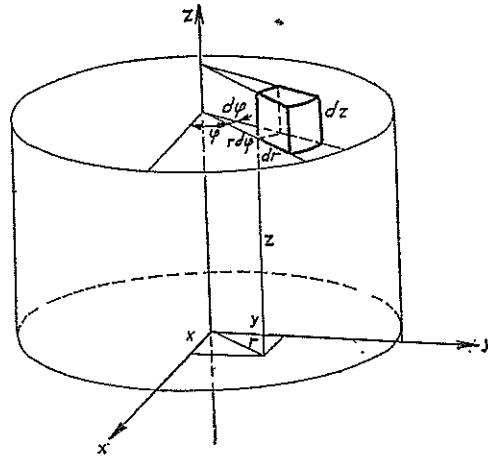
$$y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

عندئذ تبلغ مساحة عنصر من السطح المغلف ، حسب الشكل (2-5) ، القيمة التالية :

$$dF = r d\varphi dz$$



شكل 2-4



شكل 2-5

كما يبلغ حجم عنصر حجمي القيمة التالية :

$$dV = r dr d\varphi dz$$

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (2-11) :

$$V = \int_V dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(z)]^2 dz$$

$$\int_V x dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi = 0$$

$$\int_V y \, dV = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^{f(z)} r^2 \, dr \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0$$

$$\int_V z \, dV = \int_{z_1}^{z_2} z \, dz \int_0^{f(z)} r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi \int_{z_1}^{z_2} z [f(z)]^2 \, dz$$

يتم تعيين إحداثيات مركز ثقل الجسم الدوراني :

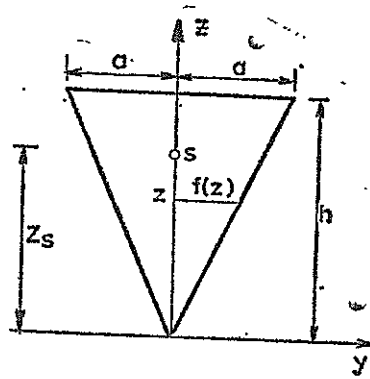
$$x_s = y_s = 0 \quad , \quad z_s = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z [f(z)]^2 \, dz}{\int_{z_1}^{z_2} [f(z)]^2 \, dz}$$

إذا شكل الجسم الدوراني مخروطاً دائرياً مستقيماً ارتفاعه h ونصف قطره a (شكل 2-6) ، عندئذ يتم بالاستعانة بمعادلة المنحني الطولي (هنا خط مستقيم) :

$$f(z) = \frac{a}{h} z$$

التوصل لإحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = y_s = 0 \quad , \quad z_s = \frac{3h}{4}$$



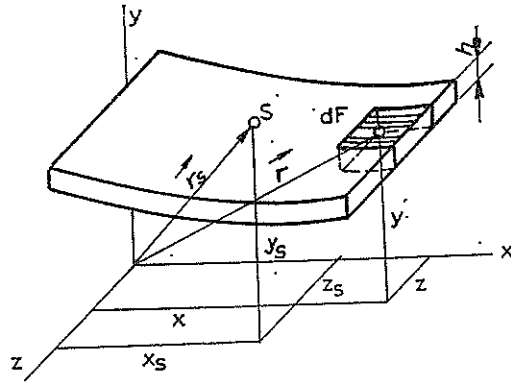
شكل 2-6

٢ - ٣ مركز ثقل جسم سطحي :

يقال عن الجسم أنه سطحي عندما يكون بعددين من أبعاده (الطول والعرض مثلاً) أكبر بكثير من بعده الثالث (السماكة مثلاً) . من الاجسام السطحية ماهو مستوي [كالصفحة (البلاطة) والقرص (لوح) مثلاً] ومنها ماهو منحنى (كالقشرية) .

إن حجم العنصر الحجمي المدروس هو $dV = h dF$. يمكن للسماكة h أن تتغير بتغير إحداثي السطح الاوسط r (شكل 2-7) . بذلك تصبح علاقة إيجاد احداثيات مركز الثقل كما يلي:

$$r_g = \frac{\int_F h r dF}{\int_F h dF} \quad (2-14)$$



شكل 2-7

أما مركز ثقل سطح (الذي يعتبر حالة خاصة) فيمكن حسابه كما يلي :

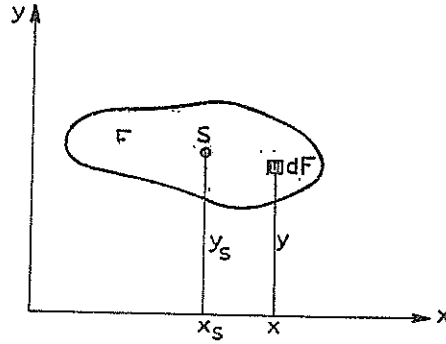
$$r_g = \frac{\int_F r dF}{\int_F dF} \quad (2-15)$$

وبالتمثيل الاحداثي :

$$x_s = \frac{\int x dF}{F} , \quad y_s = \frac{\int y dF}{F} , \quad z_s = \frac{\int z dF}{F} \quad (2-16)$$

إذا وقع السطح في مستوي واحد ، على سبيل المثال المستوي المتشكل من المحورين x و y (شكل 2-8) فإن احداثيات مركز الثقل تحسب بواسطة العلاقات التالية :

$$x_s = \frac{\int x dF}{F} \quad \text{و} \quad y_s = \frac{\int y dF}{F} \quad (2-17)$$

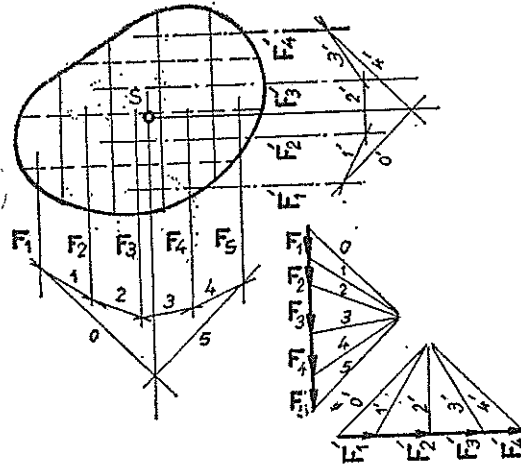


شكل 2-8

يمكن أيضاً تعيين مركز ثقل السطوح بطريقة تخطيطية وذلك كما يلي :

- ١ - يجرىء السطح المدروس بواسطة مستويات متوازية الى شرائح سطحية .
- ٢ - ترسم مساحة كل شريحة بعد تمثيلها بقوة حاملها يوازي مستوي القطع ونقطة تطبيقها هي مركز ثقل الشريحة التابعة لها . بذلك يتم التوصل الى قوى متتالية وتقع على مستقيم واحد .
- ٣ - تختار نقطة ما وتعتبر قطباً لمجموعة القوى، وبعد ذلك ترسم الأشعة القطبية والأشعة الجبلية.
- ٤ - بالاستعانة بالمضلع الجبلي يتم تعيين محصلة مجموعة القوى ، حيث ان حامل هذه المحصلة

يمثل محلاً هندسياً لمركز ثقل السطح، أي أن حامل المحصلة هو خط مركزي (يمر من ثقل السطح).
 بأجراء الطريقة المذكورة على اتجاهين (في أغلب الحالات اتجاهين متعامدين) يتم تعيين مركز
 ثقل السطح الممثل بنقطة تقاطع حوامل المحصلتين (شكل 9-2).



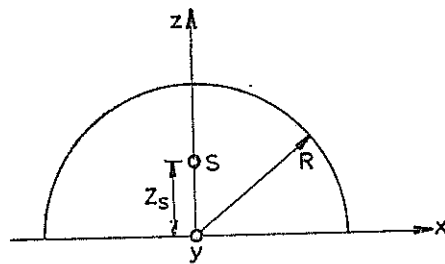
شكل 9-2

يسمى كل خط يمر من مركز ثقل الجسم خطاً مركزياً. تحدد نقطة تقاطع خطين مركزيين
 مركز الثقل. أن محاور التناظر لسطح ما، هي دائماً محاور مركزية وذلك لأن محصلة مجموعة
 قوى متناظرة تقع دائماً على محور تناظر المجموعة. بالاستفادة من هذه الخاصية يصبح من
 الممكن، فوراً ودون اللجوء إلى الحساب، إيجاد مراكز ثقل السطوح التي لها محوري تناظر.
 أو أكثر كما هو الحال في المربع والمستطيل والدائرة والمثلث متساوي الاضلاع والخ.

٢ - ٣ - ١ أمثلة :

مثال 20 :

المطلوب : حساب مركز ثقل نصف كرة (شكل 10-2).



شكل 10-2

الحل :

باستخدام احداثيات كروية فان مساحة العنصر السطحي تبلغ :

$$dF = R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot q\varphi$$

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (2-16) :

$$\begin{aligned} F = \int_F dF &= R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 (-\cos \vartheta) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R^2, \\ \int_F x dF &= R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi = 0, \\ \int_F y dF &= R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0, \\ \int_F z dF &= R^3 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^3 (-\frac{1}{4} \cos 2\vartheta) \Big|_0^{\pi/2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi R^3 \end{aligned}$$

يتم تعيين احداثيات مركز الثقل :

$$x_g = y_g = 0, \quad z_g = \frac{R}{2}$$

مثال 21 :

المطلوب : حساب مركز ثقل مستطيل (شكل 2-11)

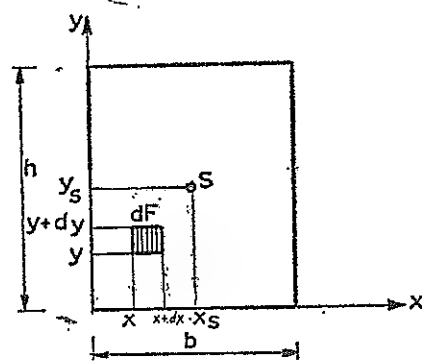
الحل :

تبلغ مساحة العنصر السطحي القيمة التالية :

$$dF = dx dy$$

بالاستعانة بالتكاملات الموجودة في العلاقة (2-17) :

$$\begin{aligned} F = \int_F dF &= \int_0^b dx \int_0^h dy = x \Big|_0^b \cdot y \Big|_0^h = bh, \\ \int_F x dF &= \int_0^b x dx \int_0^h dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^b \cdot y \Big|_0^h = \frac{b^2 h}{2}, \\ \int_F y dF &= \int_0^b dx \int_0^h y dy = x \Big|_0^b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{bh^2}{2} \end{aligned}$$



شكل 2-11

يتم تعيين إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{b}{2} \quad , \quad y_s = \frac{h}{2}$$

مثال 22 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل السطح المحصور بين المحور x وبين التابع $f(x)$ (شكل 2-12) .

الحل :

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (2-17) :

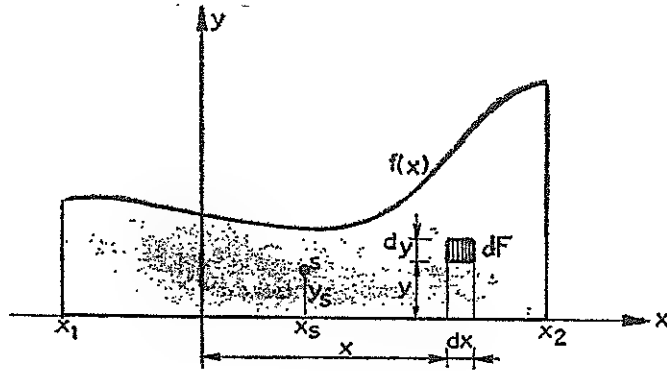
$$F = \int_{\hat{F}} dF = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f(x)} dy = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\int_{\hat{F}} x dF = \int_{x_1}^{x_2} x dx \int_0^{f(x)} dy = \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx$$

$$\oint \int_{\hat{F}} y dF = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{f(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx$$

يتم حساب إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx} \quad \text{و} \quad y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}$$



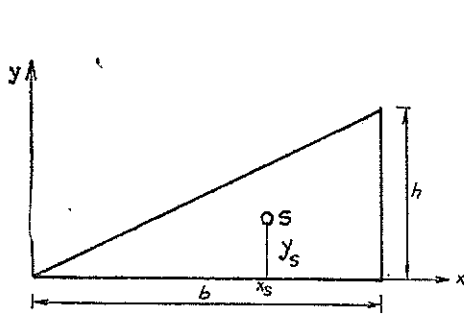
شكل 2-12

إذا شكل السطح المدرس مثلثاً قائم الزاوية ، قاعدته b وارتفاعه h (شكل 2-18) عندئذ يتم التوصل ، بالاستعانة بمعادلة المستقيم :

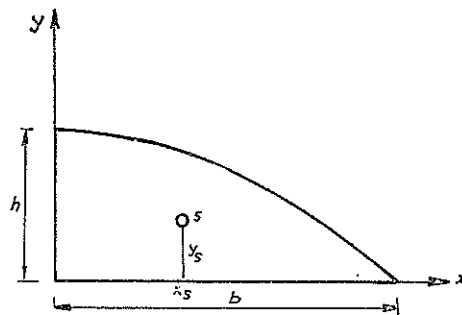
$$f(x) = \frac{h}{b} x$$

إلى إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{2b}{3} \quad \text{و} \quad y_s = \frac{h}{3}$$



شكل 2-18



شكل 2-19

أما إذا كان المنحني المدروس قطعاً مكافئاً (شكل 19-2) وكان تابعه هو :

$$f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

وكانت مساحة القطع المكافئ هي :

$$F = \frac{2 b h}{3}$$

فإن إحداثيات مركز الثقل هي :

$$x_s = \frac{3b}{8} \quad \text{و} \quad y_s = \frac{2h}{3}$$

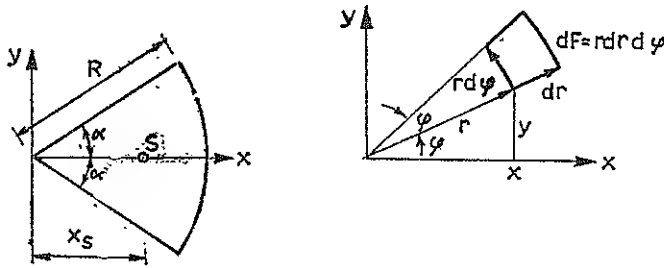
مثال 23 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل قطعة دائرية (Kreisausschnitt) (شكل 20-2) .

الحل :

باستخدام الاحداثيات القطبية r, φ التي تتحقق فيها العلاقات التالية :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$



شكل 20-2

وبالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (17-2) :

$$F = \int_F dF = \int_0^R r dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\varphi = R^2 \alpha ,$$

$$\int_F x dF = \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{2 R^3}{3} \sin \alpha ,$$

$$\int_F y dF = \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0 .$$

يتم حساب إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} \quad \text{و} \quad y_s = 0$$

من أجل سطح نصف دائري ، أي من أجل $\alpha = \pi/2$ فإن إحداثيات مركز الثقل تبلغ :

$$x_s = \frac{4 R}{3 \pi} \quad , \quad y_s = 0$$

ومن أجل سطح ربع دائري ، أي من أجل $\alpha = \pi/4$ فإن إحداثيات مركز الثقل تأخذ القيم التالية :

$$x_s = \frac{4 \sqrt{2} R}{3 \pi} \quad , \quad y_s = 0$$

٢ - ٣ - ٢ العزم الستاتيكي للسطوح (أو ما يسمى بعزم الدرجة الاولى للسطوح)

يسمى التكامل $\int_F x dF$ بالعزم الستاتيكي لسطح F بالنسبة للمحور y ويعبر عنه بالرمز S_y . يحتوي هذا التكامل على جداء ناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي dF بعده العمودي عن المحور y . ويكتب هكذا :

$$S_y = \int x dF \quad (2-18)$$

يشير الحرف F تحت التكامل إلى إمتداده على مساحة كامل المقطع العرضي .

بطريقة مشابهة يسمى التكامل $\int_F y dF$ بالعزم الستاتيكي لسطح F بالنسبة للمحور x (أو حول المحور x) ويعبر عنه بالرمز التالي :

$$S_x = \int_F y dF \quad (2-19)$$

يشير الحرف S الى العزم الستاتيكي لسطح F أما الدليل فيشير الى المحور الذي تنسب العزوم حوله . إذا العزم الستاتيكي لسطح F بالنسبة لمحور ما يساوي تكامل الجداء الناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي dF ببعد العمودي عن ذلك المحور .

يمكن ، على العموم ، أن يكون العزم الستاتيكي موجباً أو سالباً أو أن تنعدم قيمته وتساوي صفراً .

إن واحدة العزم الستاتيكي للسطوح هي مكعب واحدة الطول المستعملة ، فمثلاً لو إستعمل الـ cm كواحدة للطول وكانت واحدة العزم الستاتيكي هي cm³ وهكذا .

حسب العلاقة (2-17) يمكن للعزوم الستاتيكية أن تمثل بالشكل التالي :

$$S_x = y_s F \quad \text{و} \quad S_y = x_s F \quad (2-20)$$

أي أن العزم الستاتيكي لسطح بالنسبة لمحور ما يساوي ، حسب هذه المعادلات ، الى الجداء الناتج عن ضرب مساحة السطح بالبعد العمودي لمرکز ثقل السطح المذكور عن ذلك المحور .

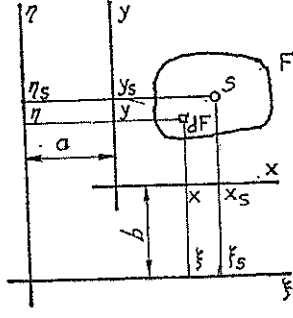
من المعادلات الاخيرة (2-20) يتج أيضاً ان العزم الستاتيكي لسطح بالنسبة لمرکز ثقله (وبالنسبة لأي محور مركزي) يساوي دائماً صفراً . وبالعكس إذا كان العزم الستاتيكي لسطح بالنسبة لمحور ما مساوياً للصفر فإن ذلك المحور هو محور مركزي (محور يمر من مركز الثقل) .

لظهور البعد العمودي للعنصر السطحي عن المحاور الاحداثية في التكاملات بشكل خطي لذا يطلق على العزم الستاتيكي أحياناً اسم عزم الدرجة الاولى للسطوح .

٢ - ٣ - ٣ تأثير جمل النسب على مركز الثقل :

سوف تم في هذه الفقرة دراسة تأثير جمل النسب على مركز الثقل (شكل 2-21) .

يمكن ، حسب العلاقة (2-15) او العلاقة (2-17) كتابة ما يلي :



شكل 2-21

$$x_s = \frac{1}{F} \int_F x dF \quad , \quad y_s = \frac{1}{F} \int_F y dF$$

$$\xi_s = \frac{1}{F} \int_F \xi dF \quad , \quad \eta_s = \frac{1}{F} \int_F \eta dF$$

من الشكل (2-21) يمكن قراءة العلاقة التي تربط بين مجموعتي الاحداثيات (y,x) و (η,ξ) :

$$\xi = x + a$$

$$\eta = y + b$$

بتبديل هذه العلاقات في المعادلات الاخيرة ينتج :

$$\xi_s = \frac{1}{F} \int_F (x + a) dF = \frac{1}{F} \int_F x dF + \frac{1}{F} \int_F a dF = x_s + a$$

$$\eta_s = \frac{1}{F} \int_F (y + b) dF = \frac{1}{F} \int_F y dF + \frac{1}{F} \int_F b dF = y_s + b$$

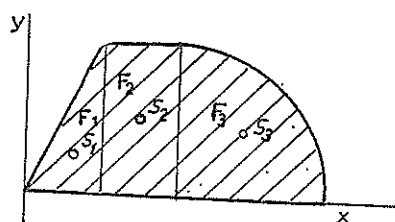
من هذه العلاقات يتم التوصل للنتيجة البديهية ألا وهي أن مركز الثقل له موضع ثابت ولا علاقة له بنقطة النسب . بثبت مبدأ مجموعة الاحداثيات في مركز ثقل الجسم عند ذلك تنعدم التكميلات التالية :

$$\int_L F r ds = 0 \quad , \quad \int_F t r dF = 0 \quad , \quad \int_V r dV = 0$$

والتي تمثل العزوم الستاتيكية للجسم . أما سبب إنعدامها فهو أن العزم الستاتيكي ينعدم بالنسبة لمركز الثقل وكذلك بالنسبة لأي محور مركزي .

٢ - ٣ - ٤ مركز ثقل سطح مركب يتألف من عدة سطوح بسيطة

إذا كان بالإمكان تقسيم السطح الكلي الى عدة سطوح جزئية ذات مساحات ومراكز ثقل معلومة (أو مجدولة) (شكل 2-13) عندئذ يستطاع حساب مركز ثقل السطح الكلي بالاستعانة بمراكز ثقل السطوح الجزئية ومساحاتها .



شكل 2-13

التمثيل الشعاعي لعلاقة تعيين مركز الثقل :

$$r_s = \frac{r_1 F_1 + r_2 F_2 + r_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (2-21)$$

التمثيل الاحداثي لعلاقة تعيين مركز الثقل :

$$x_s = \frac{x_{s1} F_1 + x_{s2} F_2 + x_{s3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{si} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (2-22)$$

$$y_s = \frac{y_{s1} F_1 + y_{s2} F_2 + y_{s3} F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{si} F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

حيث أن x_s و y_s هي إحداثيات مركز ثقل السطح الكلي وأن (y_i, x_i) و (x_2, y_2) هي إحداثيات مراكز ثقل السطوح الجزئية . أما F_1, F_2, \dots, F_i فهي مساحات السطوح الجزئية . يظهر العزم الستاتيكي للسطح F ، في صورة العلاقتين (2-22) ك مجموع العزوم الستاتيكية للسطوح الجزئية .

قاعدة :

العزم الستاتيكي لسطح مركب ، يتألف من عدة سطوح جزئية بسيطة هندسياً ، بالنسبة لمحور ما يساوي مجموع العزوم الستاتيكية للسطوح الجزئية بالنسبة لذات المحور .

٢ - ٣ - ٥ مركز ثقل سطح يحتوي على ثقوب وفجوات

في كثير من الحالات يجد المهندس نفسه مطالب بتعيين مركز ثقل سطح يحتوي على عدة فجوات أو ثقوب . لتسهيل عملية إيجاد مركز الثقل يمكن اعتبار مساحة سطح الثقوب والفجوات سالبة ، وبذلك ينتج :

$$x_s = \frac{\int_{F_0} x_0 dF - \int_{F_1} x_1 dF - \int_{F_2} x_2 dF - \dots - \int_{F_i} x_i dF}{\int_{F_0} dF - \int_{F_1} dF - \int_{F_2} dF - \dots - \int_{F_i} dF} \quad (2-23)$$

$$y_s = \frac{\int_{F_0} y_0 dF - \int_{F_1} y_1 dF - \int_{F_2} y_2 dF - \dots - \int_{F_i} y_i dF}{\int_{F_0} dF - \int_{F_1} dF - \int_{F_2} dF - \dots - \int_{F_i} dF}$$

في حالة كون مساحات ومراكز ثقل السطوح الجزئية (السطح المائي والثقوب) معلومة عندئذ تصبح العلاقات السابقة كما يلي :

$$x_s = \frac{x_{s0} F_0 - x_{s1} F_1 - x_{s2} F_2 - \dots - x_{si} F_i}{F_0 - F_1 - F_2 - \dots - F_i} \quad (2-24)$$

$$y_s = \frac{y_{s0} F_0 - y_{s1} F_1 - y_{s2} F_2 - \dots - y_{si} F_i}{F_0 - F_1 - F_2 - \dots - F_i}$$

حيث أن F_0 هي مساحة السطح المائي (بدون ثقوب) وأن (y_0, x_0) هي إحداثيات مركز ثقل السطح المذكور. أما F_i فهي مساحة الثقب i و (y_i, x_i) هي إحداثيات مركز ثقل سطح الثقب المذكور .

لحساب العزم الستاتيكي لسطح يحتوي على ثقوب وفجوات والممثل في صورة كلا العلاقتين السابقتين تصلح القاعدة التالية :

إن العزم الستاتيكي لسطح يحتوي على عدة ثقوب وفجوات يساوي العزم الستاتيكي للسطح المائي (بدون ثقوب وفجوات) مطروحاً منه العزوم الستاتيكية للثقوب والفجوات (أما محور النسب فهو ذاته في كل العزوم الستاتيكية) .

يفضل أثناء حساب احداثيات مراكز ثقل السطوح المركبة أو السطوح ذات الثقوب والفجوات اتباع المخطط التالي :

v	x_v	y_v	F_v	$x_v F_v$	$y_v F_v$
الواحدة	m	m	m ²	m ³	m ³
1					
2					
⋮					
v					
⋮					
n					
Σ					

(2-25)

$$x_s = \frac{\sum_{v=1}^n x_v F_v}{F} = \dots, y_s = \frac{\sum_{v=1}^n y_v F_v}{F}$$

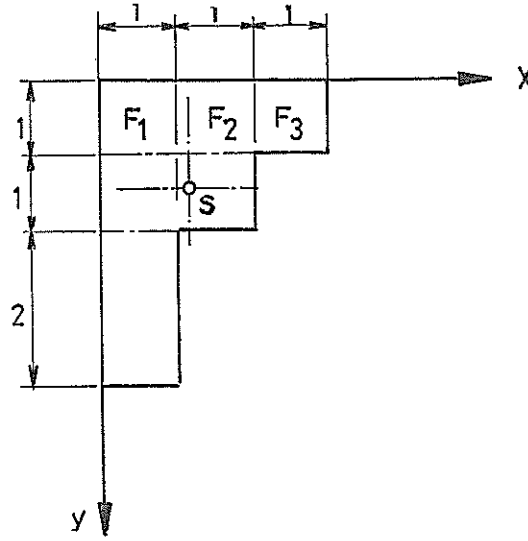
٢ - ٣ - ٦ أمثلة :

مثال 24 :

المعطى : ابعاد المقطع العرضي الممثل في الشكل (2-14) .

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي .

الحل :



(شكل 2-14)

١ - يختار موضع مناسب لمجموعة الاحداثيات x و y (على العموم يمكن تثبيتها في اي مكان، لكن الاختيار المناسب يوفر في اغلب الحالات كثيراً من الزمن والحسابات) . فمثلا هنا تختار القاعدتين الخارجيتين مكاناً لمجموعة الاحداثيات x و y .

٢ - يقسم السطح المركب الى عدة سطوح بسيطة تكون مساحتها ومراكز ثقلها معلومة او موجودة في جداول متداولة . فمثلا ليقسم المقطع العرضي المدروس الى مربع ومستطيلين .

مساحات ومراكز ثقل السطوح الجزئية :

$$F_1 = 1.1 = 1 \text{ cm}^2 \quad , \quad x_1 = 2,5 \text{ cm} \quad , \quad y_1 = 0,5 \text{ cm}$$

$$F_1 = 1.2 = 2 \text{ cm}^2 \quad , \quad x_1 = 1.5 \text{ cm} \quad , \quad y_1 = 1.0 \text{ cm}$$

$$F_3 = 1.4 = 4 \text{ cm}^2 \quad , \quad x_3 = 0.5 \text{ cm} \quad , \quad y_3 = 2.0 \text{ cm}$$

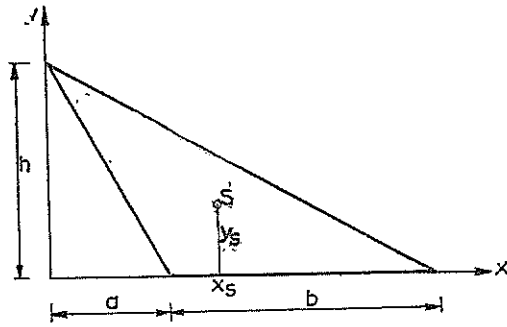
بتطبيق العلاقة (2-22) يتم حساب إحداثيات مركز ثقل الجسم المركب :

$$x_s = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{2.5 \cdot 1.0 + 1.5 \cdot 2.0 + 0.5 \cdot 4.0}{1.0 + 2.0 + 4.0} = \frac{7.5}{7.0} \text{ cm}$$

$$y_s = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0.5 \cdot 1.0 + 1.0 \cdot 2.0 + 2.0 \cdot 4.0}{1.0 + 2.0 + 4.0} = \frac{10.5}{7.0} = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

مثال 25 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل مثلث قاعدته b وارتفاعه h (شكل 2-15).



(شكل 2-15)

الحل :

يتم تعيين مركز ثقل المثلث المعطى بالاستعانة بمراكز ثقل مثلثين قائمين :

$$F_1 = \frac{a h}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{a}{3} \quad , \quad y_1 = \frac{h}{3}$$

$$F_2 = \frac{(b+a) h}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{b+a}{3} \quad , \quad y_2 = \frac{h}{3}$$

وبعد التبديل في العلاقة (2-22) ينتج :

$$x_s = \frac{\frac{hb^2}{6} \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)}{\frac{bh}{3}} = \frac{b}{3} \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right)$$

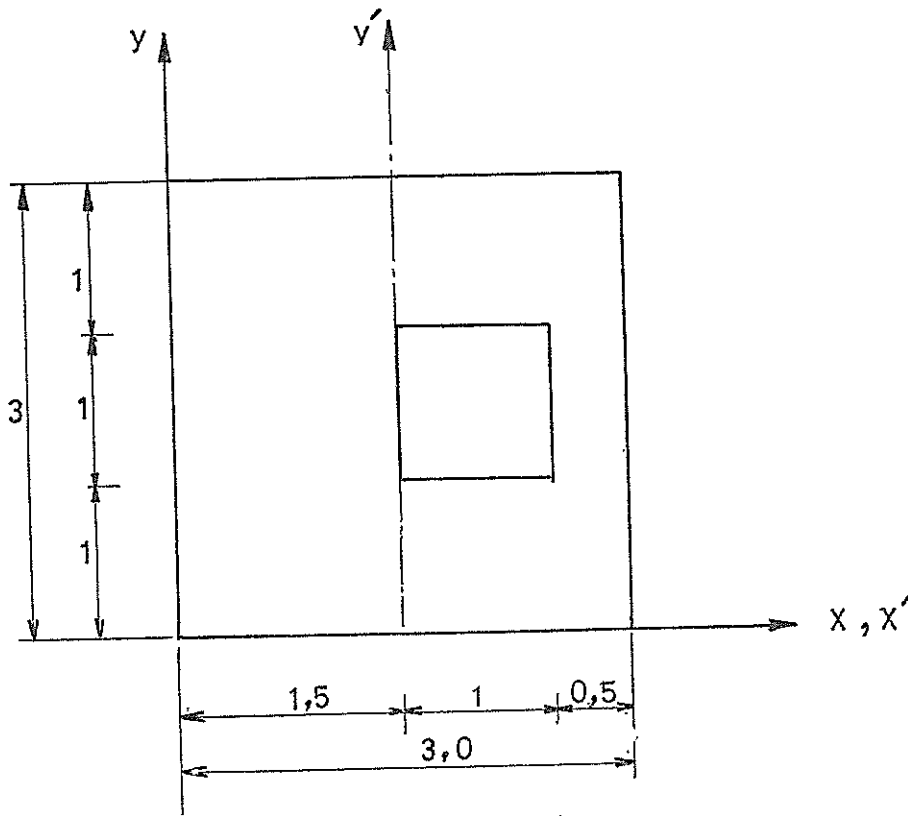
$$y_s = \frac{\frac{h^2 b}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

كما هو معلوم فإن مركز ثقل المثلث s يتحدد بنقطة تقاطع منصفات الاضلاع الثلاثة .

مثال 26 :

المعطى : المقطع العرضي الممثل في الشكل (2-16) .

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي .



(شكل 2-16)

الحل :

باعتبار ان المقطع العرضي F يتألف من سطح مليء مساحته F_0 مطروحاً منه سطح الثقب F_1 يمكن بسهولة حساب الاحداثيات المطلوبة .

باختيار مجموعة الاحداثيات (y, x) وبتطبيق العلاقة (2-24) ينتج :

$$x_s = \frac{x_0 F_0 - x_1 F_1}{F_0 - F_1} = \frac{1,5 (3,0 \cdot 3,0) - 2,0 (1,0 \cdot 1,0)}{3,0 \cdot 3,0 - 1,0 \cdot 1,0} = \frac{11,5}{8} = \frac{23}{16} \text{ cm}$$

لما اذا اختيرت مجموعة الاحداثيات x' و y' عندئذ ينتج :

$$x'_s = \frac{x'_0 F_0 - x'_1 F_1}{F_0 - F_1} = \frac{0 \cdot (3,0 \cdot 3,0) - 0,5 (1,0 \cdot 1,0)}{3,0 \cdot 3,0 - 1,0 \cdot 1,0} = -\frac{0,5}{8} = -\frac{1}{16} \text{ cm}$$

بسبب تناظر المقطع العرضي بالنسبة لمحور يوازي كلا المحورين x, x' ويمر من منتصف المقطع العرضي فلا حاجة لحساب y_s او y'_s وانما يمكن فوراً القول بأن :

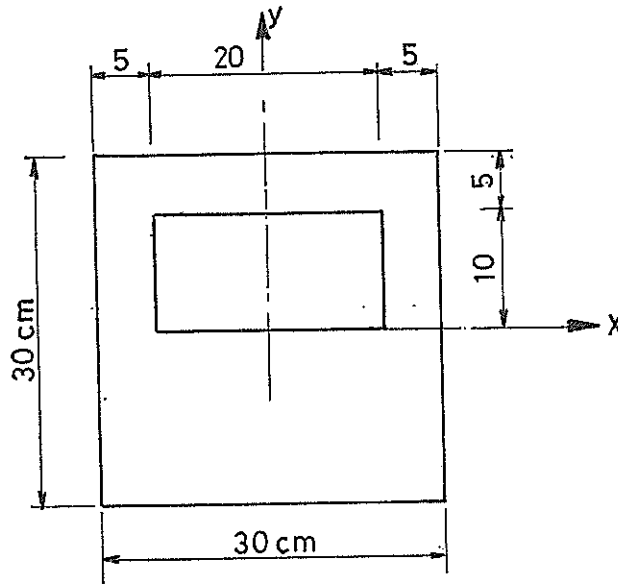
$$y_s = y'_s = 1,5 \text{ cm}$$

اي ان مركز الثقل يقع على محور التناظر .

مثال 27 :

المعطى : المقطع العرضي الممثل في الشكل (2-17) .

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي .



(شكل 2-17)

الحل :

بسبب تناظر المقطع العرضي بالنسبة للخط الاوسط الشاقولي ، فان مركز الثقل يقع عليه .
لحساب الاحداثي المتبقي تختار مجموعة الاحداثيات (\bar{y}, \bar{x}) كما هو مبين في الشكل (2-17) .

بالاستعانة بمساحات ومراكز ثقل السطوح الجزئية :

$$F_0 = 30 \cdot 30 = 900 \text{ cm}^2 , \quad \bar{x}_0 = 0 , \quad \bar{y}_0 = 0$$

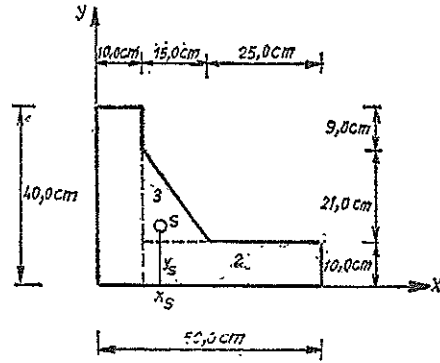
$$F_1 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2 , \quad \bar{x}_1 = 0 , \quad \bar{y}_1 = 5 \text{ cm}$$

وتطبق العلاقة (2,24) ينتج :

$$\bar{y}_s = \frac{\bar{y}_0 F_0 - \bar{y}_1 F_1}{F_0 - F_1} = \frac{0.900 - 5.200}{900 - 200} = - \frac{1000}{700} = - \frac{10}{7} = - 1,43 \text{ cm}$$

مثال 28 :

المطلوب : حساب احداثيات مركز ثقل السطح الممثل في الشكل (2-31) .



(شكل 2-31)

الحل :

باستخدام المخطط الحسابي (2-25) تسهل العمليات الحسابية وبذلك ينتج :

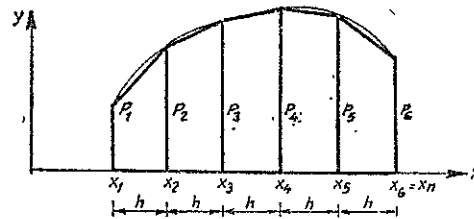
v	x_v	y_v	F_v	$x_v F_v$	$y_v F_v$
الوحدة	cm	cm	cm ²	cm ³	cm ³
1	5,0	20,0	400,0	2000,0	8000,0
2	30,0	5,0	400,0	12000,0	2000,0
3	15,0	17,0	157,5	2362,5	2677,5
Σ	0	0	957,5	16362,5	12677,5

$$x_s = \frac{16362,5}{957,5} = 17,09 \text{ cm}$$

$$y_s = \frac{12677,5}{956,5} = 13,24 \text{ cm}$$

إذا لم يكن بالإمكان إعطاء المنحني المحدد لسطح مستوي بشكل تحليلي ، فبالإمكان إيجاد مركز الثقل بالاستعانة بطريقة عددية (nummerisches Verfahren) .

سوف يتم الآن اشتقاق هذه الطريقة بالاعتماد على سطح يتحدد بواسطة ترتيب الاطراف $p_0(x)$ بتقسيم السطح المدروس (شكل 2-25) الى $(n-1)$ شبه منحرف ، عرض كل منها هو h (لها نفس العرض) واضلاعها المتوازية هي p_1, p_2, \dots, p_n .



(شكل 2.25)

لامكانية تركيب كل شبه منحرف من مثلثين فان الاحداثي x المائد لمركز ثقل شبه المنحرف ذو الاضلاع المتوازية p_v و p_{v+1} هو :

$$\xi_{v+1} = x_v + \frac{h}{3} \frac{p_v + 2p_{v+1}}{p_v + p_{v+1}} = \frac{1}{3} \left[3x_v + (x_{v+1} - x_v) \frac{p_v + 2p_{v+1}}{p_v + p_{v+1}} \right]$$

مقاومة المواد م٦

بواسطة السطوح الجزئية :

$$F_v = \frac{h}{2} (p_{v-1} + p_v) \quad ; \quad v = 2, 3, \dots, n$$

يتم ، حسب العلاقة (2-22) حساب الاحداثي x العائد لمركز ثقل السطح الكلي :

$$X_s = \frac{\sum_{v=1}^{n-1} \xi_v F_v}{\sum_{v=1}^{n-1} F_v}$$

وبترتيب مناسب للحدود يمكن اعادة العلاقة السابقة للملاقة التالية :

$$X_s = \frac{\sum_{v=1}^n x_v P_v}{\sum_{v=1}^n P_v} \quad (2-26)$$

حيث أن

$$P_1 = \frac{h}{6} (2 p_1 + p)$$

$$P_v = \frac{h}{6} (p_{v-1} + 4 p_v + p_{v+1}) \quad ; \quad v = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2-27)$$

$$P_n = \frac{h}{6} (p_{n-1} + 2 p_n)$$

كلما كثر تقسيم السطح الكلي الى أشباه منحرفة ، أي كلما كانت h صغيرة ، كلما تم التوصل لنتائج ذات دقة كافية .

٢ - ٤ مركز ثقل جسم قضبي الشكل

يقال عن جسم أنه قضبي عندما تكون أبعاد مقطعة العرضي أصغر بكثير من طوله .

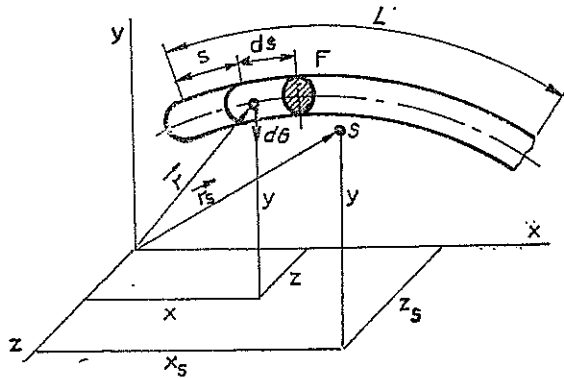
يمكن لمحور القضيبي (الخط الواصل بين مراكز ثقل المقاطع العرضية) أن يكون خطاً مستقيماً أو أن يكون خطاً مضاعفاً كما يمكن أن يكون خطاً منحنياً (شكل 2-26) .
وزن الجسم :

$$G = \gamma V = \gamma F L$$

حيث أن F هي مساحة المقطع العرضي و L هو طول محور القضيبي .

إذا اتخذ عنصر حجمي حجمه $dV = F ds$ ووزنه $dG = \gamma F ds$ أساساً للحساب عندئذ يتم الحصول من المعادلة (2-10) ومن أجل جسم متجانس على العلاقات التالية :

$$x_s = \frac{\int_0^L F x ds}{\int_0^L F ds}, \quad y_s = \frac{\int_0^L F y ds}{\int_0^L F ds}, \quad z_s = \frac{\int_0^L F z ds}{\int_0^L F ds} \quad (2-28)$$



شكل 2-26

لو مثلت العلاقات السابقة بكتابة شعاعية :

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (2-29)$$

$$\mathbf{r}_s = x_s \mathbf{i} + y_s \mathbf{j} + z_s \mathbf{k} = x_s \mathbf{e}_x + y_s \mathbf{e}_y + z_s \mathbf{e}_z$$

لأعطت العلاقة التالية :

$$r_s = \frac{\int_L F r ds}{\int_L F ds} \quad (2-30)$$

في بعض الاحيان يلزم في الحسابات العملية معرفة مركز ثقل خط ، حيث $F=\text{const}$ (يعتبر الخط حالة خاصة للجسم القضبي) بذلك تصبح علاقات ايجاد مركز الثقل بالتمثيل الاحداثي كما يلي :

$$x_s = \frac{\int_L x dF}{L}, \quad y_s = \frac{\int_L y dF}{L}, \quad z_s = \frac{\int_L z dF}{L} \quad (2-31)$$

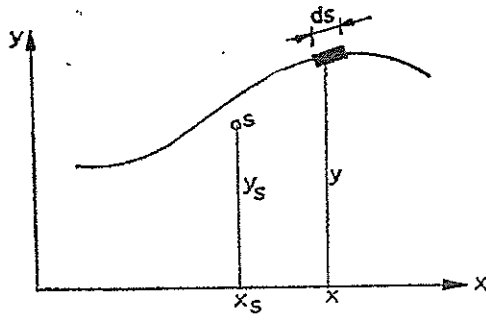
حيث ان $L = \int dL$ هو طول الخط .

اما علاقات ايجاد مركز الثقل بالتمثيل الشعاعي فتأخذ الشكل التالي :

$$r_s = \frac{\int_L r ds}{\int_L ds} \quad (2-32)$$

بواسطة العلاقات (2-31) او (2-32) يصبح تعيين مركز ثقل خط فراغي ممكنا .
في حالة وقوع الخط في مستوي واحد ، على سبيل المثال المستوي المتشكل عن المحورين x و y (شكل 2-27) عندئذ تصبح المعادلات (2-31) هكذا :

$$x_s = \frac{\int_L x ds}{L}, \quad y_s = \frac{\int_L y ds}{L} \quad (2-33)$$



شكل 3-27

٢ - ٤ - ١ أمثلة

مثال 29 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل قطعة مستقيمة (شكل 2-28) .

الحل :

بعد إيجاد التكاملات الواردة في المعادلة (2-31) :

$$L = \int_L ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha}$$

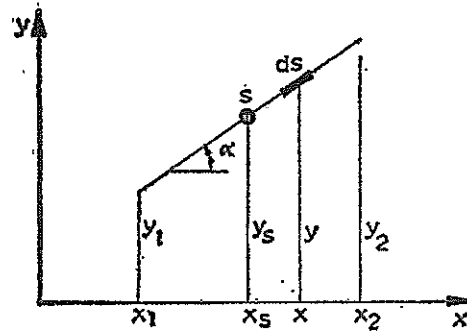
$$\int_L x ds = \int_{x_1}^{x_2} x \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \cos \alpha} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{2 \cos \alpha}$$

$$\int_L y ds = \int_{y_1}^{y_2} y \frac{dy}{\sin \alpha} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2 \sin \alpha} = \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{2 \sin \alpha}$$

يتم حساب إحداثيات مركز الثقل :

$$x_s = \frac{x_2 + x_1}{2} , \quad y_s = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

من هذه النتائج يتبين أن مركز ثقل القطعة المستقيمة يقع في منتصفها .



شكل 2-28

مثال 30 :

المطلوب : تعيين مركز ثقل قوس دائري نصف قطره r وزاوية فتحة 2α (شكل 2-29) .

الحل :

تختار احداثيات قطبية r و φ (شكل 2-29) .

العلاقات التي تربط بين الاحداثيات الديكارتية x و y والاحداثيات القطبية r و φ هي :

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi \quad , \quad ds = r d\varphi$$

بالاستعانة بالتكاملات الواردة في العلاقة (2-33) بعد الحل :

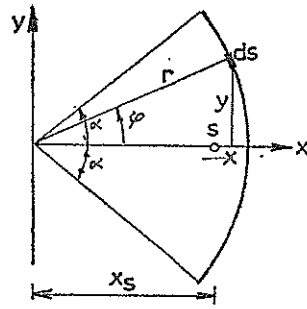
$$S = \int_L ds = r \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\varphi = 2 r \alpha$$

$$\int_L x ds = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi = r^2 \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = 2 r^2 \sin \alpha$$

$$\int_L y ds = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0$$

يتم حساب احداثيات مركز الثقل

$$x_s = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad , \quad y_s = 0$$



شكل 2-29

٢ - ٤ - ٢ مركز ثقل خط مستوي مركب

إذا تألف الخط المستوي من n قوس جزئي S_v ، وكانت إحداثيات مراكز ثقلها معلومة وهي :

$$x_v, y_v ; v = 1, 2, \dots, n$$

عندئذ يستطاع ، حسب العلاقات (2-12) تعيين مركز ثقل الخط المركب الكلي كما يلي :

$$x_s = \frac{\sum_{v=1}^n x_v L_v}{L} , \quad y_s = \frac{\sum_{v=1}^n y_v L_v}{L} \quad (2-34)$$

يفضل إجراء الحساب بالاستعانة بالخطوط التالي :

v	x_v	y_v	L_v	$x_v L_v$	$y_v L_v$
الوحدة	m	m	m	m ²	m ²
1					
2					
...					
v					
...					
n					
Σ	.	.	$L=.$	---	---

(2-35)

$$x_s = \frac{\sum_{v=1}^n x_v L_v}{V} = \dots , \quad y_s = \frac{\sum_{v=1}^n y_v L_v}{V} = \dots$$

مثال 31 :

يتألف خط مركب من مستقيم طوله a ومن نصف دائرة نصف قطرها r (شكل 2-30) .

المطلوب : تعيين الطول a وذلك حتى يقع مركز ثقل المجموعة (الخط المركب) s على قطر نصف الدائرة .

الحل :

القيم الجزئية :

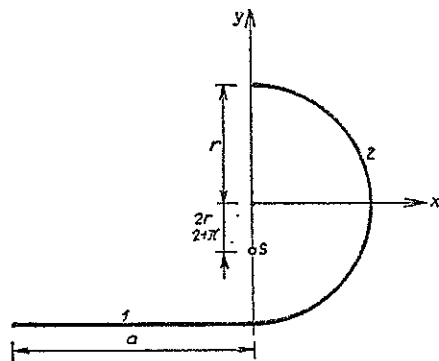
$$L_1 = a \quad \text{و} \quad x_1 = -\frac{a}{2} \quad \text{و} \quad y_1 = -r$$

$$L_2 = r\pi \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{2r}{\pi} \quad \text{و} \quad y_2 = 0$$

احداثيات مركز النقل :

$$x_s = \frac{-\frac{\pi}{2}a + \frac{2r}{\pi}r\pi}{a+r\pi} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 4r^2}{a+r\pi}$$

$$y_s = \frac{-ra + 0}{a+r\pi} = -\frac{ra}{a+r\pi}$$



شكل 2-30

لوجوب انعدام x_s يتم التوصل للقيمة a المطلوبة :

$$a = 2r$$

ومن اجل هذه القيمة فان احداثي مركز الثقل يصبح :

$$y_s = -\frac{2r}{2+\pi}$$

المصطلح الثاني

مجموعة القوى الفراغية

٣ - ١ مجموعة القوى الفراغية المركزية

يقال عن مجموعة القوى الفراغية أنها مركزية وذلك عندما تؤثر في نقطة واحدة أو عندماتتلاقى حواملها في نقطة واحدة .

٣ - ١ - ١ مركبات القوى (تحليل القوى مركباتها) :

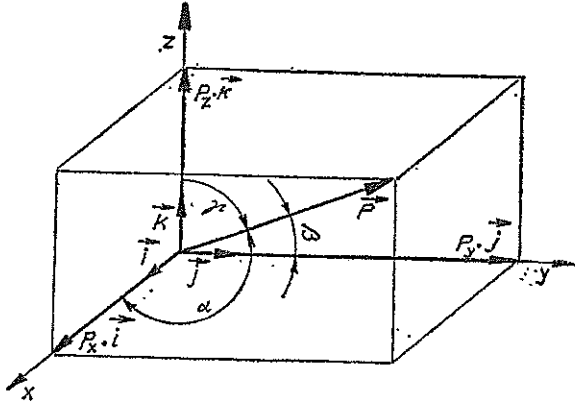
يمكن التعبير عن قوة ما ولتكن p ضمن مجموعة إحداثيات ديكارتية x, y, z بواسطة مركباتها وذلك بالشكل التالي :

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

أو باختصار كما يلي :

$$\mathbf{P} = \{ P_x ; P_y ; P_z \}$$

حيث أن i, j, k هي الاشعة الواحدة (Einheitsvektoren) وأن P_x, P_y, P_z هي مركبات الشعاع (المركبات السلية للشعاع) \mathbf{P} باتجاه الاحداثيات x, y, z .



شكل 3-1

حسب الشكل (3-1) تعني الزوايا أن :

(3-1) α هي الزاوية المحصورة بين (P, i) و β هي الزاوية المحصورة بين (P, j) و γ هي الزاوية المحصورة بين (P, k) .
كما أنها تحقق العلاقة التالية :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

وبذلك يتم التعبير عن مركبات القوة P كما يلي :

$$P_x = P \cos \alpha \quad , \quad P_y = P \cos \beta \quad , \quad P_z = P \cos \gamma \quad (3-2)$$

حيث أن $P = |P|$ هي القيمة المطلقة لشعاع القوة . بتعبير معاكس يمكن حساب القيمة المطلقة للقوة بالاعتماد على مركباتها :

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (3-3)$$

٣ - ١ - ٢ شروط التوازن

يمكن الاستعاضة عن مجموعة قوى تتألف من n قوة هي $P_1, \dots, P_v, \dots, P_n$ بقوة واحدة R تكافئها وتؤثر في نفس نقطة تطبيق مجموعة القوى وتسمى بمحصلة مجموعة القوى . تكافئ المحصلة R مع مجموعة القوى عندما تساوي مركبة المحصلة بالاتجاه x والتي يرمز لها بالرمز R_x مع مجموع مركبات القوى P_{xv} ، أي عندما تتحقق العلاقة الآتية :

$$R_x = \sum_{v=1}^n P_{xv} \quad (3-4)$$

وكذلك عندما تتحقق العلاقات التالية :

$$R_y = \sum_{v=1}^n P_{yv} \quad , \quad R_z = \sum_{v=1}^n P_{zv} \quad (3-4b)$$

التي تمثل شرط تساوي مركبات المحصلة بالاتجاهين y, z مع مجموع مركبات القوى P_{yv} و P_{zv} ، حسب المعادلة (3-3) فإن القيمة المطلقة للمحصلة تبلغ :

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (3-5)$$

يتحدد مكان المحصلة في الفراغ ، حسب المعادلتين (3-1) و (3-2) بواسطة الزوايا α_R , β_R , γ_R وذلك من خلال العلاقات التالية :

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos \beta_R = \frac{R_y}{R} \quad , \quad \cos \gamma_R = \frac{R_z}{R} \quad (3-6)$$

تسيطر على القوى P_i حالة التوازن عندما تكون محصلتها معدومة (تساوي الصفر) . بما أن الشعاع لا يساوي الصفر (لا ينعدم) الا فقط عندما تنعدم مركباته ، لذلك فان شروط توازن مجموعة قوى فراغية مركزية هي التالية :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n P_{yv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n P_{zv} = 0 \quad (3-7)$$

٣ - ١ - ٣ السقالة الفراغية (Räumliches Bockgerüst) :

يشير الشكل (3-2) الى سقالة فراغية (سبيا) تتألف من ثلاثة قضبان لاتقع محاورها في مستو واحد . تستند القضبان 1 , 2 , 3 التي تبلغ أطوالها l_1 , l_2 , l_3 عند نقاط نهايتها السفلية :

$$I(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad II(x_2, y_2, z_2) \quad , \quad III(x_3, y_3, z_3)$$

إستناداً مفصلياً لجميع الاتجاهات وتجتمع عند نقاط نهايتها العلوية مع بعض في النقطة a (العقدة a) التي تمثل أيضاً إتصالاً مفصلياً لجميع الاتجاهات . تؤثر في النقطة a القوة المحملة (المحمولة) P ذات المركبات P_x , P_y , P_z . بسبب تأثير هذه القوة تتشكل في القضبان الثلاثة ، ردود أفعال داخلية (تسمى بقيم القطع) وتتألف في هذه الحالة من قوى طولية (قوى محورية ، قوى ناظمية) فقط ولذلك يطلق عليها اسم قوى القضبان ويرمز لها بالرموز s_1 , s_2 , s_3 (بسبب تفصل كل من القضبان من كلا الطرفين ، لذلك لا يمكن أن تتشكل في القضبان إلا قوى قضبان ، أي قوى طولية فقط) .

بعد الافتراض ان قوى القضبان هي قوى شادة فان تطبيق شروط التوازن (3-7) على العقدة a ، بعد اقتطاعها ، يعطي المعادلات الثلاثة التالية :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 \quad : \quad P_x + S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$\sum_{v=1}^n P_{yv} = 0 \quad : \quad P_y + S_1 \cos \beta_1 + S_2 \cos \beta_2 + S_3 \cos \beta_3 = 0$$

$$\sum_{v=1}^n P_{zv} = 0 \quad : \quad P_z + S_1 \cos \gamma_1 + S_2 \cos \gamma_2 + S_3 \cos \gamma_3 = 0$$

حيث أن ، على مسيل المثال $S_1 \cos \alpha_1$ هي مركبة قوة القضيب S_1 باتجاه المحور x ، كما أن P_x ، P_y ، P_z هي مركبات المجهول P باتجاه المحاور x ، y ، z ، بشكل عام يمكن لمركبات القوة P وكذلك حدود \cos أن تكون موجبة أو سالبة . بواسطة العلاقات التالية :

$$\cos \alpha_v = \frac{x_v}{l_v} \quad , \quad \cos \beta_v = \frac{y_v}{l_v} \quad , \quad \cos \gamma_v = \frac{z_v}{l_v} \quad (v = 1, 2, 3)$$

تأخذ مجموعة المعادلات السابقة ، التي تنتج عنها الاشارة الصحيحة لقوى القضبان ، الشكل التالي :

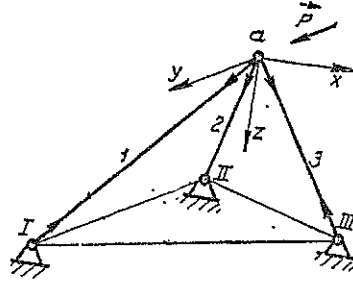
$$P_x + x_1 \frac{S_1}{l_1} + x_2 \frac{S_2}{l_2} + x_3 \frac{S_3}{l_3} = 0$$

$$P_y + y_1 \frac{S_1}{l_1} + y_2 \frac{S_2}{l_2} + y_3 \frac{S_3}{l_3} = 0 \quad (3-8)$$

$$P_z + z_1 \frac{S_1}{l_1} + z_2 \frac{S_2}{l_2} + z_3 \frac{S_3}{l_3} = 0$$

٣ - ٢ . مجموعة القوى الفراغية العامة

يقال عن مجموعة القوى الفراغية انها عامة وذلك عندما لا تطبق (لا تؤثر) في نقطة واحدة كما لا تتلاقى حواملها في نقطة واحدة .



شكل 3-2

٣ - ٢ - ١ العزم

إذا كان

$$\mathbf{r} = \{r_x, r_y, r_z\}$$

هو شعاع المكان (Ortsvektor) لنقطة ما من شعاع القوة \mathbf{P} (ولتكن هنا مثلا النقطة a) بالنسبة لمركز الاحداثيات O (شكل 3-3) بذلك فان :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} (r_y P_z - r_z P_y) + \mathbf{j} (r_z P_x - r_x P_z) + \mathbf{k} (r_x P_y - r_y P_x) \quad (3-9)$$

هو عزم القوة \mathbf{P} بالنسبة للنقطة O . يتحدد اتجاه دوران شعاع العزم \mathbf{M} وكذلك حامله ، من وجوب كون الشعاع \mathbf{M} عمودي على الاشعة \mathbf{r} و \mathbf{P} . تشكل الاشعة \mathbf{r} , \mathbf{P} , \mathbf{M} بهذا التسلسل فيما بينها جملة يمينية (Rechtssystem). ان مركبات شعاع العزم على المحاور x, y, z هي :

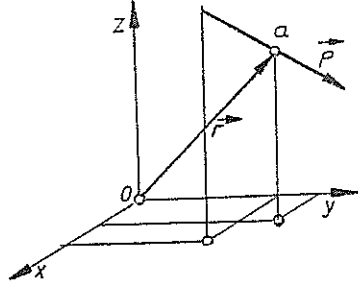
$$\begin{aligned} M_x &= r_y P_z - r_z P_y \\ M_y &= r_z P_x - r_x P_z \\ M_z &= r_x P_y - r_y P_x \end{aligned} \quad (3-10)$$

وبالامكان ايضا كتابة شعاع العزم بالشكل التالي :

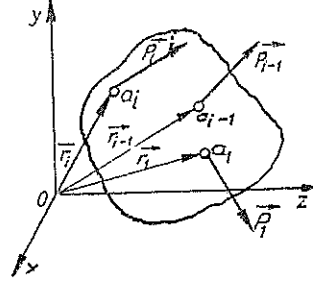
$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

٣ - ٢ - ٢ تركيب مجموعة قوى عامة

لتؤثر القوى P_v ($v = 1, 2, \dots, n$) في النقطة a من الجسم الصلب (شكل 3-4) .



شكل 3-3



شكل 3-4

ان لمجموعة القوى هذه قوة محصلة (resultierende kraft) تؤثر في مبدأ الاحداثيات هي :

$$\mathbf{R} = \sum_{v=1}^n \mathbf{P}_v$$

وعزم محصل (resultierende moment) هو

$$\mathbf{M}_R = \sum_{v=1}^n \mathbf{r}_v \times \mathbf{P}_v = \sum_{v=1}^n \mathbf{M}_v$$

تكافئها (اذاً تكافىء مجموعة القوى الفراغية العامة المعطاة قوة محصل وعزم محصل) . بسبب كون

$$\mathbf{r}_v = \{ r_{xv} ; r_{yv} ; r_{zv} \} \quad ; \quad \mathbf{P}_v = \{ P_{xv} ; P_{yv} ; P_{zv} \}$$

فان مركبات القوة المحصلة والعزم المحصل تصبح كما يلي :

$$\mathbf{R} = \{ R_x ; R_y ; R_z \} \quad , \quad \mathbf{M} = \{ M_{Rx} ; M_{Ry} ; M_{Rz} \}$$

$$R_x = \sum_{v=1}^n P_{xv} \quad ; \quad M_{Ry} = \sum_{v=1}^n (r_{zv} P_{xv} - r_{xv} P_{zv}) \quad (3-11)$$

$$R_y = \sum_{v=1}^n P_{yv} \quad ; \quad M_{Ry} = \sum_{v=1}^n (r_{yv} P_{xv} - r_{xv} P_{zv})$$

$$R_z = \sum_{v=1}^n P_{zv} \quad ; \quad M_{Rz} = \sum_{v=1}^n (r_{xv} P_{yv} - r_{yv} P_{xv})$$

تصلح العلاقات (3-5) و (3-6) من أجل القيمة المطلقة للقوة المحصلة واتجاهها اما من أجل القيمة المطلقة للعزم المحصل واتجاهه فتصلح على غرارها العلاقات التالية :

$$M_R = |M_R| = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2} \quad (3-12)$$

$$\cos \alpha_{MR} = \frac{M_{Rx}}{M_R} \quad ; \quad \cos \beta_{MR} = \frac{M_{Ry}}{M_R} \quad , \quad \cos \gamma_{MR} = \frac{M_{Rz}}{M_R}$$

مثال 32 :

المعطى : مجموعة القوى :

$$P_1 = \{3; 2; -1\} \text{ kp} \quad ; \quad P_2 = \{-1; 3; 0\} \text{ kp} \quad ; \quad P_3 = \{0; 1; 1\} \text{ kp}$$

واشعة المكان لنقاط تطبيقها على الجسم الصلب :

$$r_1 = \{2; 1; 0\} \text{ m} \quad ; \quad r_2 = \{1; 0; 1\} \text{ m} \quad ; \quad r_3 = \{0; -2; 2\} \text{ m}$$

المطلوب :

اعادة هذه القوى الى قوة محصلة وعزم محصل تكون اشعتها متوازية (شكل 3-5) .

الحل :

القوة المحصلة (انظر العلاقات (3-11) و (3-5)) :

$$R = \{3 + (-1) + 0 \quad ; \quad 2 + 3 + 1 \quad ; \quad (-1) + 0 + 1\} \text{ kp} = \{2; 6; 0\} \text{ kp}$$

$$R = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} \text{ kp} = 2 \sqrt{10} \text{ kp}$$

العزم المحصل (انظر العلاقات (3-9) و (3-11) و (3-12)) :

بواسطة النتائج التالية :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \{-1 ; 2 ; 1\} \text{ kpm}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 = \{-3 ; -1 ; 3\} \text{ kpm}$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{P}_3 = \{-4 ; 0 ; 0\} \text{ kpm}$$

ينتج :

$$\mathbf{M}_R = \{-1-3-4 ; 2-1+0 ; 1+3+0\} \text{ kpm} = \{-8 ; 1 ; 4\} \text{ kpm}$$

$$M_R = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{81} \text{ kpm} = 9 \text{ kpm}$$

حسب الشكل (3-5) فإن مركبة العزم الموازي للقوة المحصلة \mathbf{R} هي :

$$M''_R = M_R \cos \alpha$$

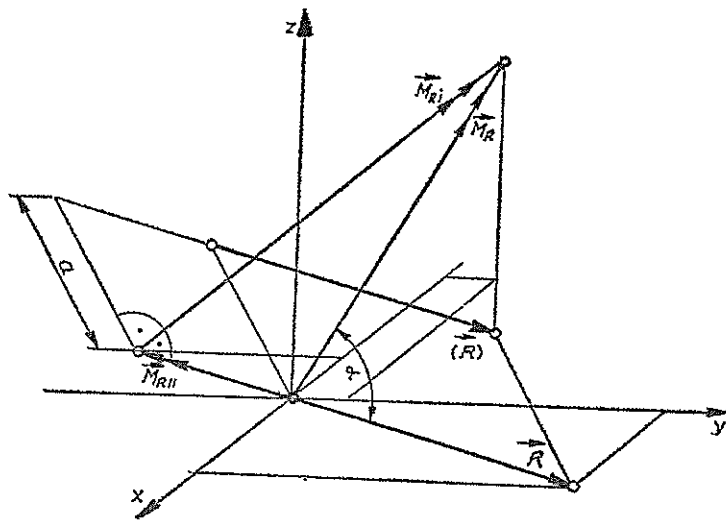
$$M''_R = \frac{\mathbf{R}}{R} M_R \cos \alpha$$

بالاستعانة بالعلاقة التالية :

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{M}_R}{M_R} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

ينتج :

$$\begin{aligned} M''_R &= R \frac{\mathbf{M}_R}{R^2} = \{2 ; 6 ; 0\} \text{ kp} \frac{(-8) \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 0}{4 \cdot 10} \frac{\text{kpm} \cdot \text{kp}}{\text{kp}^2} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2} ; 0 \right\} \text{ kpm} \end{aligned}$$



شكل 3-5

ان القيمة المطلقة لمركبة العزم M_R' العمودي على R ، حسب تعريف الجداء الشعاعي لشعاعين ، هي :

$$M_R' = M_R \frac{|R \times M_R|}{R M_R} = \frac{R \times M_R}{R}$$

يمكن التخيل ان هذا العزم تشكل نتيجة زلق القوة R بموازاة نفسها وعموديا على M_R' وبمسافة قدرها a (R) في الشكل (3-5) .

$$a = \frac{|R \times M_R|}{R^2} = \frac{1}{4 \cdot 10} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \end{vmatrix} m = \frac{1}{40} | \{24; -8; 50\} | m = 1,40m$$

بذلك تتم اعادة مجموعة القوى المعطاة الى قوة (R) والى عزم M_R'' اشعتها متوازية .

تسمى المجموعة (R) و M_R'' بلولب القوة (Kraftschraube) .

٣ - ٢ - ٣ شروط التوازن :

تسيطر على مجموعة القوى الفراغية العامة الممثلة في الشكل (3-4) حالة التوازن عندما تكون القوة المحصلة والعزم المحصل ، حسب العلاقة (3-11) ، مساوية للصفر .

مقاومة المواد م ٧

$$\sum_{\nu=1}^n P_{x\nu}=0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^n (r_{y\nu} P_{z\nu} - r_{x\nu} P_{y\nu}) = 0 \quad .$$

$$\sum_{\nu=1}^n P_{y\nu}=0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^n (r_{x\nu} P_{x\nu} - r_{x\nu} P_{z\nu}) = 0 \quad (3-13)$$

$$\sum_{\nu=1}^n P_{z\nu}=0 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^n (r_{x\nu} P_{y\nu} - r_{y\nu} P_{x\nu}) = 0$$

علم يكون الجسم الحامد

الفصل الأول

انظر عامة

١ - ١ أنواع التوازن :

للتوازن ثلاثة أنواع : توازن مستقر ، توازن قلق وتوازن حيادي .

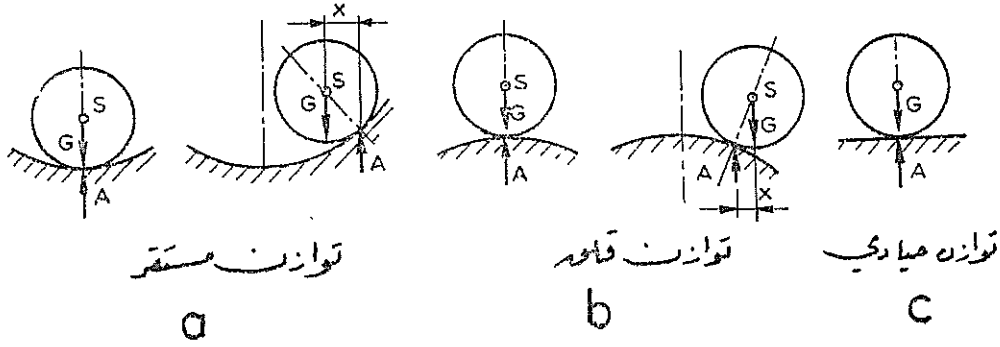
يقال عن وضع التوازن أنه مستقر عندما يتشكل بعد ازاحة الكرة عنه عزم إعادة :
(شكل 1-1a)

$$M = G \times$$

ويقال عن وضع التوازن أنه قلق عندما يتشكل بعد ازاحة الكرة عنه عزم ازاحته (شكل

1-1 b) . كما ويقال عن وضع التوازن أنه حيادي وذلك عندما لا يتشكل بعد ازاحة الكرة

عنه عزم إعادة ولا عزم ازاحة بحيث يكون كل وضع جديد هو وضع توازن وهو يمثل الحالة الحدية بين أوضاع التوازن (شكل 1-1 c) .

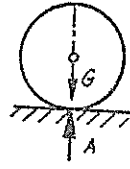


شكل 1-1

١ - ٢ أنواع المساند :

الاجسام في علم السكون على نوعين حرة او مقيدة . فالاجسام الحرة يمكنها أن تتحرك في كافة الاتجاهات دون ان يعيقها عائق بينا الاجسام المقيدة فهي لا تملك حرية الحركة الكاملة وانما يعيق حركتها في بعض الاتجاهات عوائق تستند عليها هذه الاجسام أو تتصل واياها (مساند) .

يبين الشكل (1-2) حالة استناد كرة على مستوي افقي ، هذا المستوى يمنع الكرة من اختراقه متحركة الى الاسفل .



شكل 1-2

فالكرة المستندة على المستوي الافقي تحدث نتيجة تأثير قوة الثقالة G (ثقلها) انضغاطات شاقولية على المستوي في نقطة اتصالها بهذا المستوي (نقطة الاستناد) عند ذلك يرد المستوي على الكرة بقوة $A_v = G$ تساويها وتعاكسها مباشرة (حيث تمثل A_v قوة المسند او مايسمى برد فعل المسند) .

مبدأ الفعل ورد الفعل :

عندما يؤثر جسم A على جسم آخر B بقوة P (قوة الفعل) يرد الجسم B على الجسم A بقوة $-P$ (قوة رد الفعل) تساويها وتعاكسها مباشرة .

المساند : هي جمع مسند وهو ما استند عليه الانشاء وعنده تؤثر مركبات ردود الافعال اللازمة لاحداث التوازن في الانشاء تحت تأثير ما عليه من محولات ومؤثرات خارجية او داخلية . كما ان مواضع اتصال اي جزء من الانشاء عند اطرافه ببقية الانشاء يمكن ان تعتبر مسانداً لهذا الجزء عند دراسة ما يتولد فيه من قوى داخلية بوصفه جزءاً مستقلاً بذاته . ومع ان المألوف هو ان تتصور مواضع محددة للمساند التي يستند عليها الانشاء ، الا ان بعض الانشاءات تستند

على مساحات معينة توزع عليها قوى ردود الفعل كما يحدث في الانشاءات التي تعوم (تطفو ، تسبح) في الماء او تغوص فيه ، وكذلك الانشاءات التي تطير في الجو ، وفي تلك الحالات تنشأ قوى رد فعل من ضغط المياه او ضغط الهواء على التوالي . فاذا تساوت هذه القوى او القوى المؤثرة على الانشاء حدث التوازن الذي يبدو في صورة مسكون او انطلاق بسرعة ثابتة . اما اذا اختلفت القوى المؤثرة عن رد الفعل حدثت الحركة المتغيرة السرعة زيادة او نقصاناً . وعلى كل حال ، فان المعنى المفهوم لكلمة المساند كمواضع محددة للاستناد هو الذي يعيننا في الوقت الحالي . ويمكن ان يحدد الغرض من اي مسند بأنه منع الحركة كلياً او جزئياً عند نقطة الاستناد (ويؤدي ذلك لنقل المحولات من المنشأ الى المساند وبعدها الى الارض او المكان الاخير الذي يجب ان تنقل اليه تلك المحولات) . والحركة في ذاتها يمكن أن تقسم الى حركة انتقالية (Translation) وحركه دورانية (Rotation) ومن مجموعها تنشأ الحركة . ويحدد نوع المسند طريقة تثبيت المنشأ . وتتوقف بالتالي مركبات ردود الفعل اللازمة على نوع المسند او طريقة التثبيت هذه . عندما يعيق عائق حركة جسم باتجاه ما يعني ان العائق يؤثر على الجسم بقوة رد فعل باتجاه عاكس الحركة . وعندما يعيق العائق دوران جسم يعني ان العائق يؤثر على الجسم بعزم رد فعل باتجاه عاكس الدوران . ويمكن ان تصور ما يلي :

١ - ان منع الحركة الانتقالية باتجاه ما يتطلب قوة في هذا الاتجاه كرد فعل عند المسند . وتبعاً لهذا فان السماح بالحركة الانتقالية في اتجاه معين يستلزم ان تكون مركبة رد فعل في هذا الاتجاه تساوي صفراً .

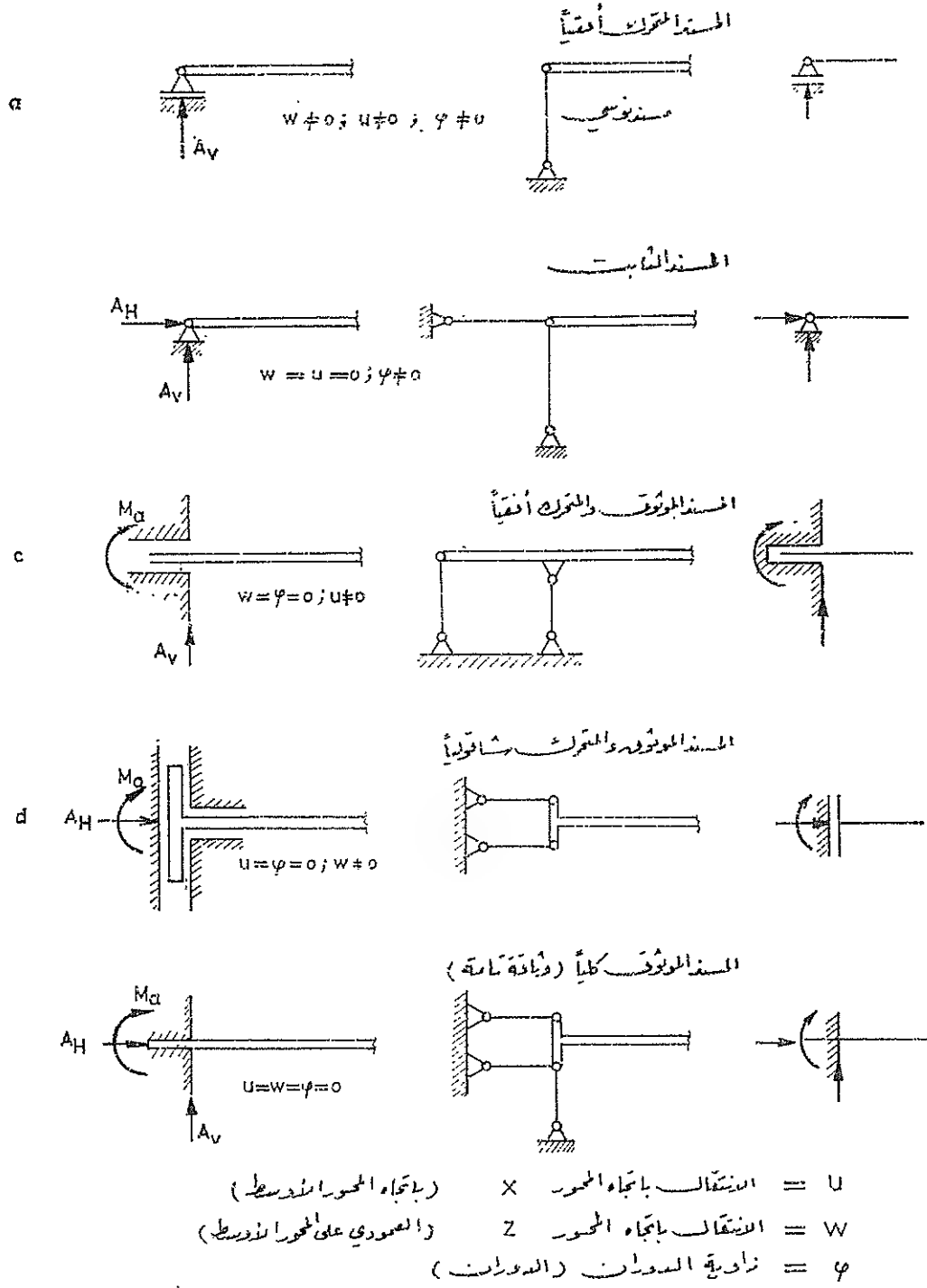
٢ - ان منع الحركة الانتقالية كلياً يستلزم وجود مركبتين لرد الفعل عند نقطة الاستناد .

٣ - ان منع الحركة الدورانية عند اي مسند يستلزم وجود عزم (عزم ازدواج) يؤثر على الانشاء عند نقطة الاستناد وبالتالي فان السماح بدوران الانشاء حول نقطة الاستناد لا يتم الا اذا انعدم هذا العزم بحيث تكون قوة رد الفعل مارة بنقطة الاستناد ذاتها .

يسمى عزم الازدواج الذي يتولد عند نقطة الاستناد احياناً عزم الوثاقة (او عزم التثبيت) . وتنقسم المساند عادة الى الانواع الاساسية التالية :

١ - المسند المفصلي المتحرك (وهو مسند وحيد القيمة) :

يسمح هذا المسند بالدوران كما يسمح بالحركة باتجاه ما (نقطة الاستناد لها امكانية الدوران وامكانية الحركة باتجاه ما) . وعلى ذلك فان رد الفعل فيه يتكون من مركبة واحدة ناظمية



شكل 1-3

على الاتجاه المسموح فيه بالحركة الانتقالية . ويرمز لهذا النوع من المساند بالرمز المعطى في الشكل (1-3 a) . ومن الواضح ان هذا المسند المتحرك عبارة عن مسند مفصلي ثابت يتحرك على اسطوانات معينة تسمح له بالانتقال .

٢ - المسند التومسي (وهو مسند وحيد القيمة) :

وهذا المسند موضح في الشكل (1-3a) ويتصل فيه الانشاء عند نقطة الامتداد اتصالاً مفصلياً بجسم مستقيم يستند مفصلياً عند طرفه الآخر على شيء ثابت وهذا النوع من المساند يسمح بالدوران عند نقطة اتصاله بالانشاء كما يسمح بالحركة باتجاه ناظمي (عمودي) على الخط الواصل بين المفصلين وهو لهذا يعتبر نوعاً ثانياً من انواع المساند المتحركة ، وهو اكثر شيوعاً في الانشاءات البيتونية المسلحة لسهولة عمله وقلة تكاليفه بالنسبة للمسند المفصلي المتحرك الممثل في الشكل (1-3a) الذي يستعمل في الانشاءات المدنية الكبيرة نسبياً .

٣ - مسند مفصلي ثابت (وهو مسند ثنائي القيمة) :

وهذا النوع من المساند يسمح بالدوران فقط ولكنه لا يسمح بالحركة الانتقالية في اي اتجاه (نقطة الامتداد لها فقط امكانية الدوران) . ولذا فان رد الفعل عنده يتكون من مركبتين للقوى وهما : قوة افقية A_H وقوة شاقولية A_V والرمزان الدالان على هذا النوع من المساند موضحان في الشكل (1-3b) . هذا المسند اقل تعقيداً وأقل في النفقات من المسند المتحرك كما انه أسهل المساند عملاً .

في بعض الاحيان تسمى كل من المساند المفصلية الثابتة والمتحركة بالمسند البسيطة وقد يكون ذلك لانعدام عزوم الوثاقة (عزوم التثبيت) في ردود الفعل عندها .

٤ - المسند الموثوق :

أ - المسند الموثوق كلياً (المسند تام التثبيت) (وهو مسند ثلاثي القيمة) :

هو المسند الذي لا تسمح عنده بالحركة، سواء أكانت انتقالاً او دورانياً (نقطة الامتداد او ما تسمى بنقطة الوثاقة ليس لها امكانية الحركة مطلقاً) . فاذا رمزنا لمركبات الحركة الانتقالية في الاتجاهين الافقي والشاقولي على التوالي بالرمزين u , w و مقدار الدوران بالزاوية φ فان :

$$u = w = \varphi = 0$$

ونتيجة لذلك فانه يلزم ان يكون لرد الفعل عند هذا المسند ثلاث مركبات بصفة عامة وهي قوة افقية A_H وقوة شاقولية A_V وعزم وثاقة M_A . ومن الممكن ان تصبح احدى هذه

المركبات مساوية للصفر نتيجة لحولات معينة كأن تكون الحولات الخارجية مثلاً شاقولية وانذاك فإن A_{II} تنعدم . والرمز المستعمل عادة للدلالة على هذا المسند الموثوق كلياً موضح في الشكل (1-3 e) .

ب - المسند الموثوق والمتحرك شاقولياً (وهو مسند ثنائي القيمة) :

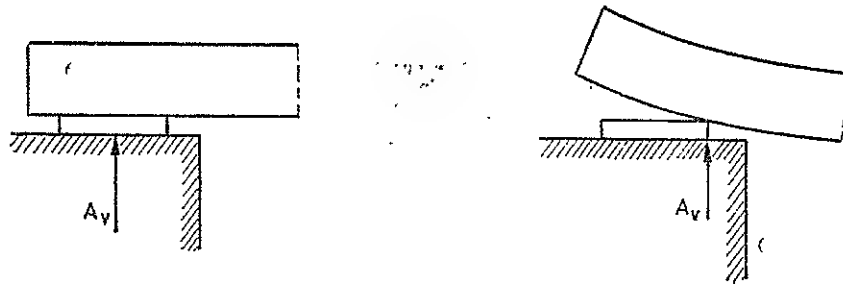
هذا المسند لا يسمح بالدوران ولا بالحركة الانتقالية الأفقية لكنه يسمح بالحركة الانتقالية الشاقولية (نقطة الاستناد ليس لها إلا امكانية الحركة الانتقالية الشاقولية) . وعلى ذلك فإن رد الفعل فيه يتكون من قوة أفقية وعزم وثيقة ولهذا يعتبر مسنداً ثنائي القيمة . والرمز المستعمل عادة للدلالة على هذا المسند موضح في الشكل (1-3 d) .

ج - المسند الموثوق والمتحرك أفقياً : (وهو مسند ثنائي القيمة) :

هذا المسند لا يسمح بالدوران ولا بالحركة الانتقالية الشاقولية لكنه يسمح بالحركة الانتقالية الأفقية (نقطة الاستناد ليس لها إلا امكانية الحركة الانتقالية الأفقية) . وعلى ذلك فإن رد الفعل فيه يتكون من قوة شاقولية وعزم وثيقة ولهذا يعتبر مسنداً ثنائي القيمة . والرمز الدال على هذا المسند موضح في الشكل (1-3 c) .

في حالة الحولات الخفيفة ، كما في جيزان السقوف العادية ، توضع عادة نهايات الجائز (الحامل) بكل بساطة على القاعدة التي قد تكون جداراً (بالطبع بعد تقوية الجداراو بعد وضع صفيحة للقاعدة) دون بناء جسم استناد خاص تحتها . هذا النوع من الاستناد كما في الشكل (1-4) هو أبسط انواع الاستناد ولا يستعمل في الانشاءات ذات الحولات الكبيرة ، حيث يلزم هناك اللجوء الى استخدام احد اشكال الاستناد المشار اليها في الحالات السابقة .

في الحالة البسيطة للاستناد (الاستناد المباشر) ، اذا استند الجائز بشكل نظامي فان رد فعل المسند يمر من منتصف صفيحة الاستناد ولكن تحت تأثير التحميل فان الجائز يتغير وعندها لا يستند الجائز الا على طرف الصفيحة وبذلك ينتقل رد الفعل الى ذلك الطرف.ينجعمما ذكر



شكل 1-4

لهذا المسند البدائي المحذوران التاليين :

- ١ - ان موقع رد الفعل وطول الجائز الفعال ليسا ثابتين ويتغيران بعد التحميل .
- ٢ - يتعرض المسند الى اجهاد موضعي كبير .

١ - ٣ أنواع الانشاءات :

١ - ٣ - ١ تنقسم الانشاءات تبعاً للفرضيات الحسائية الى الانواع الاساسية الثلاثة التالية :

- ١ - الانشاءات الخطية (الاجسام الحاملة الخطية) .
- ٢ - الانشاءات السطحية (الاجسام الحاملة السطحية) .
- ٣ - الانشاءات الكتلية (الاجسام الحاملة الكتلية) .

٥ - الانشاءات الخطية :

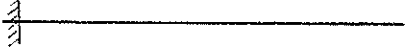

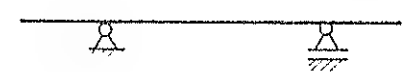
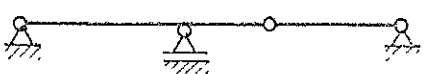
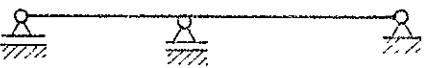

هذا النوع من الانشاءات تكون فيه أبعاد المقطع العرضي اصغر بكثير من الطول او بكلام آخر الانشاءات التي يكون فيها احد الابعاد (هنا الطول) اكبر بكثير من البعدين الاخرين (هنا العرض والارتفاع) وهي ما تولد عن حركة سطح معين عمودياً على خط معاوم بحيث يمر الخط دائماً من مركز ثقل هذه المساحة ويمثل هذا الخط محور الانشاء (المحور الاوسط للانشاء) . قد يكون المحور الاوسط خطاً مستقيماً او خطاً منحنياً او مركباً من خطوط مستقيمة وخطوط منحنية ، كما ان السطح الممثل للمقطع العرضي قد يظل ثابتاً وقد يتغير على طول المحور . في الحالة الاولى يكون الانشاء ذا مقطع عرضي ثابت وفي الحالة الثانية يكون ذا مقطع عرضي متغير . في جميع حالات الانشاءات الخطية هذه يمكن تمثيل الانشاء بالخط الدال على المحور دون اعتبار لشكل مقطعه العرضي .

٥ - ١ تقسيم الانشاءات الخطية بالنسبة لشكل المحور :

تنقسم الانشاءات الخطية بالنسبة لشكل المحور الى الانواع الرئيسية التالية :

- ١ - الجيزان القضيبي المستقيمة (الجمل الحاملة القضيبي المستقيمة ، الحوامل القضيبي المستقيمة) : وهي التي يكون محورها خطاً مستقيماً (شكل 1-4b) .
 - ٢ - الجيزان القوسية (الجمل الحاملة القوسية ، الاقواس) :
- وهي التي يكون فيها المحور خطاً منحنياً وبشروط الا يسمح في مساندها بالحركة الانتقالية





الجزيان القضيبيّة المستقيمة

- a جاذب بارز (ظفر) 
- b جاذب بسيط 
- c جاذب بسيط محدد الأطراف 
- d جاذب مفصلي (جاذب حديد) 
- e جاذب مستمر (غير مقدر سائيكياً) 
- f جاذب موثوق من الطرفين (غير مقدر سائيكياً) 

شكل 1-4b

وذلك بأن تكون مساندها من النوع التثبيت (الموثوق) او النوع المفصلي الثابت (شكل 1-5) فاذا كانت احدى المسانده من النوع البسيط المتحرك اصبحت الانشاء نوعاً خاصاً من انواع الجزيان القضيبيّة ذات المحور المنحني ولكنه لا يكون قوساً .

الجزيان القوسية (الافتواس)

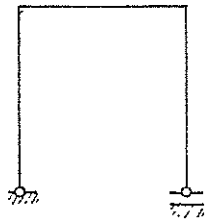
- قوس ثنائي المفصل (غير مقدر سائيكياً) 
- قوس ثلاثي المفصل 
- قوس موثوق (غير مقدر سائيكياً) 
- قوس مستمر (غير مقدر سائيكياً) 

شكل 1-5

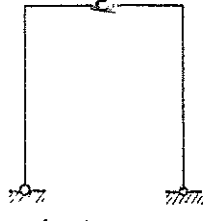
٣ - الجيزان الاطارية (الجمل الحاملة الاطارية ، الاطارات) :

وهي التي يكون فيها المحور مضلعاً ولا يشترط فيها نوع معين من المساند (شكل 1-6).

(الجيزان الاطارية (الهندسية) (البدلانات)



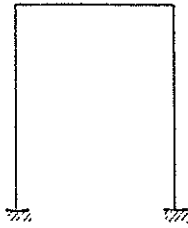
إطار بسيط



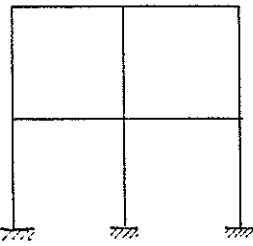
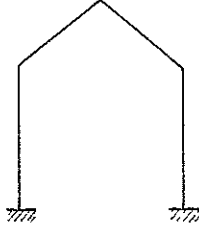
إطار ثنائي المفصل



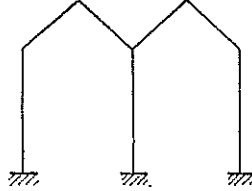
إطار ثنائي المفصل
(غير مستاتيكي)



إطار موقوف (غير مستاتيكي)



إطار طابقي (غير مستاتيكي)



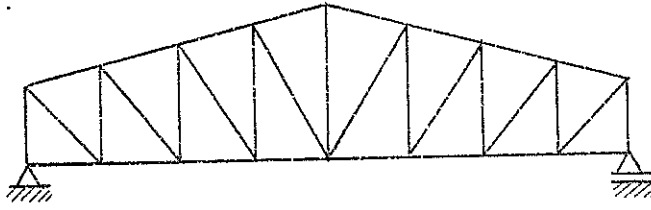
إطار مسفر (غير مستاتيكي)

شكل 1-6

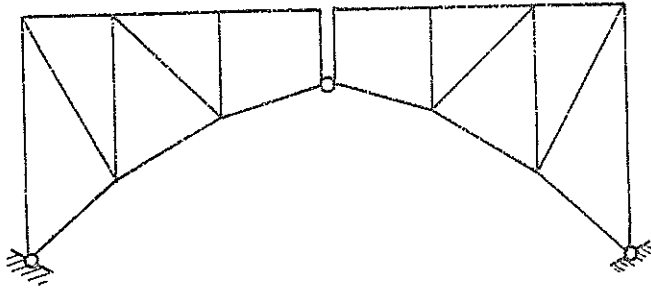
٤ - الجيزان الشبكية (الجمل الحاملة الشبكية ، الشبكيات) :

ويتكون الانشاء في هذه الحالة من مجموعة من القضبان تتصل ببعضها اتصالاً مفصلياً ، حتى تبدو وكأنها غزل شبكي مفصلي (شكل 1-7) .

الجيزان الشبكية (الشبكيات)



جائز شبكي بسيط



جائز شبكي ثلاثي المفصل

شكل 1-7

٥ - ٢ تقسيم الانشاءات الخطية بالنسبة لنوع المساند :

يمكن تقسيم الانشاءات الخطية تبعاً لنوع المساند وعددها الى عدة أقسام أخرى. ففي الانشاءات القضيية المستقيمة مثلاً يفرق بين الانواع التالية :

آ - الجائز البارز (الجائز الموثوق من طرف والخر من الطرف الآخر ، الظفر ، الجائز الحر) :

ويستند على مسند واحد من النوع الموثوق (التام التثبيت) (شكل 1-4 a) .

ب - الجائز البسيط (الجائز البسيط المسنود على مسندين بسيطين) :

ويستند على مسندين مفصلين في طرفيه أحدهما ثابت والآخر متحرك (شكل 1-4 b).

ج - الجائز البسيط ممتد الاطراف (جائز ممتد الاطراف) :

ويكون فيه المسندين المفصلين بعيدين ، أحدهما او كلاهما عن طرف الجائز بحيث يمتد جزء من الجائز الى ما بعد المسند (شكل 1-4 c) .

د - الجائز المستمر :

ويستند هذا الجائز على اكثر من مسندين مفصلين (شكل 1-4 e) .

هـ - الجائز المفصلي (جائز جربر) :

وهو جائز مستمر ذو اتصال مفصلي من الداخل عند مجال او اكثر لامكان إيجاد حل ستاتيكي بسيط له (شكل 1-4 d) .

و - الجائز الموثوق :

وهو جائز (حامل) ذو مسندين من النوع الموثوق في طرفيه (شكل 1.4 f) .
وتعطي الاشكال (1-5) ، (1-6) ، (1-7) بعض النماذج لانواع الانشاءات الخطية المختلفة الاخرى ومن السهل تتبع هذه النماذج .

α - ٣ تقسيم الانشاءات الخطية حسب طبيعة تحملها :

يمكن تقسيم الانشاءات الخطية تبعاً لطبيعة تحملها الى القسمين التاليين :

١ - الحبل (السلسلة) : عنصر انشائي خطي باستطاعته تحمل قوى طولية (قوى ناظمية) شادة فقط .

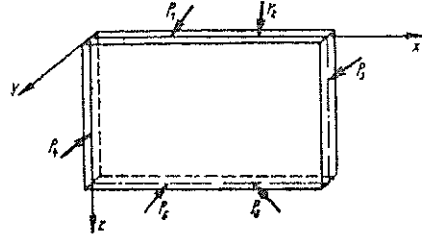
٢ - القضيب : عنصر انشائي خطي بمقدوره تحمل قوى ناظمية شادة وضاغطة وكذلك قوى عرضية (عمودية على المحور الاوسط) وعزوم .

β - الانشاءات السطحية :

هذا النوع من الانشاءات هو الذي لا ينطبق عليه التعريف السابق للانشاءات الخطية ، بل تكون فيها أحد الأبعاد (السهكة) أصغر بكثير من البعدين الآخرين (الطول والعرض) وهي تكون من سطوح رقيقة نسبياً ويمكن تقسيمها الى الأنواع التالية :

١ - الاقراص (الالواح) :

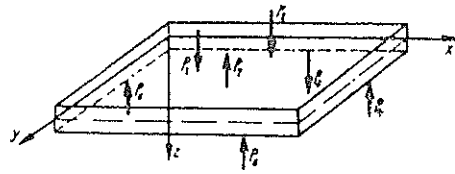
هي عبارة عن عناصر انشائية مستوية (سطوح مستوية) سماكتها أصغر بكثير من طولها وعرضها . ينطبق مستوي التحميل في الاقراص على السطح الاوسط (شكل 1-8) .



شكل 1-8

٢ - الصفائح (البلاطات) :

وهي عبارة عن عناصر انشائية مستوية (سطوح مستوية) سماكتها أصغر بكثير من طولها وعرضها . يتم التحميل في البلاطات عمودياً (ناظمياً) على سطحها الاوسط (شكل 1-9) .



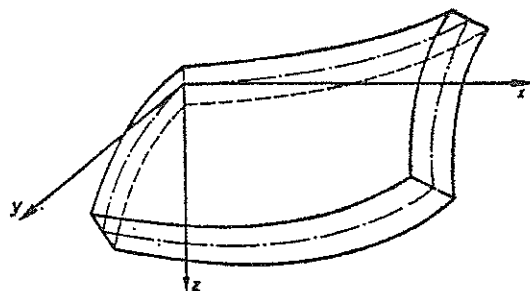
شكل 1-9

٣ - القشريات :

وهي عبارة عن عناصر انشائية منحنية ، منها ماهو منحني باتجاه واحد كان تكون اسطوانية ويمكن أن يكون المقطع العرضي للاسطوانة دائرياً او على شكل قطاع من الدرجة الثانية ويكون المحور الطولي للاسطوانة هو محور الانشاء القشري وتكون جميع الرواسم موازية لهذا المحور . والانابيب نوع من هذه القشريات ، ومنها ماهو منحني باتجاهين كالقباب مثلاً والتي يمكن ان تتصور تولدها ناتج عن دوران منحني معين حول خط في مستواه ويمثل هذا الخط محور القبة ويكون عادة شاقولياً . أما الجحولات الخارجية فتؤثر على القشريات بكل اتجاه .

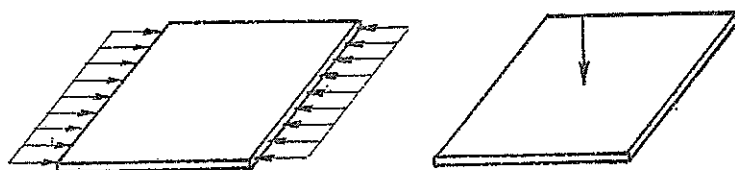
لقد لقي هذا النوع من الانشاءات (القشريات) اقبالا متزايداً في الفترة الاخيرة وتبعاً لهذا

فلقد نالت دراسته النظرية اهتماما خاصا من المهندسين الانشائيين الذين يعمد اليهم بتصميم هذا النوع من الانشاءات القشرية (شكل 1-18) .



شكل 1-10

تختلف الصفائح (البلاطات) والاقراص (الالواح) والقشريات عن بعضها البعض فقط بأن السطح الاوسط للصفیحة والقرص هو سطح مستوي بينما يرى ان السطح الاوسط للقشرية هو سطح منحنى وكذلك فان اتجاه تأثير الحمولات الخارجية في الصفائح والاقراص محدد بينما لا يتحدد اتجاه التأثير في القشريات (شكل 1-11) .



قرص (لوح)

بلاطة (صفیحة)



انشاء سطحي مستوي
(بلاطة أو قرص)

انشاء سطحي منحنى
قشري

شكل 1-11

١ - ٣ - ٢ تقسيم الانشاءات تبعاً لدرجة التقرير الستاتيكية :

ويمكن من ناحية اخرى تقسيم الانشاءات حسب درجة التقرير الستاتيكية الى النوعين التاليين :

١ - انشاءات مقررة ستاتيكياً .

٢ - انشاءات غير مقررة ستاتيكياً .

والنوع الاول من هذه الانشاءات هي تلك التي يمكن فيها تحديد جميع مركبات رد الفعل وكذلك القوى الداخلية عند اي قطع (ردود افعال القطع او ما تسمى ايضا بقيم القطع) باستخدام شروط التوازن الستاتيكية فقط . أما النوع الثاني فيقصد به تلك الانشاءات التي تزيد فيها مركبات رد الفعل عن الشروط الممكن استخدامها لتحقيق التوازن وفي هذه الحالة لا تكفي شروط التوازن وحدها لتحديد قيم مركبات رد الفعل (ردود افعال المساند وردود الافعال الداخلية) ويلزم في هذه الانشاءات دراسة التغير الناتج في ابعاد الانشاء وفي مواضع استناده لايجاد شروط تكميلية تساعد على حساب مركبات ردود الفعل . وقد وضع امام الانشاءات غير المقررة ستاتيكياً في الناذج الموضحة بالشكل (1-4) حتى (1-6) كلمة غير مقرر ستاتيكياً . ومن السهل مراعاة ان عدد مركبات رد الفعل الخارجي في كل هذه الناذج يزيد على ثلاث مركبات وهي ما لا يمكن تحديده بشروط التوازن الستاتيكية وحدها . وفي بعض الحالات يكون الانشاء مقررأ ستاتيكياً من تلخارج بمعنى انه يمكن تحديد مركبات ردود افعال المساند من شروط التوازن الستاتيكية ولكنه مع ذلك يظل غير مقرر ستاتيكياً من الداخل بحيث لا يمكن ايجاد القوى الداخلية المؤثرة على قطوعه دون الاستعانة بدراسة التغير الذي يطرأ على شكل الانشاء نتيجة للحمولات المؤثرة عليه . وابسط مثل لهذا النوع من الانشاءات هو إطار مغلق يستند استناداً بسيطاً على مسندين مفصليين ، احدهما ثابت والآخر يسمح بالحركة الانتقالية ، وغني عن البيان ان قوى ردود افعال المساند في حالة انشاءات السطوح القشرية تكون موزعة على اطرافها . وتتوقف قيم هذه القوى على طريقة استناد هذه الاطراف وهو ما يطلق عليه اسم شروط الاطراف وهي على كل حال غير مقررة ستاتيكياً سواء من الداخل او الخارج ومع ذلك فان من الممكن في بعض الاحيان معاملة هذه السطوح القشرية بطريقة سهلة تقريبية وذلك بردها الى نوع مشابه من انواع الانشاءات الخطية اذا كانت ابعادها الخارجية وسمك النشاء القشري تسمح من ذلك .

١ - ٤ انواع المحولات

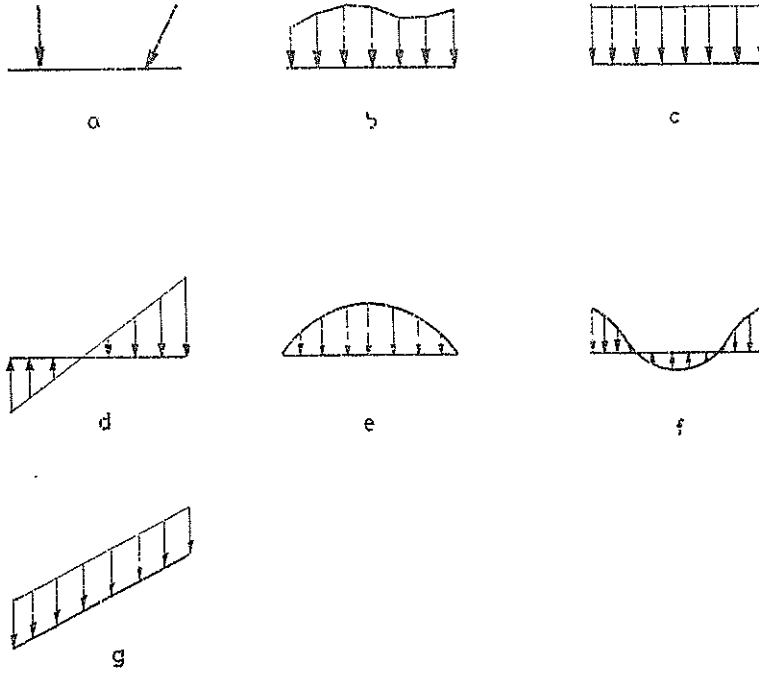
١ - ٤ - ١ تقسيم المحولات حسب توزيعها

يمكن تقسيم المحولات حسب توزيعها الى :

١ - حملات وحيدة (حملات مركزة) .

٢ - حملات موزعة .

الحملة الوحيدة (الحملة المركزة): هي التي تؤثر عند نقطة معينة وفي اتجاه معلوم (شكل 1-12 a) ومن الواضح ان تركيز الحمل في نقطة واحدة امر لا يمكن تحقيقه بسهولة وذلك لان هذه الحملات لا بد وان تمتد تأثيرها الى مساحة ما حول نقطة تأثيرها (نقطة تطبيقها ، نقطة فعلها) على الانشاء . ولكن تأثير هذا التوزيع المحدود يكون من الضالة بحيث يمكن اهماله .
الحملة الموزعة : هي التي لا يتركز تأثيرها عند نقطة معينة وانما تمتد الى منطقة كبيرة من الانشاء كما هو مبين في الشكل (1-12 b) ويبين التفسير (التظليل) شدة الحمل عند كل نقطة . والحملة الموزعة يمكن ان تكون موزعة بانتظام كما في الشكل (1-12 c) أو موزعة بغير انتظام وذلك كما في الشكل (1-12 d) . كما ان الحملات غير الموزعة بانتظام يمكن مع هذا ان تحقق علاقات هندسية معلومة كأن يكون التغير في الشدة خاضعاً لعلاقة خطية من الدرجة الاولى بشكل (1-12 d) ويسمى التوزيع في هذه الحالة توزيعاً خطياً (حملات خطية التوزيع) او لعلاقة تحددها معادلة قطع مكافئ من الدرجة الثانية او اكثر شكل (1-12 e) ويمكن ان يسمى



شكل 1-12

هذا توزيعاً مكافئاً وأخيراً بين الشكل (1-12 f) حمولات موزعة على هيئة منحني جيبي أو جيب تمام . وليس من الضروري أن تكون الحمولات الموزعة متعامدة مع محور الانشاء عند نقاط تأثيرها ، وبين الشكل (1-12 g) حمولة شاقولياً موزعة بانتظام تؤثر على محور مائل . وبملاحظة في هذه الحالة أن يحدد تهشير (تظليل) الحمولة باتجاه هذه الحمولة (يحدد تظليل الحمولة اتجاه هذه الحمولة) . ولهذا يظهر التهشير في الشكل 1-12 g شاقولياً ليدل على أن الحمولة شاقولية . وتعطي الشدة عند أي نقطة في هذه الحالة بمقدار ما يقع على المتر الطولي من الحمولة . ويجوز أن يكون هذا الطول في الاتجاه الأفقي وتسمى الشدة في هذه الحالة : شدة على المتر الأفقي ويجوز أن يكون قياس المتر على طول المحور المائل وتسمى هذه الشدة : شدة على المتر المائل . ومن الواضح أن قيمة الشدة للحمولة معينة إذا أعطيت على المتر الأفقي تكون أكثر منها لو أعطيت على المتر المائل وذلك لأن المتر الأفقي يقابل طولاً أكبر من متر على المائل . وعلى العكس من ذلك فإن حمولة معينة شدة ما على المتر الأفقي تكون أقل من حمولة تحددها نفس القيمة العددية لشدة ولكن على المتر المائل وذلك لنفس السبب السابق .

١ - ٤ - ٢ تقسيم الحمولات حسب طبيعة عملها .

ويمكن تقسيم الحمولات أيضاً تبعاً لطبيعة عملها (بالنسبة لزمن تأثيرها) إلى النوعين التاليين

١ - حمولات دائمة (حمولات ميتة ، حمولات ثابتة) .

٢ - حمولات متحركة (حمولات حية) .

ويقصد بالنوع الأول (الحمولات الدائمة) تلك الحمولات التي لا تتغير في القيمة أو الموضع وذلك مثل وزن الانشاء الذاتي (الوزن الذاتي للانشاء) .

أما الحمولات المتحركة فهي التي تغير وضعها على الانشاء كما يمكن أن تتغير قيمتها وذلك مثل العربات التي تعبر فوق انشاء ما أو الضغوط الناجمة عن هبوب الرياح بشدة أو تأثير ضغط المياه أو التربة على الجدران الاستنادية أو القوى الناشئة من تغير درجات الحرارة أو دوران أجزاء معينة في الانشاء أو تحركها بسرعة .

١ - ٤ - ٣ تقسيم الحمولات تبعاً لأهمية الحمولة على الانشاء .

وهناك تصنيف آخر للحمولات وهو التقسيم تبعاً لأهمية الحمولة على الانشاء وهو يستخدم بكثرة في مواصفات الانشاءات المعدنية .

- ١ - حمولات رئيسية ويرمز لها بالحرف H .
- ٢ - حمولات إضافية ويرمز لها بالحرف Z .
- ٣ - حمولات خاصة ويرمز لها بالحرف S .

ويقصد بالنوع الاول (الحمولات الرئيسية) تلك التي تتألف من الحمولات الدائمة وحمولات المواصلات بما فيها وزن الثاوج دون ضغط الرياح وكذلك قوى الكتل الحرة للآليات . أما حمولات النوع الثاني (الحمولات الاضافية) فهي تلك التي تتألف من حمولات الرياح (ضغط الرياح) قوى الاقلاع والفرملة للحمولات المتحركة والقوى الجانبية الافقية (على سبيل المثال الناتجة عن الروافع) والتأثير الحراري (الحرارة الجوية وحرارة العمل) .

١ - ٤ - ٤ تقسيم الحمولات حسب طبيعتها الحركية .

ويمكن تقسيم الحمولات تبعاً لطبيعتها الحركية الى النوعين التاليين :

- ١ - حمولات ستاتيكية (سكونية) .
- ٢ - حمولات ديناميكية (حركية) .

ويقصد بالنوع الاول من الحمولات (الحمولات الستاتيكية) تلك الحمولات الساكنة التي لا تتحرك ، مثل الوزن الذاتي للانشاء . أما النوع الثاني للحمولات (الحمولات الديناميكية) فهي تلك الحمولات التي تتحرك بسرعة ما على الانشاء كحمولات القاطرات او العربات على الجسور مثلاً .

ان حمولة ديناميكية ما تكون اكبر من نفس الحمولة لو اصبحت حمولة ستاتيكية .

الفصل الثاني

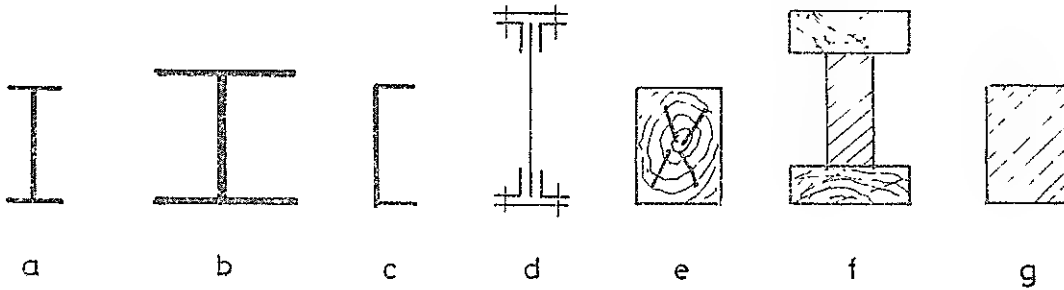
الجيزان المقررة ستاتيكياً

٢ - ١ مقدمة وتعريف

يفهم مبدئياً تحت كلمة جائر ، العنصر الانشائي الخطي (القضبي) الذي يغطي فراغاً أو الذي يبرز من فراغ والذي انشأ لتحمل المحولات .

سوف تم في هذا الفصل دراسة بعض الجيزان المقررة ستاتيكياً والتي بكثر استعمالها في الحياة العملية ، نذكر منها الجائر البسيط (الجائر المسنود على مسندين بسيطين) والجائر البسيط ممتد الاطراف والجائر البارز (الظفر) والجائر المفصلي (جائر جربر) والجائر الاطاري والجائر القوسي والجائر الشبكي .

ينبغي ان تتوافق اشكال المقاطع العرضية للجائر مع المادة المكونة له ، على سبيل المثال فولاذ ، خشب ، بيتون مسلح ، بيتون مسبق الاجهاد ، مواد لدنة (مواد بلاستيكية) والنخ .



شكل 2-1

تشير الاشكال (2-1) الى بعض المقاطع العرضية المستخدمة في الانشاءات . فعلى سبيل المثال يمثل الشكل (2-1a) بروفيل عادي بشكل حرف I ويمثل الشكل (2-1b) بروفيل بشكل حرف I من النوع الخاص ذو الاجنحة المتوازية العريضة ولذلك يرمز له بالحرف IP للتفريق بينهما وبين البروفيل السابق . اما الشكل (2-1c) فيمثل بروفيل على شكل حرف C . كل هذه المقاطع

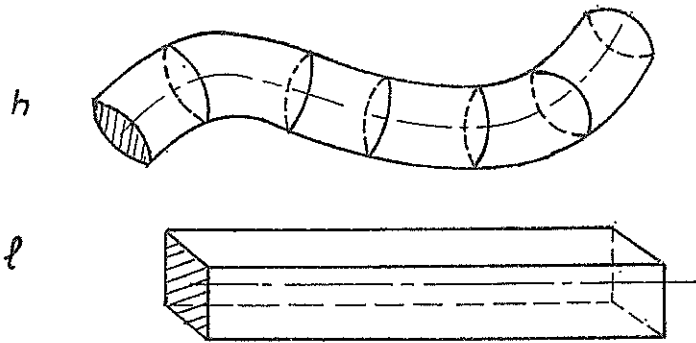
العرضية المسماة بالبروفيلات تصنع بواسطة الدرفلة ، أبعادها ومقاييسها وقيمها الستاتيكية مثبتة في جداول المواصفات .

تستخدم في الانشاءات المعدنية الكبيرة جيزان بحمة مصنوعة من صفائح وزوايا فولاذية مبرشمة أو ملحومة (شكل 12-1d) .

تشير الاشكال (2-1 e,f) إلى بعض المقاطع العرضية المصنوعة من الخشب والتي يعتبر من أبرزها وأكثرها استعمالاً هو المستطيل (المقطع العرضي مستطيل الشكل) كما تشير أيضاً الى مقطع عرضي آخر يشابه المقاطع العرضية الفولاذية في الشكل وهو يستخدم لحمل حمولات عالية .

يشير الشكل (2-1g) الى مقطع عرضي مصنوع من البليتون المسلح . كما ان هناك أشكال كثيرة من المقاطع العرضية لا حصر لها .

يسمى الخط الواصل بين مراكز ثقل المقاطع العرضية لجائز بمحور الجائز أو أيضاً محور القضيبي (المحور الاوسط) . اما التسمية الاخيرة (محور القضيبي) فقد نتجت عن النظرية المعتادة التي تعتمد على أبعاد الجائز والتي تفترض ان الجائز طويل جداً بالنسبة لابعاد مقطعة العرضي وبذلك يظهر كقضيبي رفيع . أما محور القضيبي (المحور الاوسط) فيمكن أن يكون مستقيماً (شكل 2-1e) أو منحنياً (شكل 2-1h) أو مركباً من خطوط مستقيمة وخطوط منحنية .



شكل 2-1 h,e

ليكون الجائز متوازناً (توازن مستقر) يجب ان يستند استناداً كافياً . تسمى مواضع استناد الجائز بمساند الجائز . يؤثر الجائز الحمل على المساند بقوى (قوى فعل) فترد عليه المساند

(حسب مبدأ الفعل ورد الفعل) بقوى معاكسة تكافئها (تساويها قيمة وتعاكسها اتجاهاً) وتسمى بردود أفعال المساند (أو قوى الاستناد أو أيضاً قوى المساند) .
تدخل جميع القوى المؤثرة على الجائز من الخارج (الحملات) وردود أفعال المساند تحت اسم الحملات الخارجية .

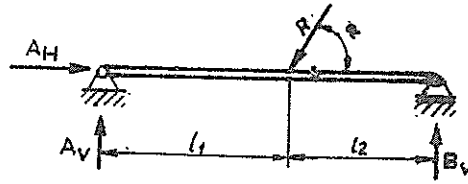
٢ - ٢ ردود أفعال المساند وطرائق إيجادها

٢ - ٢ - ١ الاستناد بواسطة مسند ثابت ومسند متحرك

إذا استند الجائز كما في الشكل (2-2) على مسندين أحدهما ثابت والآخر متحرك عندئذ تتشكل ٣ مركبات لردود أفعال المساند . لإيجادها هناك طريقتان ، الأولى تحليلية (ويتم بتطبيق شروط التوازن المستوية) والثاني تخطيطي (ويتم بتحقيق شروط التوازن المستوية تخطيطياً) .

أ - الطريق التحليلي لإيجاد ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن المستوية ينتج :



شكل 2-2

$$\Sigma H = 0 : A_H - P \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v (l_1 + l_2) - P \sin \alpha \cdot l_1 = 0$$

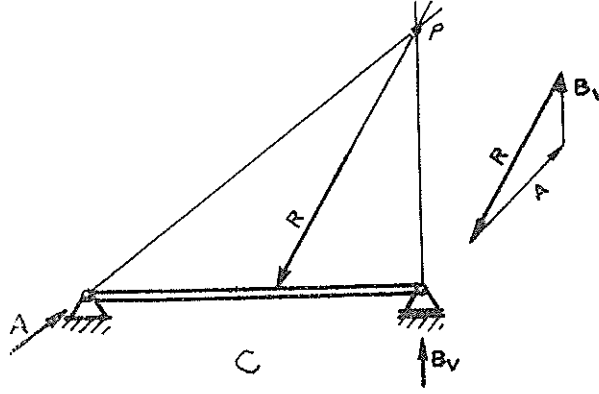
بحل هذه المعادلات يتم الحصول على ردود أفعال المساند المجهولة (يفضل اختيار ترتيب تطبيق شروط التوازن بحيث تعطي فيه كل معادلة وفي كل مرة مجهولاً جديداً ان أمكن وذلك حتى لا يضطر في نهاية الامر لحل مجموعة معادلات خطية بعدة مجاهيل) :

$$A_H = P \cos \alpha$$

$$A_v = \frac{l_2}{l_1 + l_2} P \sin \alpha$$

$$B_v = \frac{l_1}{l_1 + l_2} P \sin \alpha$$

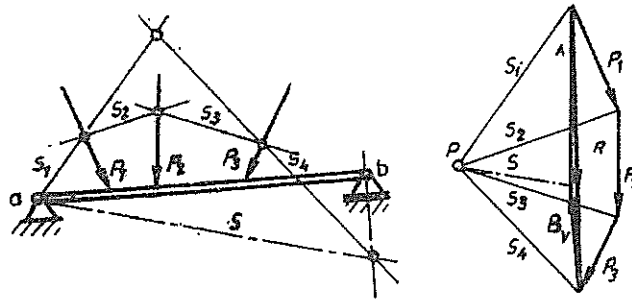
ب - الطريق التخطيطي لإيجاد ردود أفعال المساند :



شكل 2-3

أثناء إيجاد ردود أفعال المساند بالطريقة التخطيطية يتوجب مرور حامل قوة رد الفعل A من النقطة c ، النقطة الناتجة عن تقاطع حامل رد الفعل Bv الشاقولي مع حامل القوة الخارجية P (شكل 2-3)، هذا يعني ان القوى A و Bv و P التي تؤثر على الجسم تتلاقى في نقطة واحدة وبذلك فان شرط توازن العزوم $\Sigma M_v = 0$ محقق .

ج - طريقة المضلع الجلي لإيجاد ردود أفعال المساند :



شكل 2-4

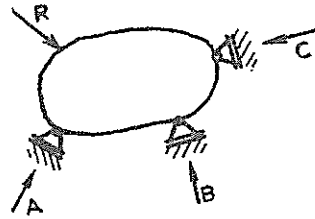
يشبه ، أثناء إيجاد ردود أفعال المساند بواسطة المضلع الجلي ، الانتباه لوجوب مرور الشعاع الجلي الاول (في هذه الحالة الشعاع الجلي S_1) من النقطة a وذلك في حالة كون اتجاه حامل قوة رد الفعل A مجهولا (شكل 2-1) وذلك لان النقطة a هي النقطة الوحيدة المعلومة من حامل القوة A .

يسمى الخط الواصل بين النقطة a وبين نقطة تقاطع الشعاع الجلي الاخير (في هذه الحالة S_4) مع حامل القوة B_v بخط النهاية (او خط الاغلاق) . من مخطط القوى ، يستطيع بواسطة S_4 و S إيجاد رد الفعل B_v وبواسطة S_1 و S يستطيع إيجاد رد الفعل A .

تتوازن مجموعة القوى المستوية العامة (اللامركزية) عندما ينلق مضلع القوى وكذلك المضلع الجلي .

٢ - ٢ - ٢ الاستناد بواسطة ثلاث مساند او ثلاثة قضبان

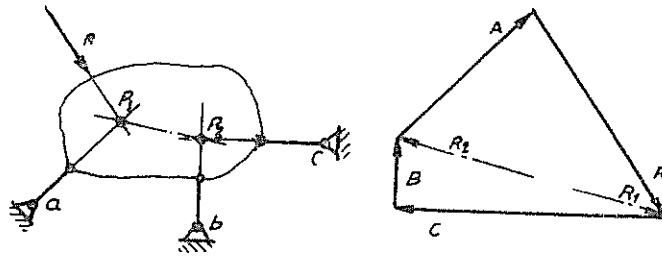
يكفي استناد جسم على ثلاث مساند متحركة (شكل 2-5) الاستناد على ثلاثة قضبان (شكل 2-6) .



شكل 2-5

بالامكان تركيب (جمع) القوى A و P والحصول على المحصلة R_1 كما يمكن تركيب القوى B و C للحصول على المحصلة R_2 .

يسود التوازن عندما تكون $R_1 = -R_2$. مما ذكر يستخلص بأن الحامل المشترك للقوى R_1 و R_2 يجب ان يمر من النقاط p_1 و p_2 . يسمى الخط الواصل بين النقاط p_1 و p_2 بمستقيم كولمان . بواسطة هذا الخط المستقيم يمكن إيجاد ردود أفعال المساند من مخطط القوى . يمكن ان يتم تحليل القوى في مضلع القوى ايضاً ، شريطة الانتباه الى امكانية بناء مفصل في كل نقطة تقاطع قضيبين وكذلك الى وجوب مرور الشعاع الجلي الاول من تلك النقطة . اما متابعة الحل فتتم تماماً كما في الفقرة ١ - ٣ - ٢ (I)

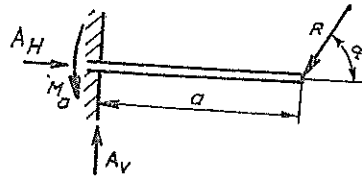


شكل 2-6

بتطبيق شروط التوازن (شروط توازن القوى وشروط توازن العزوم) يتم هنا ايضا ايجاد ردود افعال المساند تحليلياً (يفضل هنا تطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة p_2) .

٢ - ٢ - ٣ الوثيقة

بتطبيق شروط التوازن الثلاثة ، يتم ايجاد ردود افعال المساند الثلاثة M_a, A_v, A_H (شكل 2-7) تحليلياً



شكل 2-7

$$1. \sum H = 0 : A_H = R \cos \alpha$$

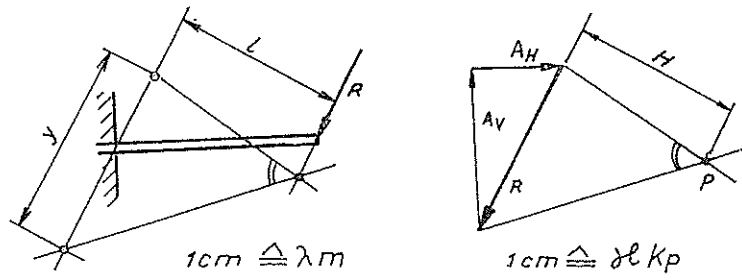
$$2. \sum V = 0 : A_v = R \sin \alpha$$

$$3. \sum M_a = 0 : M_a = a R \sin \alpha$$

بواسطة مضع القوى يمكن ايجاد ردود افعال المساند تخيلياً . المسافة 'y' تكافئ العزم M_a (شكل 2-8) .

$$M_a = lB , \quad \frac{R}{H} = \frac{y}{l} , \quad R.l = yH$$

باستخدام عوامل المقياس ينتج :

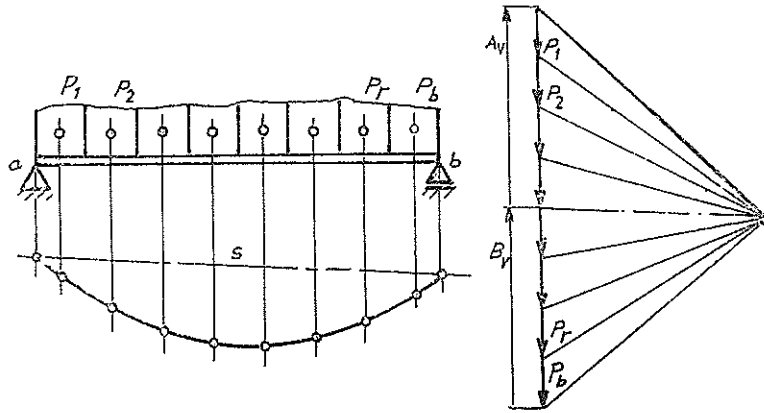


شكل 2-8

٢ - ٢ - ٤ ردود افعال المساند في حالة الحمولات الموزعة

آ - الطريق التخطيطي :

للحصول على قوى ردود افعال المساند تخطيطياً تقسم الحمولة ، التي تحدد بشدتها ، الى شرائح صغيرة . يمكن اعتبار حمولات الشرائح الصغيرة كقوى وحيدة تؤثر في مراكز ثقل تلك الشرائح (شكل 9-2) .



شكل 2-9

بالاستعانة بطريقة المضلع الجلي المنوه عنها في الفقرة ١ - ٣ - ٢ (I) يتم إيجاد قوى ردود افعال المساند . في حالة كون مراكز ثقل سطوح التحميل وكذلك مساحاتها معلومة عندئذ يمكن تمثيل الحمولة الكلية لشريحة التحميل كقوة وحيدة تؤثر في مركز ثقل تلك الشريحة وبعد ذلك يلجأ لإيجاد ردود افعال المساند .

ب - الطريق التحليلي :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - \int_0^L q(x) dx = 0$$

$$\Sigma M_i = 0 : B_v \cdot L - \int_0^L q(x) x dx = 0$$

حيث ان L هو طول المسافة \overline{AB} و x هو الاحداثي الذي يسير باتجاه المحور الاوسط (محور القضيبي) مبتدأ من a ومتجهاً الى b ($0 \leq x \leq L$).
 اما $q(x)$ فهي شدة الجولة (مقاسة بوحدة الجولة الموزعة)، أي واحدة القوة على واحدة الطول) وتعلق بالاحداثي x (وهي تابع للاحداثي x).

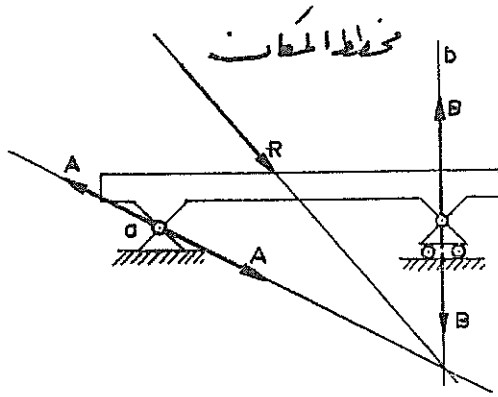
٢ - ٢ - ٥ أمثلة

آ - أمثلة على إيجاد ردود أفعال المساند بالطريقة التخطيطية :

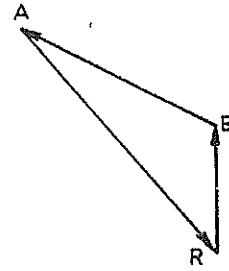
سيتم فيما يلي إيجاد ردود أفعال المساند لبعض الجيزان المستوية ذات الاستناد المقرر ستاتيكيًا بواسطة الطريق التخطيطي .

مثال 1 :

المطلوب: تعيين ردود أفعال مساند الجائز الممثل في الشكل (2-10) وهما A و B والحمل بالقوة الوحيدة R .



مخطط القوى



شكل 2-10

الحل :

يتعين الحامل b للقوة B بواسطة المسند المتحرك أفقياً (إذاً الحامل b شاقولي) .
تمر القوة A من نقطة التماس a للمسند الثابت . والان ينبغي تحقيق حالة التوازن بين
القوة R والقوتين A و B مع العلم بأن نقطة من حامل القوة الأولى (وهي النقطة a)
وحامل القوة الثانية (وهو المستقيم الشاقولي b) معلومين .

يقود الحل التخطيطي لهذه المسألة الى الشكل (2-10) .

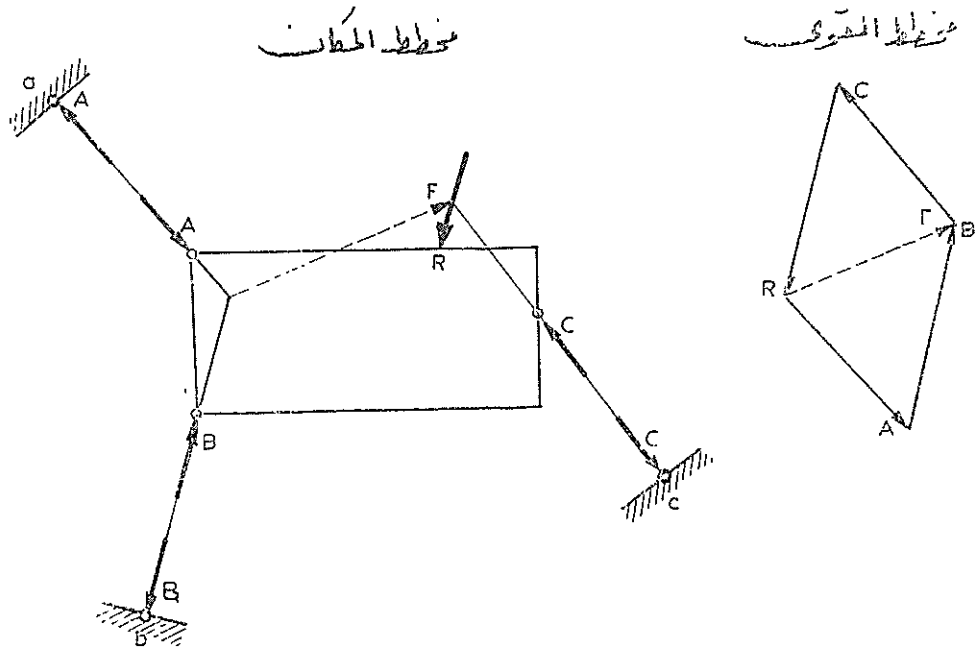
مثال 2 :

تؤثر على جائر يستند على ثلاثة قضبان (هما a, b, c) لا تتلاقى في نقطه واحدة ، القوة
 R (شكل 2-11) .

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائر .

الحل :

يتأخذ حل المسألة بتحليل القوة R المطاة الى ثلاثة مركبات علمت حواملها .

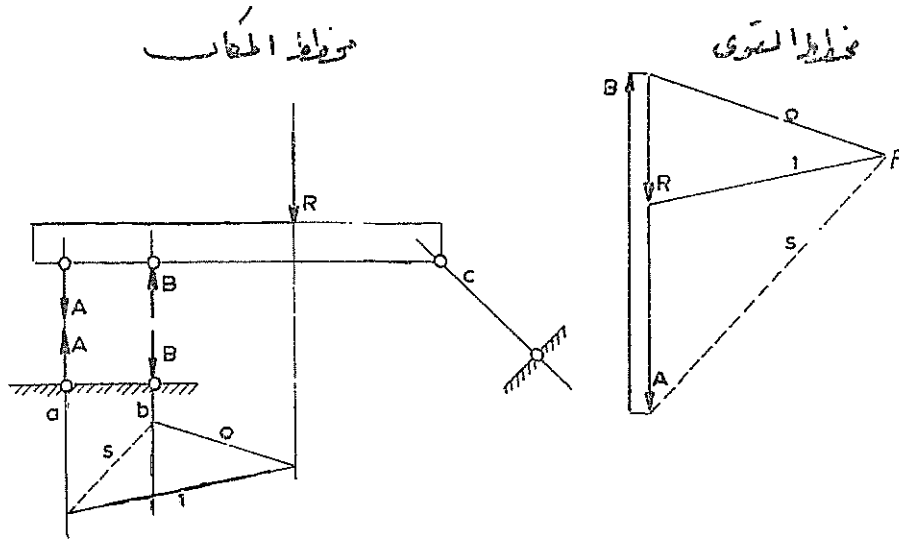


شكل 2-11

لقد استخدمت للحل طريقة كولمان المنوه عنها في الفقرة ١ - ٣ - ٢ (I) والتي يعطي تطبيقها على هذا المثال الشكل (2-11) .

مثال 3 :

تؤثر على جائر مسنود على ثلاثة قضبان (a , b , c) القوة R (شكل 2-12) .
المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند .



(شكل 2-12)

الحل :

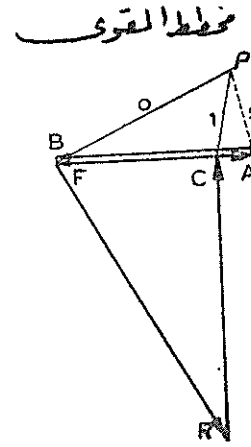
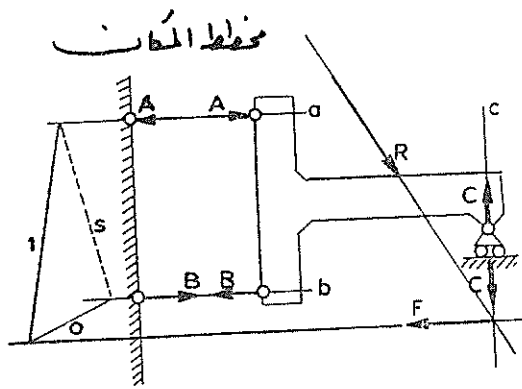
ينعدم رد فعل المسند C وذلك لانعدام المركبات الافقية للقوى A , B , R ، فمركباتها الافقية هي الوحيدة التي تستطيع ان تحقق ، لو كانت موجودة ، مع المركبة الافقية للقوة C حالة التوازن .

لقد تم الحل التخطيطي للمثال باستخدام المضلع الجبلي (الفقرة ١ - ٣ - ٢ (I)) ولقد تم تمثيله في الشكل (2.12) .

مثال 4 :

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائر الممثل في الشكل (2-13) والحمل بالقوة R .

الحل : باستخدام طريقة كولمان يتم التوصل للحل التخطيطي الممثل في الشكل (2-13) .

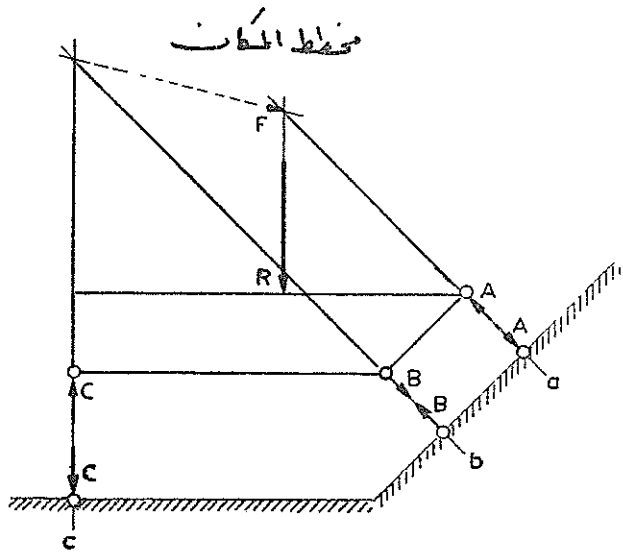


شكل 2-13

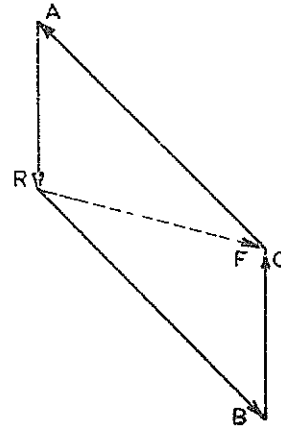
مثال 5 :

المطلوب : تعيين ردود افعال مساند الجائر الممثل في الشكل (2-15) .

الحل : بتطبيق طريقة كولمان يتم التوصل للحل .



مخطط القوى



شكل (2-15)

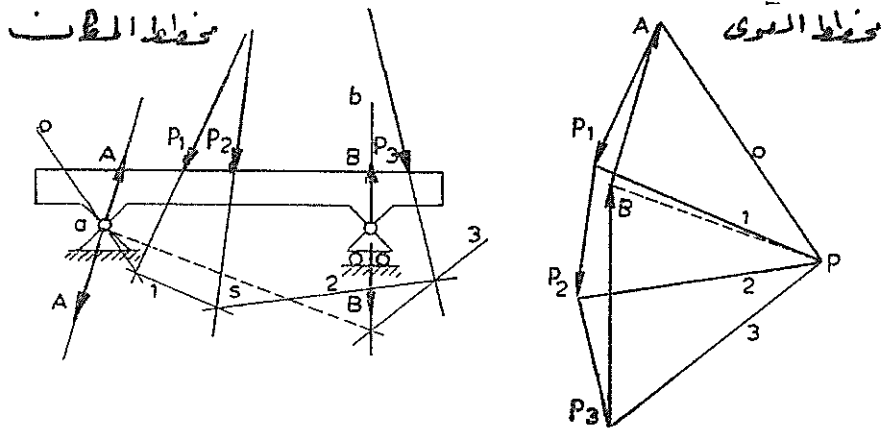
مثال 6 :

المطلوب : إيجاد ردود افعال مساند الجائر الممثل في الشكل (2-16) والحمل بالقوى

P_1 , P_2 , P_3 .

الحل :

بإنشاء مضلع القوى والمضلع الجبلي الذي يلزم أن يمر شعاعه الجبلي الأول 0 من نقطة التماس a ، يتم تعيين ردود أفعال المساند المطلوبة بواسطة خط الإغلاق s .



(شكل 2-16)

ب - أمثلة على حساب ردود أفعال المساند بالطريقة التحليلية

تتميز معالجة المشاكل الستاتيكية بالطريقة التحليلية بأنها أسهل من معالجتها بالطريقة التخطيطية . يتم حساب ردود أفعال المساند بتطبيق شروط التوازن :

$$\sum H = 0 , \quad \sum V = 0 , \quad \sum M_i = 0$$

حيث أن $\sum H$ هو مجموع مركبات القوى بالاتجاه الأفقي وأن $\sum V$ هو مجموع مركبات القوى بالاتجاه الشاقولي و $\sum M_i$ هو مجموع العزوم بالنسبة للنقطة i . ويمكن أن يعبر عن شروط التوازن السابقة أيضاً بالشكل التالي :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 , \quad \sum_{v=1}^n P_{zv} = 0 , \quad \sum_{v=1}^n M_{yv} = 0$$

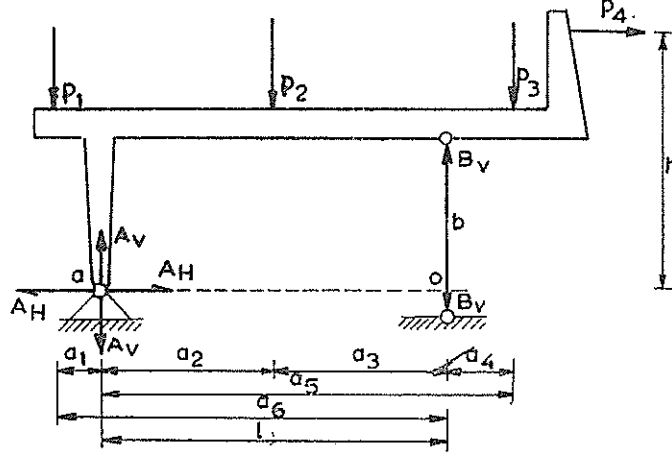
مثال 7 :

المعطى : الجائر المقرر ستاتيكيًا الممثل في الشكل (2-17) .

المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند .

الحل :

في البداية نثبت اتجاهات ردود أفعال المساند A_v , A_H , B_v ثم بعد ذلك تطبق شروط التوازن.



(شكل 2-17)

شروط توازن القوى الأفقية :

$$\Sigma H = 0 : A_H + P_4 = 0$$

شرط توازن العزوم حول النقطة 0 :

$$\Sigma M_0 = 0 ; - A_v l + P_1 a_6 + P_2 a_3 - P_3 a_4 = P_4 h = 0$$

شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\Sigma V = : P_1 + P_2 + P_3 - A_v - B_v = 0$$

من المعادلات الثلاثة السابقة يتم تعيين ردود أفعال المساند :

$$A_v = \frac{1}{l} (P_1 a_6 + P_2 a_3 - P_3 a_4 - P_4 h)$$

$$B_v = \frac{1}{l} (-P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_5 + a_4 h)$$

$$A_H = - P_4$$

التدقيق :

لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن العزوم حول النقطة a :

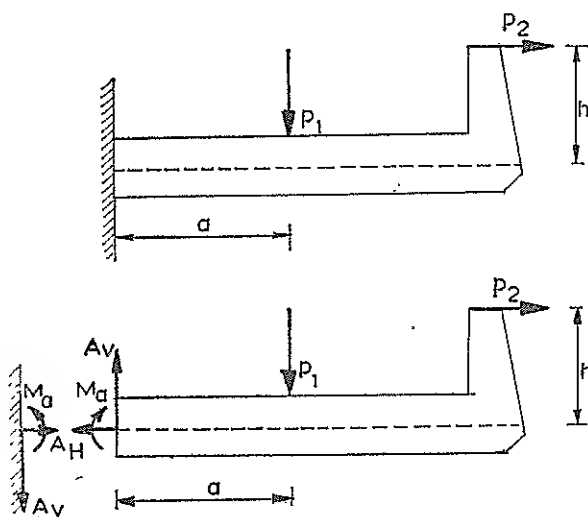
$$\sum M_a = 0 : -B_v l - P_1 a_1 + P_2 a_2 + B_2 a_3 + P_4 h = 0$$

مثال 8 :

المعطى : الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-18) .

المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند بالطريقة التحليلية .

الحل : بعد تثبيت اتجاهات ردود أفعال المساند تطبق شروط التوازن.



(شكل 2-18)

شرط توازن العزوم حول نقطة الوتادة a :

$$\sum M_a = 0 : M_a + P_1 a + P_2 h = 0 : M_a = -(P_1 a + P_2 h)$$

شرط توازن القوى الأفقية :

$$\sum H = 0 : A_H - P_2 = 0 : A_H = P_2$$

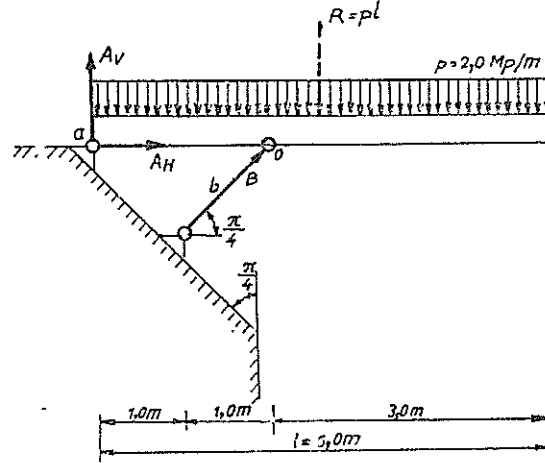
شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\sum V = 0 : A_v - P_1 = 0 : A_v = P_1$$

مثال 9 :

المعطى : الجائز ممتد الاطراف الممثل في الشكل (2-19) .

المطلوب : ايجاد ردود افعال المساند بالطريقة التحليلية .



(شكل 2-19)

الحل : بعد تثبيت اتجاهات ردود افعال المساند ، تطبق شروط التوازن .

شروط توازن العزوم حول النقطة a :

$$\sum M_a = 0 : R \cdot 2,5 - B_v \cdot 2,0 = 0 : B_v = \frac{2,5}{2} R = 12,5 \text{ Mp}$$

بسبب كون المسند b مسند نوسي فان رد الفعل ينطبق على اتجاه محور القضيبي المشكل للمسند، وبذلك فان :

$$B_v = B_H = 12,5 \text{ Mp} ; B = \sqrt{B_H^2 + B_v^2} = 12,5 \sqrt{2} = 17,675 \text{ Mp}$$

شروط توازن القوى الافقية :

$$\sum H = 0 : A_H + B_H = 0 : A_H = - 12,5 \text{ Mp}$$

شروط توازن القوى الشاقولية :

$$\sum V = 0 : A_v + B_v - R = 0 ; A_v = - 2,5 \text{ Mp}$$

التدقيق :

لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن العزوم حول النقطة c :

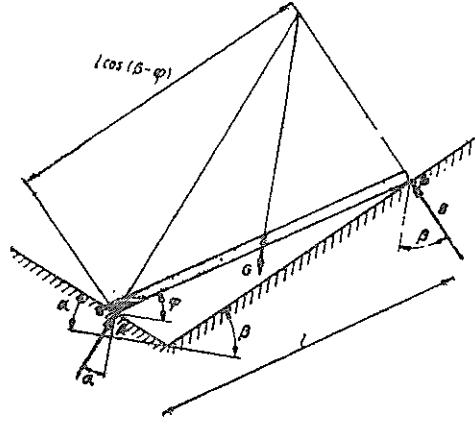
$$\Sigma M_c = 0 : A_v \cdot 5,0 + B_v \cdot 3,0 + R \cdot 2,5 = 0$$

بتبديل قيم ردود أفعال المساند المحسوبة تتحقق هذه العلاقة مما يؤكد صحة النتائج .

مثال 10 :

المعطى : قضيب طوله l ووزنه G يستند على جدارين ناعمين . يميل الجدار الاول بالنسبة للافق بزاوية α كما يميل الجدار الثاني بالنسبة للافق بزاوية β (شكل 2-20) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند A , B في حالة توازن القضيب ثم حساب الزاوية التي يشكلها القضيب في تلك الحالة .



(شكل 2-20)

الحل :

يدرس القضيب عندما يأخذ وضع التوازن .

نتيجة لاستناد القضيب على الجدارين تشكل ردود الافعال A و B حيث يأخذ كل منهما اتجاهها ناظماً (عمودياً) على اتجاه الحركة (بالاتجاه الممنوع للحركة) .
مركبات رد الفعل A بالاتجاه الافقي والساقولي :

$$A \sin \alpha , A \cos \alpha$$

مركبات رد الفعل B بالاتجاه الافقي والشافولي :

$$B \sin \beta , B \cos \beta$$

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

شرط توازن القوى الافقية :

$$\Sigma H = 0 : A \sin \alpha - B \sin \beta = 0$$

شرط توازن القوى الشاقولية :

$$\Sigma V = 0 : A \cos \alpha + B \cos \beta - G = 0$$

بحل المعادلتين ينتج :

$$A = G \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} , B = G \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

بتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة a ينتج :

$$\Sigma M_a = 0 : - G \frac{1}{2} \cos \varphi + Bl \cos (\beta - \varphi) = 0$$

بتبديل قيمة B في هذه العلاقة ينتج :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta} - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

حالة خاصة ($\alpha = \beta$):

من اجل الحالة الخاصة تصبح القيم التي تم الحصول عليها سابقاً كالآتي :

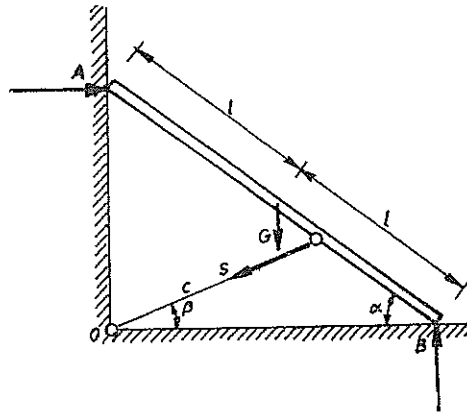
$$A = B = \frac{G}{2 \cos \alpha} ; \varphi = 0$$

وبذلك فان الوضع الافقي يمثل حالة توازن القضيب .

مثال 11 :

يستند قضيب وزنه G وطوله 2l على جدار ناعم (أملس) . يهمل الاحتكاك بين القضيب والجدار والارض ولذلك يثبت القضيب في النقطة c بحبل (شكل 2-21) .

المطلوب : إيجاد ردود افعال المساند A و B وكذلك قوة الجبل S .



(شكل 2.21)

الحل :

تأخذ ردود الافعال A و B منعاً يتعامد مع اتجاه الحركة . أما منحنى قوة الجبل فينطبق على محور الجبل . بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على المعادلات الثلاثة التالية :

$$\Sigma H = 0 : - A + S \cos \beta = 0$$

$$\Sigma V = 0 : - B + S \sin \beta + G = 0$$

$$\Sigma M_o = 0 : G l \cos \alpha + A 2l \sin \alpha - B 2l \cos \alpha = 0$$

وبحلها ينتج :

$$A = S \cos \beta$$

$$B = S \sin \beta + G$$

$$G \cos \alpha = 2 S \sin (\alpha - \beta)$$

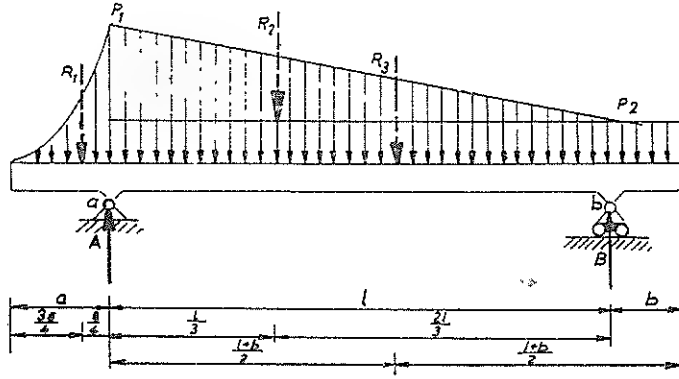
وبحل هذه العلاقات بالنسبة للمجهول A و B و S يتم الحصول على القيم المطلوبة :

$$S = \frac{G}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} ; A = \frac{G}{2} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} ; B = G + \frac{G}{2} \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

مثال 12 :

المعطى : جائز ممتد الاطراف (شكل 2.22) .

المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند بالطريقة التحليلية .



(شكل 2-22)

الحل : لتقسم الحمولة الموزعة الى مجموعة حمولات : حمولة على شكل مقطع مكافئ (حمولة مكافئة) وحمولة مثلثية وحمولة مستطيلة (حمولة موزعة بانتظام) ثم ليستعاض عن هذه الحمولات بمحصلاتها R_1 , R_2 , R_3 .

معادلة الحمولة الموزعة على شكل قطع مكافئ (الحمولة المكافئة) :

$$p(x) = p_1 \frac{x^2}{a^2}$$

ان محصلة هذه الحمولة هي :

$$R_1 = \int_0^a p(x) dx = p_1 \frac{a}{3}$$

اما مكان تأثيرها (تطبيقها) فيبعد :

$$x_0 = \frac{\int_0^a p(x) x dx}{\int_0^a p(x) dx} = \frac{\int_0^a p(x) x dx}{R_1} = \frac{3a}{4}$$

أما المحصلات R_2 , R_3 فتبلغ :

$$R_2 = \frac{p_1 - p_2}{2} l , R_3 = p_2 (l+b)$$

وتؤثر على بعد $l/3$ و $(1/2)(l+b)$ من المسند a .

بسبب كون الجائز القضبي مستقيم وبسبب تأثير حولات شاقولية فقط ، لذلك ينعدم رد الفعل الافقي للمسند a ($A_H=0$) وبذلك لا ضرورة لتطبيق شرط توازن القوى الافقية . بتطبيق ما تبقى من شروط النوازن ينتج :

$$\Sigma M_b = 0 : - A_v l + R_1 \left(\frac{a}{4} + l \right) + R_2 \frac{2l}{3} + R_3 \left(l - \frac{l+b}{2} \right) = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - R_1 - R_2 - R_3 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يتم تعيين ردود افعال المساند المطلوبة :

$$A_v = \frac{l}{12} \left[p_1 \left(4 + 4 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) + 2p_2 \left(1 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \right]$$

$$B_v = \frac{l}{12} \left[p_1 \left(2 - \frac{a^2}{l^2} \right) + 2P_2 \left(2 + 6 \frac{b}{l} + 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \right]$$

التدقيق :

لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن الزوم حول النقطة a :

$$\Sigma M_a = 0 : - B_v l - R_1 \frac{a}{4} + R_2 \frac{l}{3} + R_3 \frac{l+b}{2} = 0$$

مثال 13 :

المعطى : جائز مفصلي مركب مؤلف من ثمانية أجزاء (شكل 2-23) .

المطلوب : حساب ردود افعال المساند بالطريقة التحليلية .

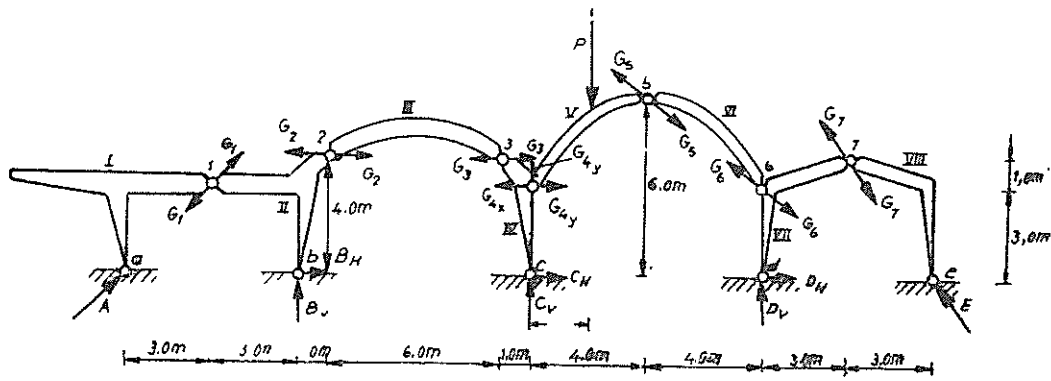
الحل :

في البداية تثبت اتجاهات ردود افعال المساند وقوى المفاصل (قوى التماسك) .

بعد ذلك تطبق شروط التوازن على الاقراص غير الحملة والحلوة على مفصليين

(I , III , VI , VIII) والتي تعطي النتائج التالية :

$$A - G_1 = 0 ; G_2 - G_3 = 0 ; G_5 - G_6 = 0 ; G_7 - E = 0$$



شكل 2-23

بتطبيق شروط التوازن على القرص V (بعد فصله عن الجائز) ينتج :

$$\Sigma M_A = 0 : P \cdot 2,0 + G_5 \left(\frac{4}{5} \cdot 3,0 + \frac{3}{5} \cdot 4,5 \right) = 0$$

$$\Sigma H = 0 : + G_5 \frac{4}{5} - G_{4H} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : + G_5 \frac{3}{5} + G_{4V} - P = 0$$

من هذه العلاقات يتم الحصول على القوى التالية :

$$G_5 = G_6 = \frac{5}{12} P = 0,417 P$$

$$G_{4H} = \frac{1}{3} P = 0,333 P$$

$$G_{4V} = \frac{3}{4} P = 0,750 P$$

وبتطبيق شروط التوازن على القرص VII (بعد فصله عن الجائز) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma M_d = 0 : + G_6 \frac{4}{5} \cdot 3,0 - G_7 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot 3,0 + \frac{3}{5} \cdot 4,0 \right) = 0$$

$$\Sigma H = 0 : - G_6 \frac{4}{5} + G_7 \frac{3}{5} - D_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : + G_6 \frac{3}{5} - G_7 \frac{4}{5} - D_v = 0$$

وبجملها يتم التوصل للقوى الآتية :

$$E = G_7 = \frac{1}{2} \quad G_6 = \frac{5}{24} P = 0,208 P$$

$$D_H = - \frac{5}{24} P = - 0,208 P$$

$$D_v = \frac{1}{12} P = 0,083 P$$

أما تطبيق شروط التوازن على القرص IV (بعد فصله من الجائز) :

$$\Sigma M_c = 0 : - G_3 \cdot 4,0 + G_{4H} \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma H = 0 : - G_3 + G_{4H} - C_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : G_{4v} - C_v = 0$$

فيعطي القوى التالية :

$$G_3 = G_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{3} = \frac{1}{4} P = 0,250 P$$

$$C_H = - \frac{P}{4} + \frac{P}{3} = \frac{1}{12} P = 0,083 P$$

$$C_v = \frac{3}{4} P = 0,750 P$$

ويعطي تطبيق شروط التوازن على القرص II (بعد فصله عن الجائز) المعادلات التالية :

$$\Sigma M_b = 0 : + G_1 \sqrt{2} \cdot 3,0 - G_2 \cdot 4,0 = 0$$

$$\Sigma H = 0 : - G_1 \frac{1}{2} \sqrt{2} + G_2 - B_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : + G_1 \frac{1}{2} \sqrt{2} + B_v = 0$$

والتي تعطي بعد الحل القوى الآتية :

$$A = G_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} = 0,236 P$$

$$B_H = \frac{1}{12} P = 0,083 P$$

$$B_V = - \frac{1}{6} P = - 0,167 P$$

التدقيق :

يؤكد تطبيق شروط التوازن على الجملة ككل صحة النتائج المحسوبة :

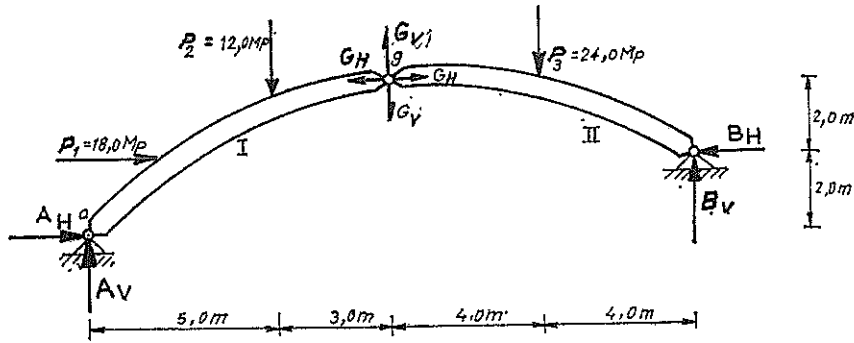
$$\Sigma V = 0 : A \frac{1}{2} \sqrt{2} + B_V + C_V + D_V + E \frac{4}{5} - P = 0$$

$$\Sigma H = 0 : A \frac{1}{2} \sqrt{2} + B_H + C_H + D_H - E \frac{3}{5} = 0$$

مثال 14 :

المعطى : قوس ثلاثي المفصل (شكل 2-24) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقوى المفاصل .



شكل 2-24

الحل :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء I (بعد فصله عن الجائز) ينتج :

$$\sum H = 0 : A_H - G_H + P_1 = 0$$

$$\sum V = 0 : A_v + G_v - P_2 = 0$$

$$\sum Mg = 0 : A_v \cdot 8,0 - A_H \cdot 4,0 - P_1 \cdot 2,0 - P_2 \cdot 3,0 = 0$$

أما تطبيق شروط التوازن على الجزء II (بعد فصله عن الجائز) فيعطي :

$$\sum H = 0 : -B_H + G_H = 0$$

$$\sum V = 0 : B_v - G_v - P_3 = 0$$

$$\sum M = 0 : B_v \cdot 8,0 - B_H \cdot 2,0 - P_3 \cdot 4,0 = 0$$

بجمع شرطي توازن القوى الافقية وكذلك شرطي توازن القوى الشاقولية لكلا الجزئين نتيج المعادلات التالية :

$$A_H - B_H + P_1 = 0$$

$$A_v + B_v - P_2 - P_3 = 0$$

لكن هاتين المعادلتين تمثلان شرطي توازن القوى الافقية والشاقولية على القوس ثلاثي المفصل ككل . وبالإضافة لشروط توازن العزوم تشكل مجموعة مؤلفة من أربعة معادلات ذات أربع مجاهيل A_H , A_v , B_H , B_v . إن حل هذه المعادلات يعطي :

$$A_H = 14,0 \text{ Mp} ; B_H = 32,0 \text{ Mp}$$

$$A_v = 61,0 \text{ Mp} ; B_v = 20,0 \text{ Mp}$$

أما قوى المفاصل ، فيتم الحصول عليها بتبديل هذه القيمة في المعادلات الستة السابقة ، وهي تبلغ :

$$G_H = B_H = 32,0 \text{ Mp} ; G_v = P_2 - A_v = -4,0 \text{ Mp}$$

التدقيق :

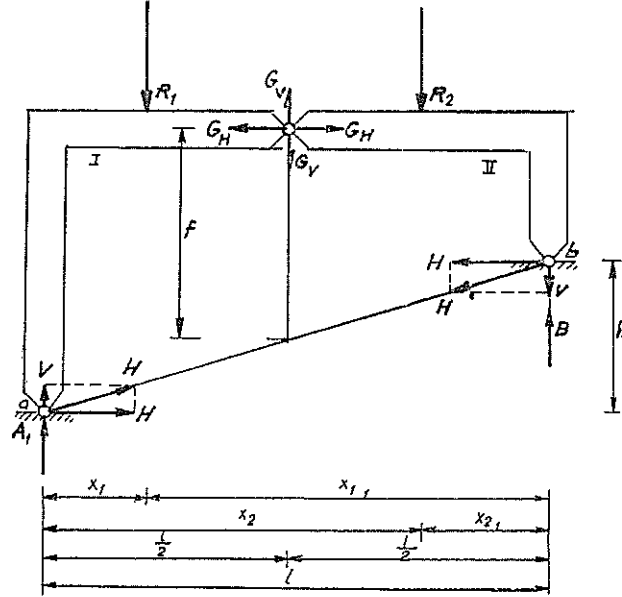
لتدقيق النتائج تطبق شروط توازن العزوم على الجملة ككل وحول مفاصل الدعم (مفاصل الاستناد) a , b :

$$\sum M_a = 0 : B_v \cdot 16,0 + B_H \cdot 2,0 - P_3 \cdot 12,0 - P_2 \cdot 5,0 - P_1 \cdot 2,0 = 0$$

$$\sum M_b = 0 : A_v \cdot 16,0 - A_H \cdot 2,0 - P_2 \cdot 11,0 - P_3 \cdot 4,0 = 0$$

مثال 15 :

المعطى : إطار ثلاثي المفصل (شكل 2-25) يحمل بحمولتين وحيدتين (مركبتين) شاقوليتين R_1, R_2 .
المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقوى المفاصل (بالطريقة التحليلية) .



شكل 2-25

الحل :

في حالة تحميل إطار ثلاثي المفصل بحمولات شاقولية يفضل تحليل كل من ردي الفعل المتشكلة عند مفاصل الدعم (الأستناد) a, b الى مركبتين إحداها بالاتجاه الشاقولي والاخرى على إستقامة الخط المستقيم الواصل بين مفصلي الدعم .

بتطبيق شرطي توازن العزوم على الجملة ككل وحول كل من النقطتين a, b :

$$\sum M_b = 0 : A' l - R_1 x'_1 - R_2 x'_2 = 0$$

$$\sum M_a = 0 : B' l - R_1 x_1 - R_2 x_2 = 0$$

يتم الحصول على قيمة ردي الفعل الشاقولين A', B' (والتي تكافئ ردي الفعل التي تتشكل في جائر قضبي مستقيم طوله l) التالية :

$$A' = \frac{1}{l} (R_1 x'_1 + R_2 x'_2)$$

$$B' = \frac{1}{l} (R_1 x_1 + R_2 x_2)$$

بتطبيق شرط إنعدام العزم في المفصل بالنسبة للجزء القوسي الواقع على يسار المفصل :

$$M_{gl} = 0 : A' \frac{l}{2} - R' \left(\frac{l}{2} - x' \right) - H \cdot f = 0$$

يتم الحصول على القوة الأفقية :

$$H = \frac{1}{f} \left[A' \frac{l}{2} - R_1 \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]$$

وبواسطتها ينتج :

$$V = H \cdot \operatorname{tg} \alpha = H \cdot \frac{h}{l}$$

وبذلك تبلغ المركبة الشاقولية لقوى الدعم :

$$A_v = A' + V \quad , \quad B_v = B' - V$$

أما مركبتها الأفقية فتساوي H، وأما قوة المفصل G فتبلغ :

$$G_H = H \quad ; \quad G_v = -A_v + R_1 = B_v - R_2$$

إن لإيجاد قوى الدعم (ردود أفعال المساند) وقوى المفصل للقوس ثلاثي المفصل بهذه الطريقة فائدة ظاهرة بالنسبة لطريقة إيجاد ردود أفعال المساند في المثال السابق وهي أن هذه الطريقة لا تؤدي لتشكيل مجموعة معادلات ينبغي حلها للحصول على المطلوب .

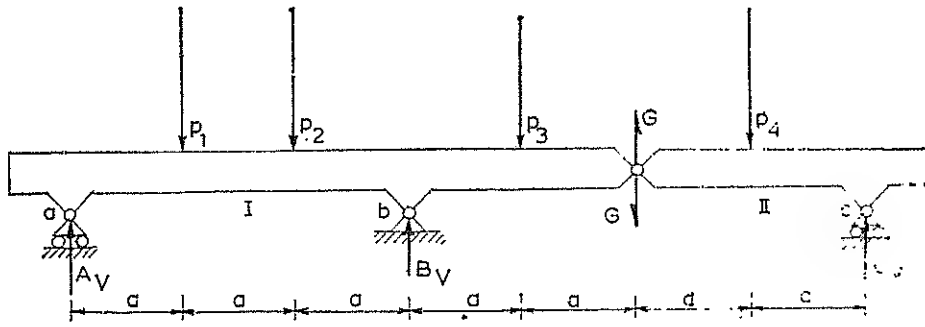
مثال 16 :

المعطى : جائر مفصلي مستقيم (جائر جربر Gerberträger) (شكل 2-26) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند .

الحل :

إن تطبيق شرطي توازن العزوم على الجزء II (بعد فصله عن الجائر) :



شكل 2-26

$$\sum M_G = 0 : C \cdot 2a - P_4 \cdot a = 0$$

$$\sum M_C = 0 : G \cdot 2a - P_4 \cdot a = 0$$

يعطي :

$$G = G = \frac{1}{2} P_4$$

أما تطبيق شرطي توازن العزوم على الجزء I (بعد فصله عن الجائز) :

$$\sum M_b = 0 : A \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot a + P_3 \cdot a + G \cdot 2a = 0$$

$$\sum M_a = 0 : B \cdot 3a - P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2a - P_3 \cdot 4a - G \cdot 5a = 0$$

فيعطي القوى التالية :

$$A = \frac{1}{3} (2P_1 + P_2 - P_3 - P_4)$$

$$B = \frac{1}{3} (P_1 + 2P_2 + 4P_3 + 2.5P_4)$$

التدقيق :

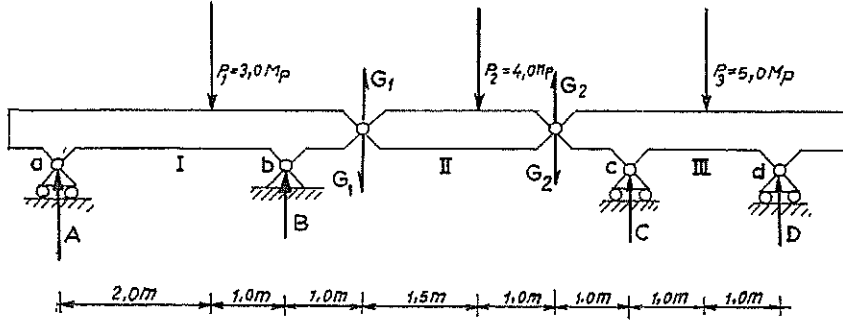
بتطبيق شرط توازن القوى الشاقولية على الجملة ككل :

$$\sum V = 0 : A + B + G - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0$$

تأكد صحة النتائج المحسوبة .

مثال 17 :

المعطى : الجائز المفصلي المستقيم (جائز جبر) (شكل 2-27) .
المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقوى المفاصل .



شكل 2-27

الحل :

سيتم الحساب ابتداء من الجزء الاوسط (الجزء II ، بعد فصله عن الجائز) .
بتطبيق شروط توازن المزوم :

$$\sum V_{G2} = 0 : -G_1 \cdot 2,5 + P_2 \cdot 1,0 = 0$$

$$\sum M_{G1} = 0 : -G_2 \cdot 2,5 + P_2 \cdot 1,5 = 0$$

يتم الحصول على قوى المفاصل :

$$G_1 = 1,600 \text{ Mp} ; \quad G_2 = 2,400 \text{ Mp}$$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء I (بعد فصله عن الجائز) :

$$\sum M_b = 0 : -A \cdot 3,0 + P_1 \cdot 1,0 - G_1 \cdot 1,0 = 0$$

$$\sum M_a = 0 : -B \cdot 3,0 + P_1 \cdot 2,0 + G_1 \cdot 4,0 = 0$$

يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A = 0,467 \text{ Mp} , \quad B = 4,133 \text{ Mp}$$

ويعتبر شروط التوازن على الجزء III (بعد فصله عن الجائز) :

$$\Sigma M_a = 0 : -C \cdot 2,0 + P_3 \cdot 1,0 + G_2 \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 : -D \cdot 2,0 + P_3 \cdot 1,0 - G_2 \cdot 1,0 = 0$$

يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$C = 6,100 \text{ Mp} \quad ; \quad D = 1,300 \text{ Mp}$$

التدقيق :

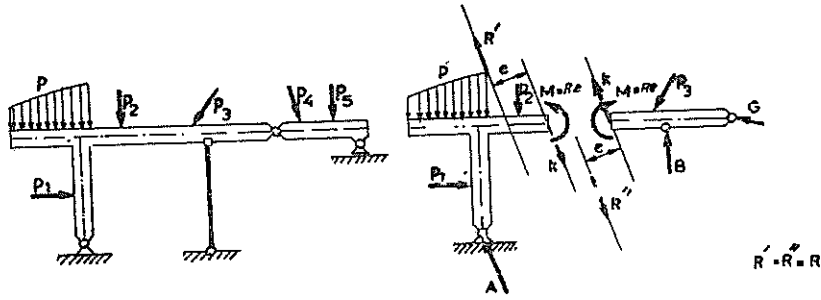
لتدقيق النتائج يطبق شرط توازن القوى الشاقولية على الجملة ككل :

$$\Sigma V = 0 : A + B + C + D - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

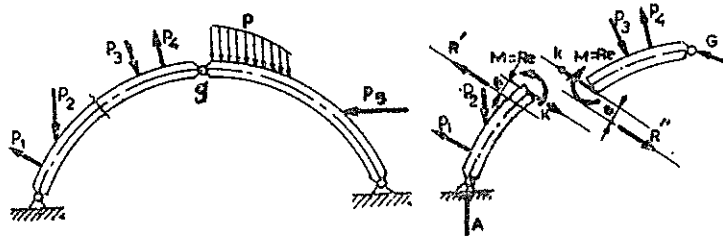
٢ - ٣ ردود أفعال القطع « قيم القطع » في الجائز المستقيم .

٢ - ٣ - ١ مبدأ القطع :

تنقل الحمولات الخارجية التي تؤثر على الجسم الصلب الى المساند بواسطة القوى الداخلية التي تسمى ردود أفعال القطع أو أيضاً قيم القطع .



شكل 2-28



شكل 2-29

لوصف نقل الحملات داخل الجملة الحاملة القضيية يقطع أحد قضبان الجملة الحاملة (شكل 2-28) ، التي علمت ردود أفعال مساندها وقوى مفاصلها ، بواسطة قطع ناظمي (عمودي) على محور القضيب (شكل 2-29) وبذلك يضطرب التوازن في القضيب . ليستعاض عن الحملات الخارجية (الحملات المؤثرة وردود أفعال المساند وقوى المفاصل) التي تؤثر على يمين وعلى يسار القطع بمحصلاتها R' و R'' (هذه القوى تتساوى بالقيمة وتعاكس بالاتجاه وذلك لان القوى المؤثرة على القضيب تشكل مجموعة متوازنة) . لقد كانت الجملة قبل اجراء القطع في حالة توازن وتبقى بعد اجراء القطع ايضاً في حالة توازن ، لذلك ينبغي (بعد اجراء القطع) أن تؤثر على كل ضفة من ضفاف القطع قوة القطع K وعزم القطع M والتي تعتبر كحمولات خارجية وذلك ليسود التوازن على الجملة بعد القطع ايضاً وبذلك تصالح ، من أجل كلا الجزئين ، العلاقة التالية :

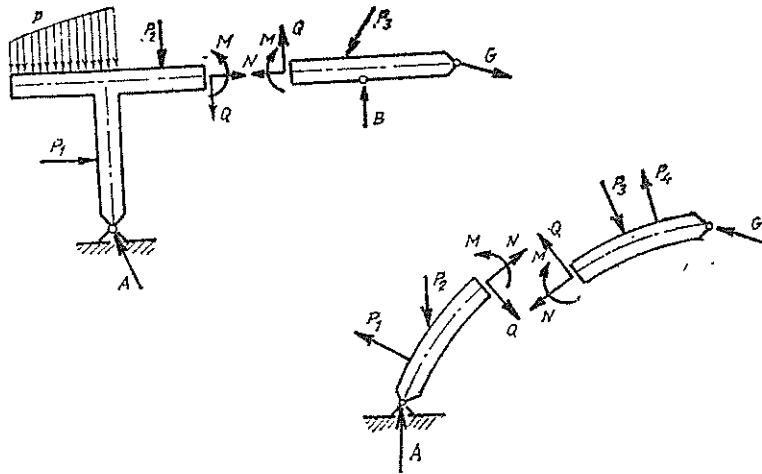
$$(R, K, M) = 0 \quad (2.1)$$

ليس لنقطة تأثير قوة القطع K في المقطع العرضي اية اهمية بالنسبة لتوازن الاجزاء الواقعة على يسار وعلى يمين القطع . لكن نظراً للاعتبارات التي ستم دراستها في مقاومة المواد يفضل اختيار مركز ثقل المقطع العرضي نقطة لتأثير القوة K . إذاً وبشكل عام يتم تقبل القوى الخارجية التي تؤثر على جملة حاملة قضيية إلى نقاط الاستناد وداخل المقاطع العرضية لقضبان الجملة الحاملة ، بواسطة القوة K والعزم M . لتسهيل تعيين القوة K يفضل الاستعاضة عن هذه القوة بمركبتها التي تتجه اولاً باتجاه محور القضيب (باتجاه المحور x) وثانياً بالاتجاه الناظمي (العمودي) عليه (باتجاه المحور z) .

تسمى المركبة باتجاه محور القضيب بالقوة الناظمية (القوة الطولية) ويرمز لها بالحرف \bar{N} كما تسمى المركبة بالاتجاه الناظمي (العمودي) على محور القضيب بالقوة العرضية ويرمز لها بالحرف \bar{Q} . أما العزم فيسمى بعزم الانعطاف (وذلك للعلاقة التي تربط بين العزم المذكور وبين انعطاف القضيب المرن) . تسمى القوة الناظمية والقوة العرضية وعزم الانعطاف مجتمعة بقيم القطع وهي تتغير بشكل عام من قطع لقطع آخر .

ففي حالة إجراء قطع في مكان ما من الجملة الحاملة القضيية ، عندئذ تشكل في مكان القطع نتيجة لوجود القوى الداخلية ما تسمى بقيم القطع والتي يجب أن تحقق مع القوى الخارجية التي تؤثر على الجزء المقطوع من الجائز حالة التوازن كما ويجب ايضاً أن تحقق قيم القطع الموجودة في الضفة اليمنى مع قيم القطع الموجودة في الضفة اليسرى حاله التوازن (اذا توازن)

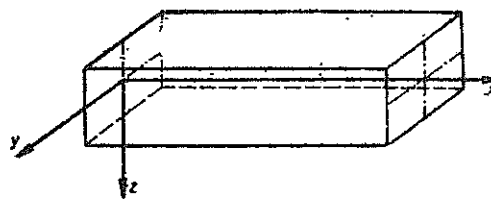
جسم صلب تحت تأثير مجموعة من المحولات فان كل جزء من اجزاءه يتوازن تحت تأثير المحولات التي تؤثر على ذلك الجزء (شكل 2-29 b) .



شكل 2-29 b

لتوحيد اتجاه قيم القطع في كل ما يلي من الدراسات سوف نثبت مجموعة المحاور الاحداثية x, y, z ، ففضلها يتم تثبيت اتجاه قيم القطع .

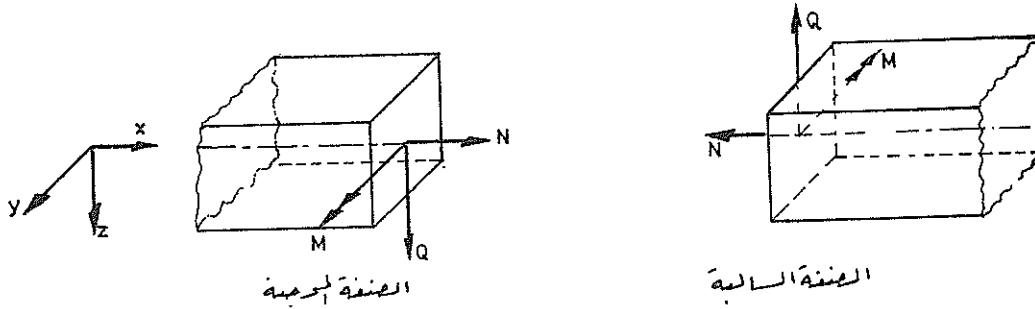
عادة يثبت الاحداثي x بحيث ينطبق على محور القضيبي ويثبت الاحداثي z بحيث ينطبق على الاتجاه العمودي على محور القضيبي فيشير الى اسفل القضيبي أو أعلاه أما الاحداثي y فيثبت بالاتجاه العمودي على كل من الاحداثيين x, z فيشير الى خارج أو داخل مستوي الرسم (بتثبيت اتجاه احداثيين يثبت بشكل قسري اتجاه الاحداثي الثالث وذلك لتشكيلها مجموعة يمينية فمثلا يشير الاحداثي x الى اتجاه ابهام اليد اليمنى والاحداثي y الى اتجاه السبابة والاحداثي z الى اتجاه الأصبع الوسطى) (شكل 2-30) .



شكل 2-30

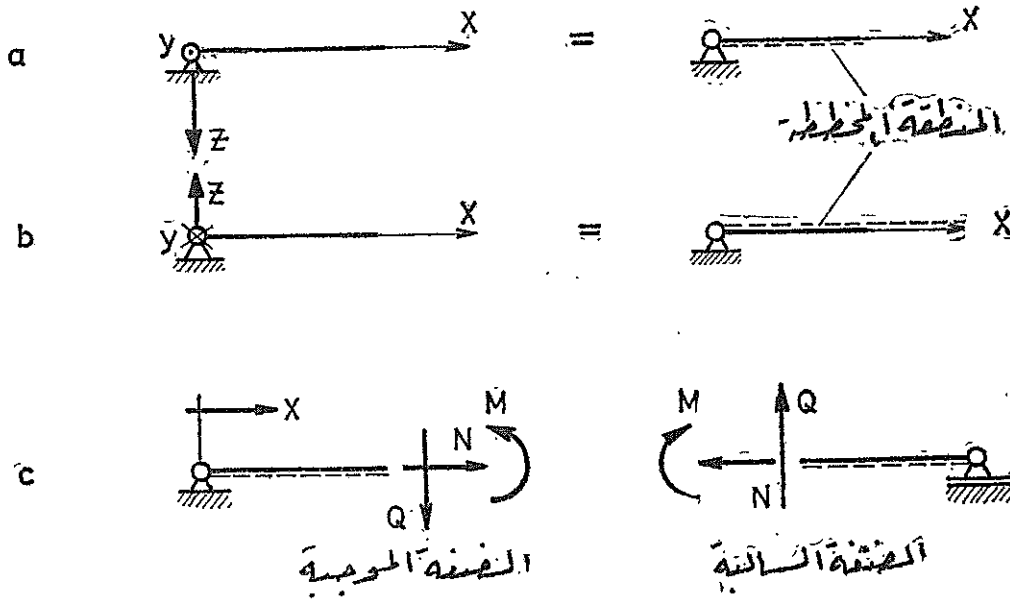
تسمى بعد اجراء القطع ، الضفة التي يخرج منها أحد الاحداثيات الموجبة (في الجمل القضيبيية

المستوية ، الاحداثي x) بالصفة الموجبة والصفة التي يدخل فيها احد الاحداثيات الموجبة (في الجمل القضيية المستوية الاحداثي x) بالصفة السالبة . بعد كل هذا يعرف اتجاه قيم القطع (ردود أفعال القطع) بأنه موجب عندما يأخذ في الصفة الموجبة إتجاه مجموعة المحاور الاحداثية وفي الصفة السالبة عندما يكون بعكس اتجاه المحاور الاحداثية الموجبة (شكل 2-31)



شكل 2-31

في الجمل المستوية ، يصعب رسم مجموعة الاحداثيات x, y, z . وبما أنه يكفي ، لتحديد اتجاه الاحداثيات ، تميت اتجاه احداثيين منها فقط لذلك يكفي برسم الاحداثي x (الذي ينطبق على محور القضيبة) والاحداثي z العمودي عليه . وتفادياً لالوقوع في الخطأ وحتى لا يعتبر الاحداثي z كقوة (لان أغلب القوى هي عمودية على المحور الاوسط) لذلك يستعاض عن التمثيل الشعاعي للاحداثي z بمنطقة مخططة يحدد مكانها اتجاه الاحداثي z (شكل 2-32)



شكل 2-32

لصعوبة رسم عزم الانعطاف M في الجمل المستوية ، بشكله الشعاعي ذو السهم المزدوج الذي ينطبق حامله على اتجاه المحور y العمودي على مستوي الرسم ، لذلك يستعاض عن الدلالة الشعاعية (ذات السهم المزدوج) بالرمز المنحني الذي يحمل في رأسه سهماً يشير الى اتجاه العزم . للحصول على تطابق بين الرمزين ، الشعاعي والمنحني ، توضع رؤوس اصابع اليد اليمنى باتجاه سهم منحني العزم ثم تدور بنفس دوران السهم عندئذ يشير رأس الابهام الى اتجاه شعاع العزم (شكل 2-33)

يعرف اتجاه العزم الموجب في الضفة الموجبة والضفة السالبة ، حسب الطريقة الجديدة للتعبير عن الاحداثيات ، بأنه العزم الذي يشد المنطقة المخططة متجهاً عن أقرب طريق الى محور



شكل 2-33

القصيب ماراً بكان القطع (المنطقة غير المخططة) (شكل 2-32) .

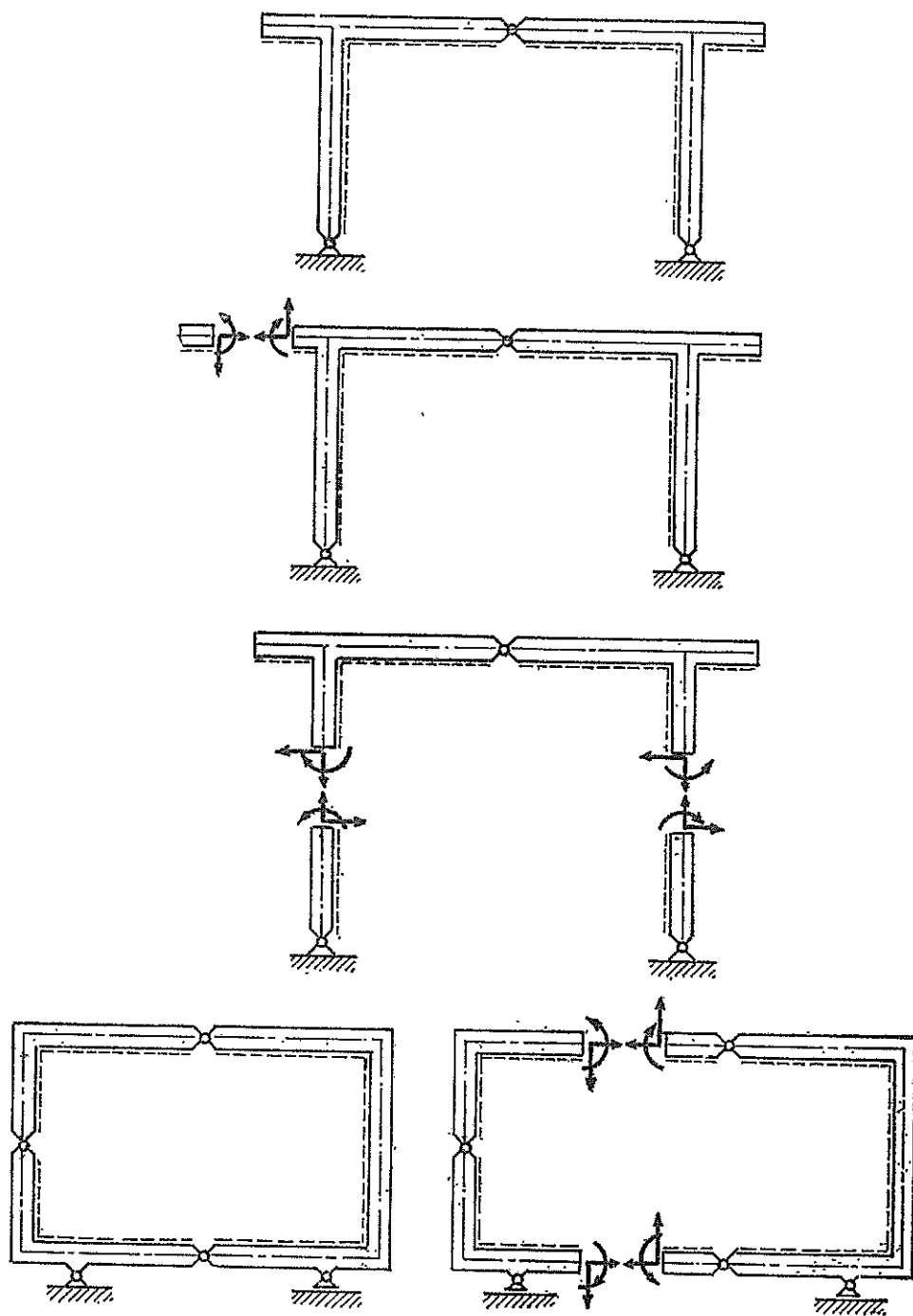
لقد تم في الشكل 3-33b تمثيل قيم القطع لبعض الجمل الانشائية .

٢ - ٣ - ٢ توزيع قيم القطع (ردود افعال القطع)

بتصور الجزء المقطوع من الجائز والممثل في الشكل (2-34) يظهر تغير قيم القطع (ردود أفعال القطع) بتغير الاحداثي x وهذا يعني أن القوة الناعمية (القوة الطولية أو ما تسمى أيضاً بالقوة المحورية) والقوة العرضية وعزم الانعطاف هم توابع للاحداثي x .

أثناء إيجاد ردود أفعال القطع يمكن اعتبار منطقة القطع كمكان للوثاقة ومن ثم حساب القيم المجهولة بتطبيق شروط التوازن ، بواسطة التكامل يتم إيجاد أجزاء قيم القطع (ردود افعال القطع) الناتجة عن تأثير الحملات الموزعة $q(x)$. أما حدود التكامل فهي من 0 حتى x . بإجراء إدخال المتغير الجديد ξ يتم الحصول على قيم القطع (ردود أفعال القطع) :

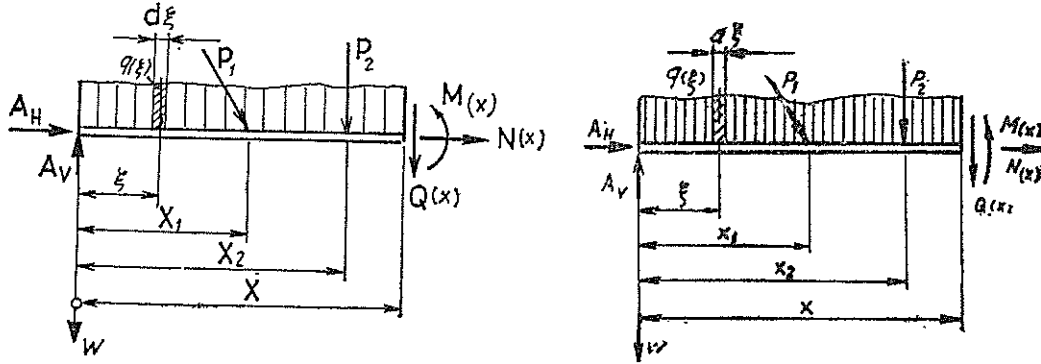
$$1. \quad \sum H = 0 : N(x) = -A_H - \sum P_i x \quad (2.2)$$



شکل 2-33b

$$2. \sum V = 0 : Q(x) = + A_v - \sum P_i - \int_0^x q(\xi) d\xi \quad (2-3)$$

$$3. \sum M_x = 0 : M(x) = A_v \cdot x - \sum (x-x_i) P_i - \int_0^x (x-\xi) q(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

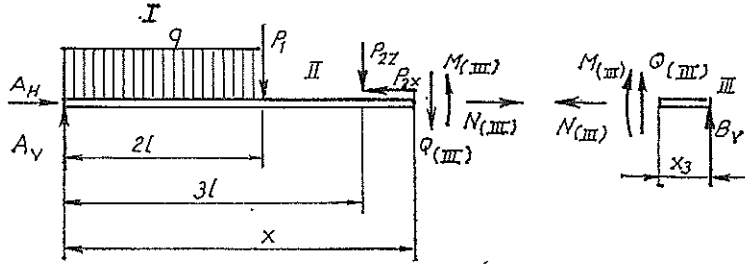


شكل 2-34

بالقاء نظرة على المعادلات (2-2) حتى (2-4) يثبت ان قيم القطع تشير الى عدم استمرار في الامكنة التي تؤثر فيها قوى وحيدة (قوى مركزة) وفي الامكنة التي تتغير فيها الحملات الموزعة تغيراً فجائياً بشكل قفزة (على شكل انزلاق) . ولذلك ينبغي تقسيم الجائز الى مجالات تحدها امكنة عدم الاستمرار (في الجيزان المستقيمة عدم استمرار الحملات بما فيه الحملات الوحيدة وفي الجيزان المضلعة علاوة على ذلك امكنة التغير المفاجيء للمحور الاوسط) . هناك امكانية اختيار عدة احداثيات x_i يحدد الاحداثي الواحد منها مجالا واحداً فقط وبتبدأ في نقطة ابتداء المجال كما ان هناك امكانية اخرى الا وهي اختيار احداثي x مستمر ووحيد لكل المجالات ، بدايته بداية المجال الاول ونهايته نهاية المجال الاخير . يقسم هذا الاحداثي الى حدود تحدد بداية ونهاية المجال الواحد . بذلك يتحدد عدد المجالات بما يلي :

- ١ - تطبيق حملات وحيدة (قوى او عزوم) بما فيها ردود افعال المساند .
 - ٢ - التغير المفاجيء للحملات الموزعة (ممثلاً على شكل قفزة اي انزلاق) .
 - ٣ - عدم استمرار تابع الحملات الموزعة (فقدان تابع الحملات الموزعة استمراره) .
 - ٤ - التغير المفاجيء للشكل الهندسي سواء بوجود عقدة صلبة او بوجود عقدة مفصلية .
- (لا يغير وجود المفصل الذي يفصل بين قضيبين تقع على استقامة واحدة من عدد المجالات)
يشير ايجاد قيم القطع (ردود افعال القطع) للجائز الممثل في الشكل (2-36) والذي يبلغ طوله

4l الى ان اختيار احداثي x مستمر هو غير مناسب ويفضل عنه اختيار احداثي x_1 لكل مجال (للمجال الواحد) .



شكل 2-36

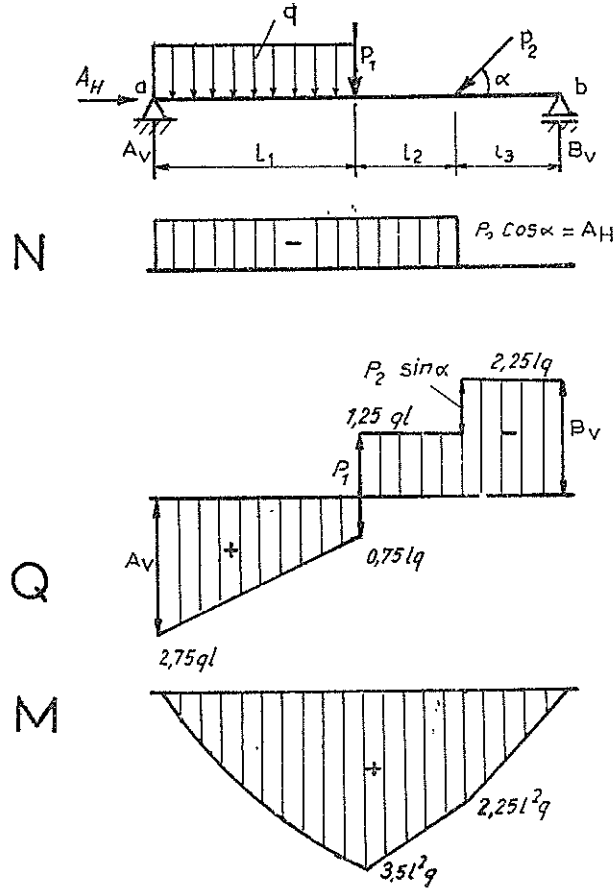
يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر من المجال III للجائز الممثل في الشكل 2-37 العلاقات التالية :

1. $\sum H = 0 : N_{III}(x) = -A_H + P_2 x$
2. $\sum V = 0 : Q_{III}(x) = A_v - 2l q - P_1 - P_2 x$
3. $\sum M_x = 0 : M_{III}(x) = A_v \cdot x - (x-l) \cdot 2l q - (x-2l) P_1 - (x-3l) P_2 x$

أما تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن من نفس المجال فيعطي العلاقات التالية :

1. $\sum H = 0 : N_{III}(x_3) = 0$
2. $\sum V = 0 : Q_{III}(x_3) = -B_v$
3. $\sum M_{x_3} = 0 : M_{III}(x_3) = B_v \cdot x_3$

هناك لاستعمال الاحداثي المستمر بعض المنافع تظهر في بعض مشاكل مقاومة المواد على سبيل المثال اثناء ايجاد خط الانعطاف (الخط المرن) . لاتعطي قيم القطع (ردود افعال القطع) ، المحسوبة كتابع سواء للاحداثي x او للاحداثي x_3 أية صورة ايضاحية ولذلك يفضل رسم النوابع تخطيطياً . بأخذ القيم $P_1 = 2P$ و $P_2 x = P_{2x} = P$ و $P = q l$ بعين الاعتبار يمكن الحصول على ردود افعال القطع (قيم القطع) لمجالات الجائز الثلاثة (III , II , I) والمثلة في الشكل (2-37) .



شكل 2-37

مثال 18 :

المعطى : الجائز البسيط الممثل في الشكل (2-38) والحمل بجمولة موزعة بانتظام شدتها \$q_0\$.
المطلوب : تعيين قيم القطع باستخدام طريقة القطع .

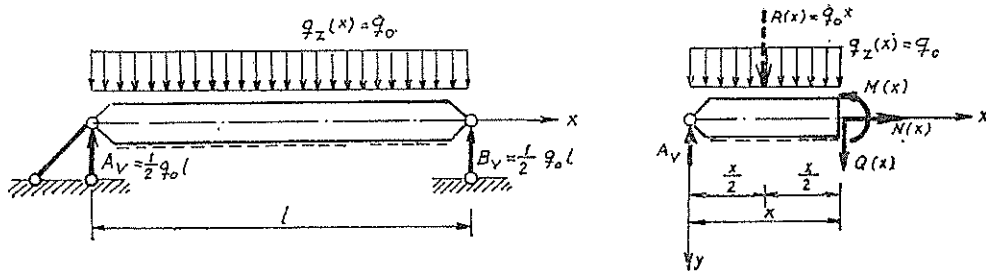
الحل :

تحسب في البداية ردود افعال المساند وذلك بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل :

$$\sum M_b = 0 : A_v = \frac{q_0 l}{2}$$

$$\sum V = 0 : B_v = \frac{q_0 l}{2}$$

(الجملة متناظرة هندسياً بالنسبة للحمولات الشاقولية لذلك فان من البديهي أن تتساوى ردود
أفعال المساند \$A_v, B_v\$) .



شكل 2-38

بقطع الجائز في النقطة x (شكل 2-38) ثم بتطبيق شروط التوازن على الجزء اليسر (لقد كان بالإمكان تطبيق شروط التوازن على الجزء والنتيجة لا تتغير) ينتج :

$$\sum H = 0 : N(x) = 0$$

$$\sum V = 0 : A_v - R(x) - Q(x) = 0$$

$$\sum M_x = 0 : A_v \cdot x - R(x) \frac{x}{2} - M(x) = 0$$

حيث أن $R(x) = q_0 x$ وهي محصلة القوى الموزعة على طول الجزء x .

من العلاقات السابقة وبعد الاستعاضة عن محصلة القوى الموزعة بما يساويها ، يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة :

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

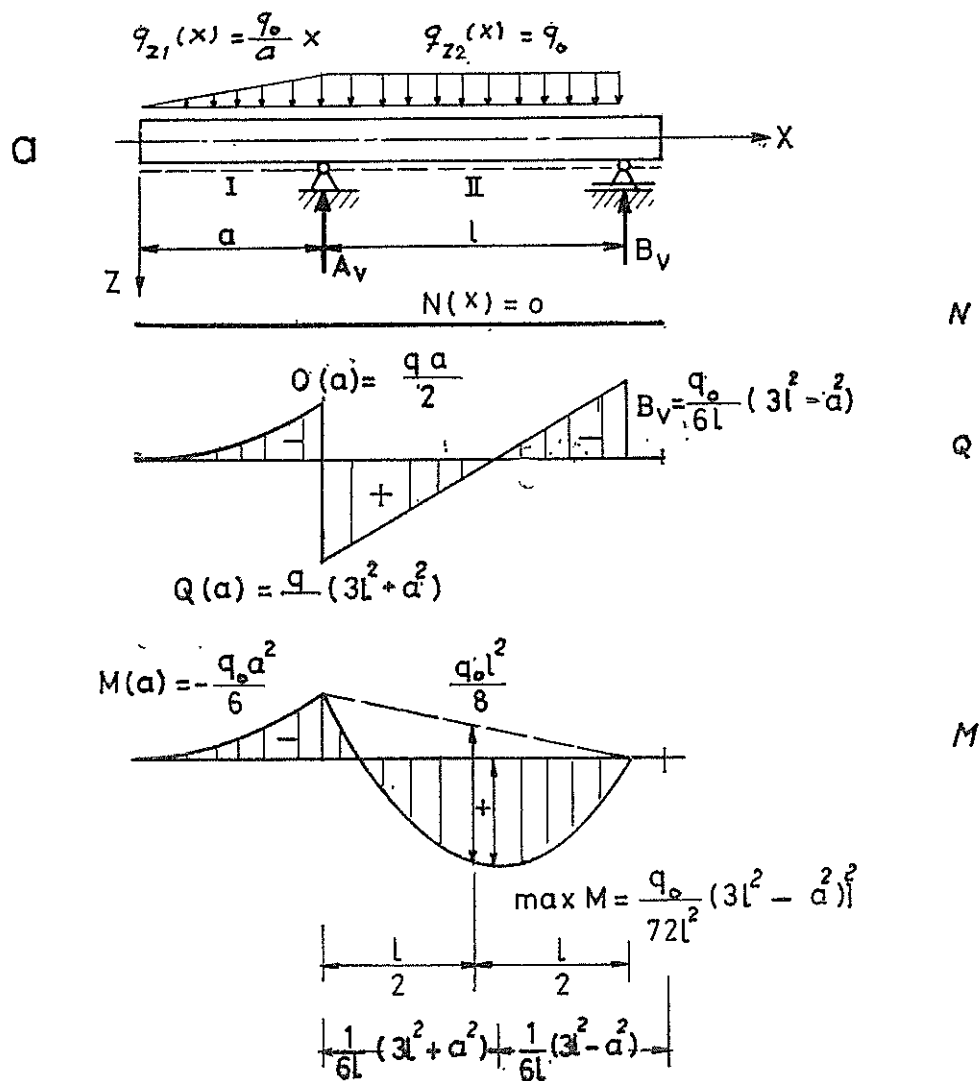
$$M(x) = \frac{q_0 l^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

سيتم فيما بعد وبطريقة العلاقات التفاضلية تعيين نفس المعادلات .

ملاحظة : بعد اجراء القطع ينصح بدراسة الجزء الذي تؤثر عليه سمولات أقل (الجزء الاقل تحميلاً) ، كما ينصح بإنشاء مخطط Q أولاً ثم مخطط M .

مثال 19 :

حمل جائز بسيط ممتد الاطراف كما في الشكل (2-39a) .



شكل 2-39

المطلوب : تعيين قيم القطع .

الحل :

في البداية تحسب ردود انفعال المساند وذلك بتطبيق شروط التوازن :

$$\sum M_b = 0 : A_v = \frac{q_0}{6l} (3l^2 + 3al + a^2)$$

$$\sum V = 0 : B_v = \frac{q_0}{6l} (3l^2 - a^2)$$

بعد ذلك نحدد المجالات . في هذا المثال يبلغ عددها مجالين .

المجال I $(0 \leq x \leq a)$:

باقتطاع عنصر قصبي من الجزء الممتد للجائز (شكل 2-40) ثم بتطبيق شروط التوازن عليه ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N(x) = 0$$

$$\Sigma V = 0 : -R_1(x) - Q(x) = 0$$

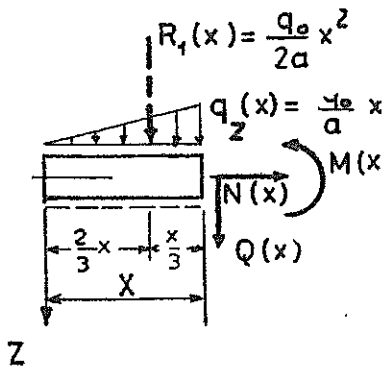
$$\Sigma M_x = 0 : -R_1(x) \frac{x}{3} - M(x) = 0$$

أما قيم القطع فيتم الحصول عليها بعد تبديل $R_1 = \frac{q_0}{2a} x^2$:

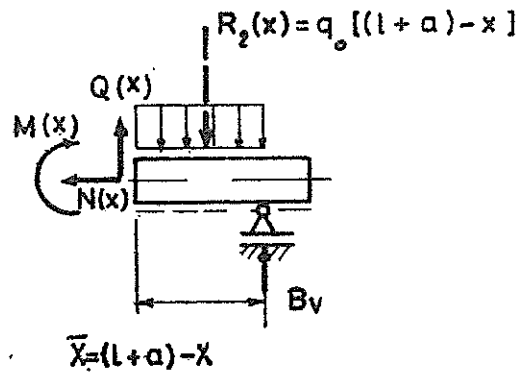
$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2a} x^2$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{6a} x^3$$



شكل 2-40



شكل 2-41

المجال II $(a \leq x \leq l+a)$:

بتطبيق شروط التوازن على الشكل (2-41) ينتج :

$$\Sigma H_i = 0 : N(x) = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q(x) + B_v - R_2(x) = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q(x) - B_v [(l+a)-x] + R_2(x) \frac{(l+a)-x}{2} = 0$$

من هذه العلاقات يتم ، بعد تبديل $R_2(x) = q_0 [(l+a)-x]$ ، الحصول على قيم القطع المطلوبة:

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{q_0 l^2}{6l} + \frac{q_0 l}{2} \left(1 - 2 \frac{x-a}{l} \right)$$

$$M(x) = -\frac{q_0 a^2}{6} + \frac{q_0 a^2}{6} \frac{x-l}{l} + \frac{q_0 l^2}{2} \left[\frac{x-a}{l} - \frac{(x-a)^2}{l^2} \right]$$

لقد تم في الشكل (2.39) رسم مخططات نيم القطع . ففي المكان الذي تنعدم فيه القوة العرضية يأخذ عزم الانعطاف قيمة أعظمية وهي تبلغ هناك :

$$x_0 = \frac{1}{6l} (3l^2 + a^2)$$

$$\max M = M(x=x_0) = \frac{q_0}{72l^2} (3l^2 - a^2)^2$$

لتدقيق النتائج تساعدنا القيم المعلومة للقوة العرضية وعزم الانعطاف في النقطة $x=a+l$ حيث ينبغي لها ان تكون $Q(a+l) = -B$ و $M(a+l) = 0$.

يراعى اثناء رسم اشكال القوى العرضية وعزوم الانعطاف ما يلي :

- ١ - تمهر (تظلل) هذه الاشكال (المخططات) بخطوط شاقولية يحدد اتجاهها طريقة قياس الاحداثيات الشكل . وتكون خطوط التمهير هذه خفيفة رقيقة بقدر الامكان . ويجوز التحكم في نظام توزيعها بحيث تفيض على الشكل رونقاً وتزيده وضوحاً .

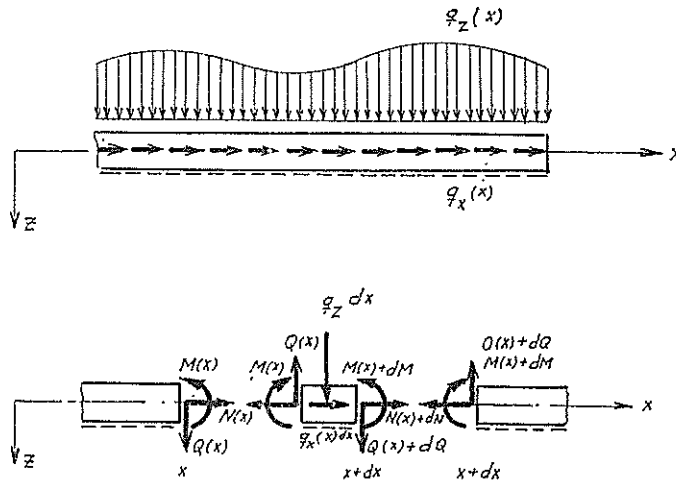
- ٢ - يكون خط القاعدة (خط النسب) في الشكل أكثر الخطوط وضوحاً ويقل عنه في ذلك ولو بدرجة يسيرة ، الخط الذي يحدد معادلة الشكل .

- ٣ - تعطى قيم الاحداثيات الهامة في الشكل على الرسم . وقد يكون من المناسب ايضاً كتابة المعادلة التي تحدد العلاقة الموضحة للشكل على ان يظهر موضع القطع (s-s) وطريقة قياس البعد x الذي يتعين به القطع وذلك في الجائز المرسوم في الجزء العلوي .

٤ - يجب ان يحدد لكل شكل مقياس رسم الشكل ولم يظهر مقياس الرسم في هذا المثال لان القيم العددية للحمولة q_0 والطول l لم تعطى في هذه الحالة .

٢-٣ العلاقات التفاضلية التي تربط بين المحولات الموزعة وبين قيم القطع في القضيب المستقيم بعد أن يتم إيجاد ردود أفعال المساند يمكن إيجاد قيم القطع في الجمل الحاملة المقررة وغير المقررة ستاتيكيًا وذلك بتطبيق شروط التوازن على عنصر طولي تفاضلي (قطعة صغيرة قدر الامكان) يقطع من القضيب المدروس (يتم اجراء القطع لجعل قيم القطع في القضيب مرئية) .

بعد اقتطاع عنصر طولي تفاضلي من جملة حاملة مقررة أو غير مقررة ستاتيكيًا ومحملة بحمولة شاقوليه $q_z(x)$ وبحمولة افقيه $q_x(x)$ (المحولات $q_z(x)$ و $q_x(x)$ هي محولات موزعة) ، رسم ردود أفعال القطع (قيم القطع) الموجهه (وذلك حسب تعريفها الذي تم سابقاً) على ضفتي القطع ، فمثلا على ضفتي القطع المائدة لعنصر قضيبي مستقيم ، قيم القطع المثلة في الشكل (2-42) .



شكل 2-42

بالافتراض ان القوة الناعظيه والقوة العرضية وكذلك عزم الانعطاف هي توابع قابلة للاشتقاق باستمرار عندئذ تؤثر على ضفة القطع $\psi = \text{const}$ قيم القطع التالية :

$$N(x), Q(x), M(x)$$

كما وتؤثر على ضفة القطع $x+dx = \text{const}$ قيم القطع الاتية :

$$N(x + dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx = N(x) + dN$$

$$Q(x + dx) = Q(x) + \frac{dQ}{dx} dx = Q(x) + dQ$$

$$M(x + dx) = M(x) + \frac{dM}{dx} dx = M(x) + dM$$

لقد أهملت في منشورات تايلور (Taylor-Entwicklung) حدود المرتبة الثانية وبقية الحدود ذات المراتب الأعلى (الحدود اللاخطية) لصغرها .

نتيجة لتأثير الحمولات الخطية (خطية التوزيع) $q_x(x)$ ، $q_z(x)$ على القضيب ، بذلك تؤثر على العنصر القضبي المقطوع ، الحمولات الوحيدة $q_x dx$ (قوة تؤثر باتجاه محور القضيب أو بالآخرى باتجاه المحور x وتطبق في مركز ثقل العنصر القضبي) و $q_z dx$ (قوة وحيدة تؤثر بالاتجاه العمودي على محور القضيب أو بالآخرى باتجاه المحور z وتطبق في مركز ثقل العنصر القضبي) .

لازالة اضطراب التوازن الذي تشكل نتيجة لاجراء القطع ينبغي ان تحقق الحمولات التي تؤثر على العنصر مع قيم القطع التي تؤثر على ضفتي العنصر شروط التوازن . فبتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : - N(x) + N(x) + dN + q_x(x) dx = 0$$

$$\Sigma V = 0 : - Q(x) + Q(x) + dQ + q_z(x) dx = 0$$

$$\Sigma M_{x+dx} = 0 : Q(x) dx - M(x) + dM + q_z(x) dx \frac{dx}{2} = 0$$

ان الحد الاخير من المعادلة الاخيرة هو حد لاخطي (حد من المرتبة الثانية) ويمكن اهماله لصغره (تهمل نظرية المرتبة الاولى التي تستخدم في هذه الفصول كل الحدود اللاخطية) وبذلك تعطي شروط التوازن العلاقات التالية :

$$\frac{dN}{dx} = q_x(x) \quad (2.6 a)$$

$$\frac{dQ}{dx} = - q_z(x) \quad (2.6 b)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (2.6 c)$$

يتم إيجاد القوة العلوية $N(x)$ عدا عن الثابت k بمكاملة العلاقة (2-6 a) وذلك كما يلي :

$$N'(x) = - \int q_z(x) dx + k \quad (2.7)$$

اما عزم الانعطاف $M(x)$ فيتم الحصول عليه باختزال Q من العلاقتين (2-6 b) و (2-6 c) .
 باشتقاق العلاقة (2-6 b) بالنسبة للمتغير x ينتج :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}$$

وبتعويض العلاقة (2-6 b) في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على معادلة تفاضلية من اجل عزم الانعطاف :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - q_z(x) \quad (2-8)$$

باجراء مكاملة مضاعفة يتم الحصول على القوة العرضية وعزم الانعطاف، عدا عن ثوابت التكامل C_1 و C_2 ، كتوابع للاحداثي x .

القوة العرضية :

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = - \int q_z(x) dx + C_1 \quad (2.9)$$

عزم الانعطاف :

$$M(x) = - \int dx \int q_z(x) dx + C_1 x + C_2 \quad (2.10)$$

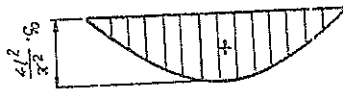
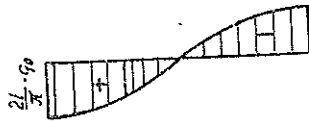
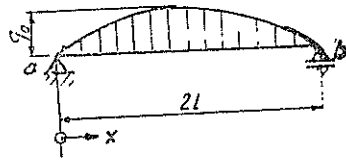
بامعان النظر في العلاقات (2-6) و (2-8) نستخلص النتائج الاساسية التالية :

١ - شدة الحمل الافقية الموزعة $q_z(x)$ تساوي القيمة السالبة لمشتق القوة الناعمية وهذا يشير الى ان شدة الحمل الافقية الموزعة تساوي هندسياً ظل الزاوية المحصورة بين المحور x والمماس لمخطط القوة الناعمية .

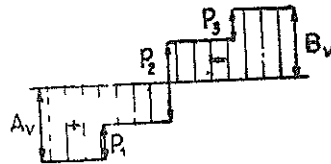
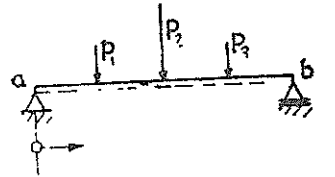
يمكن إيجاد القوة الناعمية لقضيب مستقيم بشكل غير مباشر من الحمل $q_z(x)$ وذلك بمكاملة شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي الممثل في العلاقة (2-7) .

٢ - القوة العرضية $Q(x)$ هي مشتق عزم الانعطاف $M(x)$ بالنسبة للمحور x . هذا يشير الى ان القوة العرضية Q تساوي هندسياً ظل الزاوية المحصورة بين المماس لمخطط عزم الانعطاف في القطع المدروس وبين المحور x (يعطي مخطط القوة العرضية ميل مخطط عزم الانعطاف) .
 اما شدة الحمل الموزعة $q_z(x)$ فتساوي هندسياً ظل الزاوية الواقعة بين المحور x والمماس لمخطط القوة العرضية .

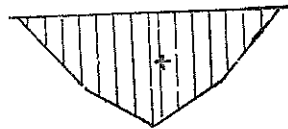
٣ - حيثما تنعدم القوة العرضية يكون لعزم الانعطاف قيمة حدية وحيثما تنزلق (تقفز) القوة العرضية مرة بالصفير يفقد مخطط عزم الانعطاف استمراره وازدياده (شكل 2-44) .



شكل 2-44



Q



M

شكل 2-43

٤ - حيثما يحتوي مخطط القوة العرضية على قفزة (انزلاق) لا تمر من الصفير فان مخطط عزم الانعطاف يتعرض لانكسار (شكل 2-44) .

٥ - اذا كانت توابع تغير الحمل الموزعة توابع جبرية فدرجة تابع القوة العرضية على كل مجال من الجائز (الحامل) أعلى بدرجة واحدة من تابع الحمل الموزعة على هذا المجال من الجائز اما درجة تابع عزم الانعطاف فأعلى بدرجة واحدة من تابع القوة العرضية ، وبالأحرى أعلى بدرجتين من تابع الحمل الموزعة .

٦ - اذا كان مخطط القوة العرضية على طول الجائز او على جزء منه متناظر عكسيا فان مخطط عزم الانعطاف على نفس الطول من الجائز يكون متناظر مباشرة والعكس صحيح (شكل 2-43) .

٧ - على كل مجال من الجائز فان تغير قيمة عزم الانعطاف بين قطاعين ما يساوي مساحة مخطط القوة العرضية بين هذه القطاعين (شكل 2-43) و (شكل 2-44) .

يمثل الشكل (2-44) جائزاً بسيطاً محملاً بحمولات وحيدة كما ويمثل ايضاً مخطط Q , M . بمعرفة قيمة واحدة للقوة الناعمية في نقطة ما من القضيب يمكن تعيين ثابت التكامل k الذي ظهر في العلاقة (2-7) . وبمعرفة قيمة واحدة لكل من $Q(x)$ و $M(x)$ او بمعرفة قيمتين للعزم $M(x)$ يمكن تعيين ثوابت التكامل C_1 , C_2 التي ظهرت في العلاقات (2-9) و (2-10) . تعطي شروط استناد القضيب الستاتيكية قيماً مجهولة لبعض قيم القطع مما يساعد على حساب ثوابت التكامل k , C_1 , C_2 . فعلى سبيل المثال (الجدول 2-1) .

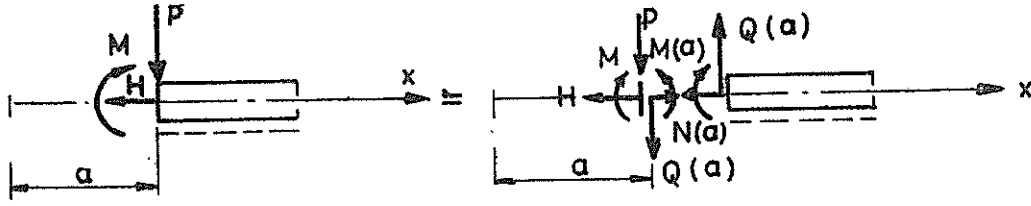
الجدول 2-1

	$M(a) = 0$	في المفصل
	$N(a) = 0; M(a) = 0$	في الحرة المتحركة
	$N(a) = 0$	في استناد الحركة المتحركة أفقياً
	$Q(a) = 0$	في الحرة المتحركة عمودياً
	$N(a) = 0, O(a) = 0; M(a) = 0$	في النهاية الحرة للقيود

إذا اثرت على نهاية قضيب $x=a$ القيم المعروفة M , P , H (شكل 2-45) عندئذ تصبح قيم القطع $N(a)$, $Q(a)$, $M(a)$ ، حسب شروط التوازن ، كما يلي :

$$N(a) = H , \quad Q(a) = -P , \quad M(a) = M \quad (2.11)$$

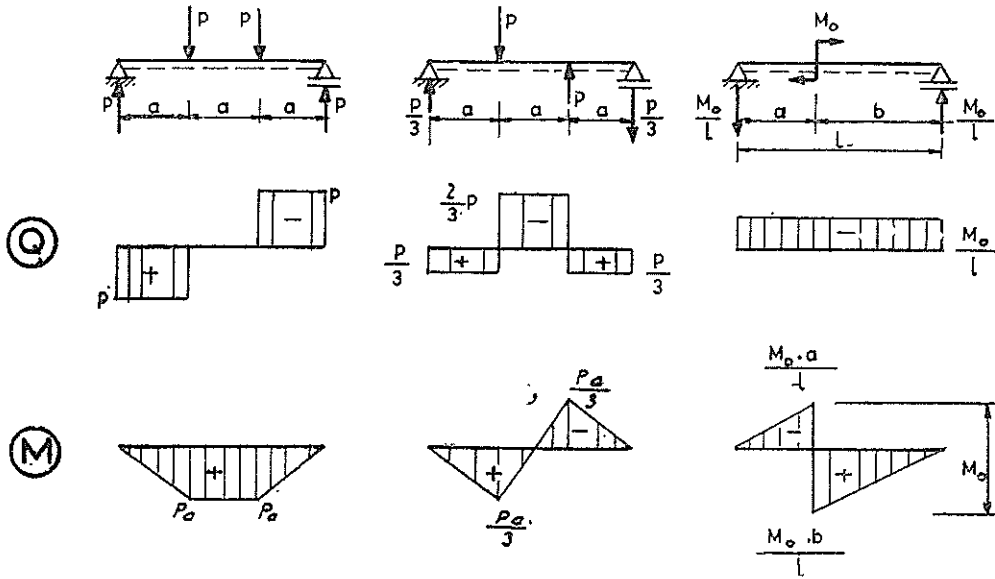
باستخدام شروط الاطراف المدونة في الجدول (2-1) يمكن تعيين قيم القطع في جملة مستوية مقررته ستاتيكية ومركبة من قضبان مستقيمة والناجمة عن تأثير الحمولات $q_x(x)$ و $q_z(x)$.



شكل 2-45

تشير مخططات M , Q الممثلة في الشكل (2 46) الى أن مخطط القوة العرضية يحتوي في الامكنة التي تؤثر فيها قوى وحيدة على انزلاق (قوة) كما تشير الى ان قيمة الانزلاق تساوي قيمة الحملولة الوحيدة التي تؤثر في ذلك المكان . مما ذكر يستنتج أن القوة العرضية تشير على يمين ويسار مكان تأثير القوة الوحيدة مباشرة على قيم مختلفة .

كما يلاحظ أن مخطط عزم الالتفاف يحتوي في المكان الذي يؤثر فيه قوى وحيدة على إنكسار . من الملاحظ أيضاً ان مخطط M يحتوي في المكان الذي يؤثر فيه عزم وحيد (مزدوجة قوى) على قفزة (انزلاق) قيمتها تساوي قيمة العزم الوحيد (عزم مزدوجة القوى الخارجية) .



شكل 2-46

يمكن استخدام العلاقة التي تربط بين $Q(x)$, $M(x)$, $q(x)$ كتحقق للنتائج التي يتم الحصول عليها بواسطة طريقة القطع ، كما يمكن أيضاً بواسطتها الانطلاق من تابع المحملة $q(x)$ ثم إجراء التكامل مرة واحدة للحصول على تابع القوة العرضية $Q(x)$ وبإجراء التكامل ثانية يتم الحصول على تابع عزم الانعطاف $M(x)$. تحدد ثوابت التكامل بواسطة شروط الاطراف الستاتيكية (المنسوبة على القوة العرضية وعزم الانعطاف) .

بفضل العلاقات التفاضلية (2-6) يمكن التوصل إلى الجدول التالي :

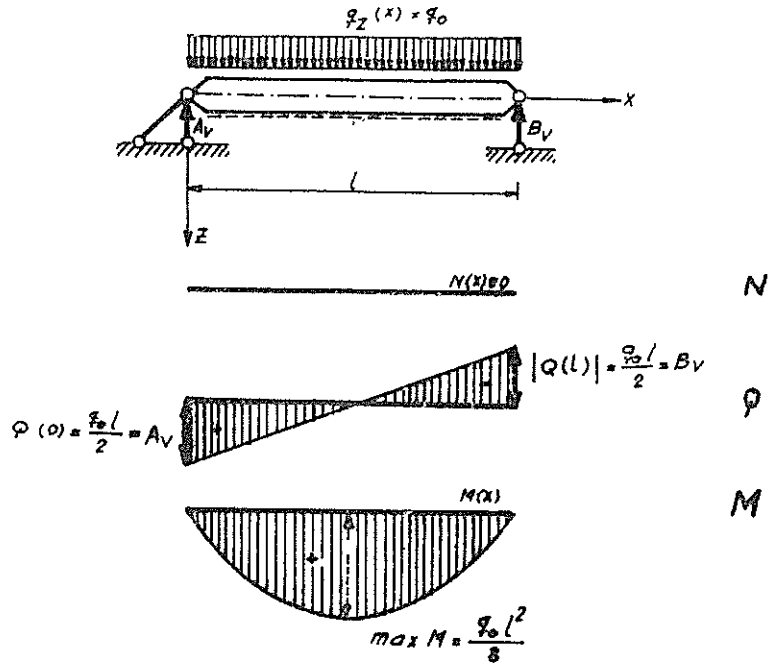
جدول (2-2)

q	Q	M
0	قيمة حدية (عظمى بالقيمة المطلقة)	نقطة انعطاف (نقطة انقلاب)
	0	قيمة حدية (عظمى بالقيمة المطلقة)
مخطط « تابع » q	مخطط « تابع » Q	مخطط « تابع » M
0	0	ثابت
	ثابت	خطي
ثابت	خطي	قطع مكافئ درجة ثانية
خطي	قطع مكافئ درجة ثانية	قطع مكافئ درجة ثالثة
قوة وحيدة P	انزلاق (قفزة) في مكان تأثير P	انكسار في مكان تأثير P
عزم وحيد M	لا يتغير	انزلاق في مكان تأثير P

مثال 20 :

حمل جانز مسنود على مسندين بسيطين بحمولة موزعة بانتظام شدتها $q_z(x) = q_0$ (شكل 2-47) .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (ممثلة بمعادلات ومنحنيات) .



شكل 2-47

الحل :

من المعادلات التفاضلية :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_z(x) = -q_0, \quad \frac{dN}{dx} = -q_x(x) = 0$$

ينتج بعد التكامل :

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -q_0 x + C_1$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 ; \quad N(x) = k$$

بسبب استناد الجائز المفصلي (مسند ثابت ومسند فوسي يقوم مقام مسند متحرك) نصلح حسب الجدول (2-1) الشروط التالية :

$$M(0) = 0 = C_2$$

$$M(l) = 0 = -q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 ; \quad N(l) = 0 = k$$

بواسطتها يتم الحصول على الثوابت الآتية :

$$k = 0 ; C_1 = \frac{q_0 l}{2} ; C_2 = 0$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلات الأولى يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة :

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

$$M(x) = \frac{q_0 l}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

أما قيم القطع فتُرسم على شكل منحنيات (المخططات) تحت الجائز مباشرة ، حيث ترسم القيم الموجبة باتجاه المنطقة المخططة (هنا للأسفل) أما القيم السالبة فتُرسم بعكس اتجاه المنطقة المخططة (هنا للأعلى) .

تتقدم القوة العرضية في منتصف الجائز ولهذا السبب يحتوي مخطط عزم الانعطاف هناك (في تلك النقطة) قيمة أعظمية :

$$\max M = \frac{q_0 l^2}{8}$$

تتوازن القوى العرضية عند نقاط الاستناد (عند القطوع الموجودة بجانب المساند) مع ردود أفعال المساند ، وبذلك يصلح :

$$Q(0) = A_v = \frac{q_0 l}{2}$$

و

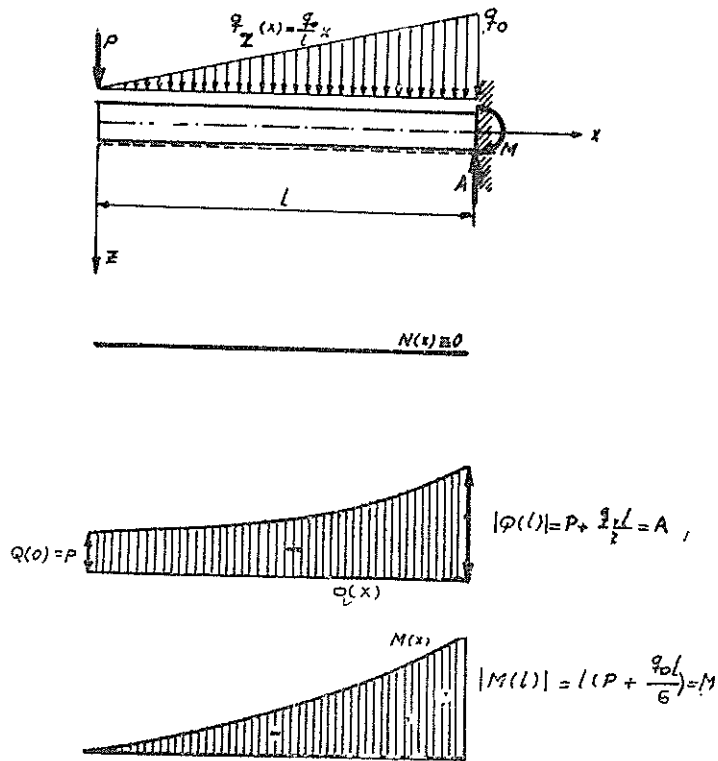
$$-Q(l) = B_v = \frac{q_0 l}{2}$$

مثال 21 :

حمل جائز بارز (ظفر) بحمولة موزعة خطية (حمولة مثلثية) تمثلى بالعلاقة التالية :

$$q_z(x) = \frac{q_0}{l} x$$

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (ممثلة بشكل معادلات ثم بشكل منحنيات) .



شكل 2-48

الحل :

بشكل واضح ، فان القوة الناعمية تنعدم على طول الجائز . من العلاقة التفاضلية :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_z(x) = -\frac{q_0}{L}x$$

ينتج بعد المكاملة :

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -\frac{q_0}{L}\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{L}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

باستخدام شروط الاطراف الستاتيكية حسب الجدول (2-1) يتم تعيين الثوابت :

$$Q(0) = -P = C_1$$

$$M(0) = 0 = C_2$$

وبذلك تصبح قيم القطع، بعد تبديل الثوابت بقيمها، كما يلي :

$$Q(x) = - \left(P + \frac{q_0}{2l} x^2 \right)$$

$$M(x) = - \left(Px + \frac{q_0}{6l} x^3 \right)$$

بواسطة القوة العرضية وعزم الانعطاف عند نقطة الوثاقة يتم الحصول على قوة الاستناد (رد فعل المسند) :

$$- Q(l) = A_v = P + \frac{q_0 l}{2}$$

وعلى عزم الوثاقة :

$$- M(l) = M_a = l \left(P + \frac{q_0 l}{6} \right)$$

مثال 22 :

حمل جائز مسنود على مسندين بسيطين (جائز بسيط) كما يشير الشكل (2-49) بمحمولة موزعة تعطى شدتها بالعلاقات التالية :

$$q_{z1}(x) = 4q_0 \frac{x^2}{l^2} , \quad q_{z2} = \frac{4q_0}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

وكذلك أيضاً حمل بقوة وحيدة H .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (ممثلة بشكل قوابح ثم بشكل منحنيات) .

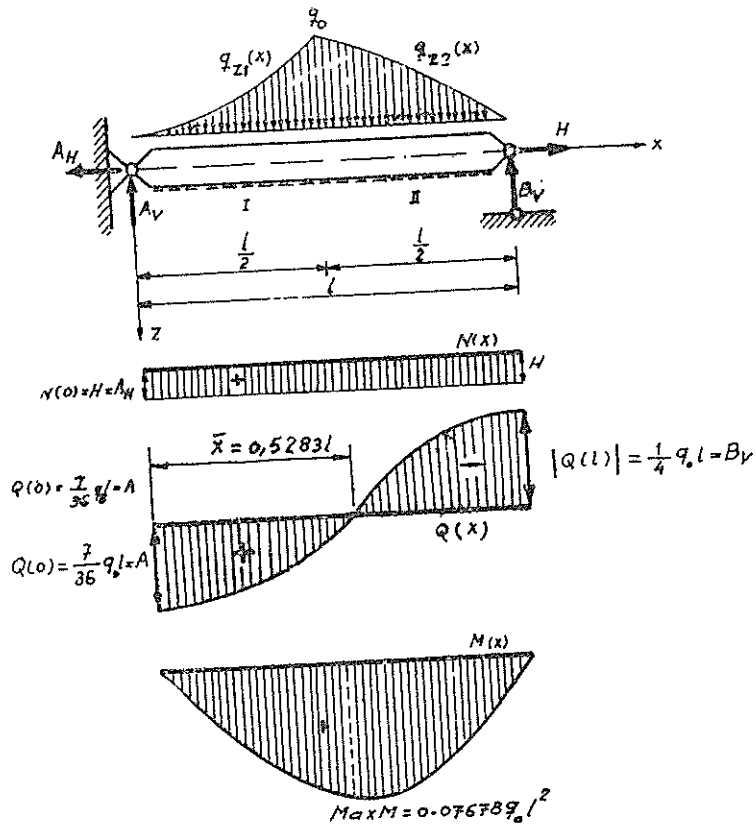
الحل :

نتيجة لتأثير القوة الأفقية الوحيدة H تظهر في القضيب قوة ناشية تبلغ :

$$N(x) = H$$

سيتم إيجاد القوة العرضية وعزم الانعطاف لكل مجال على حدة . فالجائز يتألف من مجالين الأول $0 \leq x \leq l/2$ والثاني $l/2 \leq x \leq l$.

المجال I $(0 \leq x \leq l/2)$:



شكل 2-49

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -4q_0 \frac{x^2}{l^2}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -4q_0 \left(\frac{x^3}{3l^2} + C_1 \right)$$

$$M(x) = -4q_0 \left(\frac{x^4}{12l^2} + C_1 x + C_2 \right)$$

المجال II : $(l/2 \leq x \leq l)$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{4q_0}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) = -\frac{4q_0}{3} \left(x - \frac{x^3}{3l^2} + C_3 \right)$$

$$M(x) = -\frac{4q_0}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12l^2} + C_3 x + C_4 \right)$$

حسب الجدول (2-1) فإن شروط الاطراف الستاتيكية عند نقاط الاستناد هي التالية :

$$M(0) = 0 = C_2, M(l) = 0 = - \frac{4q_0}{3} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{12} + C_3 l + C_4 \right)$$

من أجل النقطة $x = l/2$ المشتركة بين المجالين تتساوى القوة العرضية وعزم الانعطاف وذلك لأسباب التوازن . من شرط الاستمرار :

$$Q_I \left(\frac{l}{2} \right) = Q_{II} \left(\frac{l}{2} \right), M_I \left(\frac{l}{2} \right) = M_{II} \left(\frac{l}{2} \right)$$

ينتج :

$$-4q_0 \left(\frac{l}{24} + C_1 \right) = - \frac{4q_0}{3} \left(-\frac{l}{2} - \frac{l}{24} + C_3 \right)$$

$$-4q_0 \left(\frac{l^2}{192} + C_1 \frac{l}{2} + C_3 \right) = - \frac{4q_0}{3} \left(\frac{l^2}{8} - \frac{l^2}{192} + C_3 \frac{l}{2} + C_4 \right)$$

بفضل الشروط الأربعة المذكورة يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = - \frac{7}{144} l, C_2 = 0, C_3 = - \frac{23}{48} l, C_4 = \frac{l^2}{16}$$

وبذلك تأخذ معادلات قيم القطع، بعد تبديل ثوابت التكامل بقيمها، شكلها النهائي التالي :

المجال I $(0 \leq x \leq l/2)$:

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{36} \left(7 - 48 \frac{x^3}{l^3} \right)$$

$$M(x) = \frac{q_0 l^2}{36} \left(7 \frac{x}{l} - 12 \frac{x^4}{l^4} \right)$$

المجال II $(l/2 \leq x \leq l)$:

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{36} \left(23 - 48 \frac{x}{l} + 16 \frac{x^3}{l^3} \right)$$

$$M(x) = \frac{q_0 l^2}{36} \left(-3 + 23 \frac{x}{l} - 24 \frac{x^2}{l^2} + 4 \frac{x^4}{l^4} \right)$$

عند النقطة $x = 0,5283 l$ تنعدم القوة العرضية . أما عزم الانعطاف في تلك النقطة فيبلغ :

$$\max M = 0,0778 q_0 l^2$$

أما ردود أفعال المساند فيتم تعيينها بالاستعانة بالقوى العرضية :

$$Q(0) = A_v = \frac{7}{36} q_0 l ; -Q(l) = R_v = \frac{1}{4} q_0 l$$

أما رد الفعل الافقي A_H فيتم الحصول عليه من القوة الناعمية :

$$N(0) = A_H = H$$

٢ - ٤ الجائز البسيط

يمكن تعريف الجائز البسيط بأنه لإنشاء ذو المحور المستقيم الذي يستند عند طرفيه على مسندين مفصلين احدهما من النوع الثابت وأخرها من النوع المتحرك الذي يسمح بحركة انتقالية في اتجاه ما . وهذا النوع من الاستناد يسمى إستناداً بسيطاً ومنه أخذ الجائز اسمه .

٢ - ٤ - ١ أمثلة على الجائز البسيط

مثال 23 :

المعطى : الجائز البسيط (شكل 2-50) .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وحساب قيم القطع ورسم مخططاتها .

الحل :

١ - حساب ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$\sum H = 0 ; A_H = 0$$

$$\sum M_b = 0 : A_v \cdot l - P \cdot b = 0 , A_v = P \cdot b / l$$

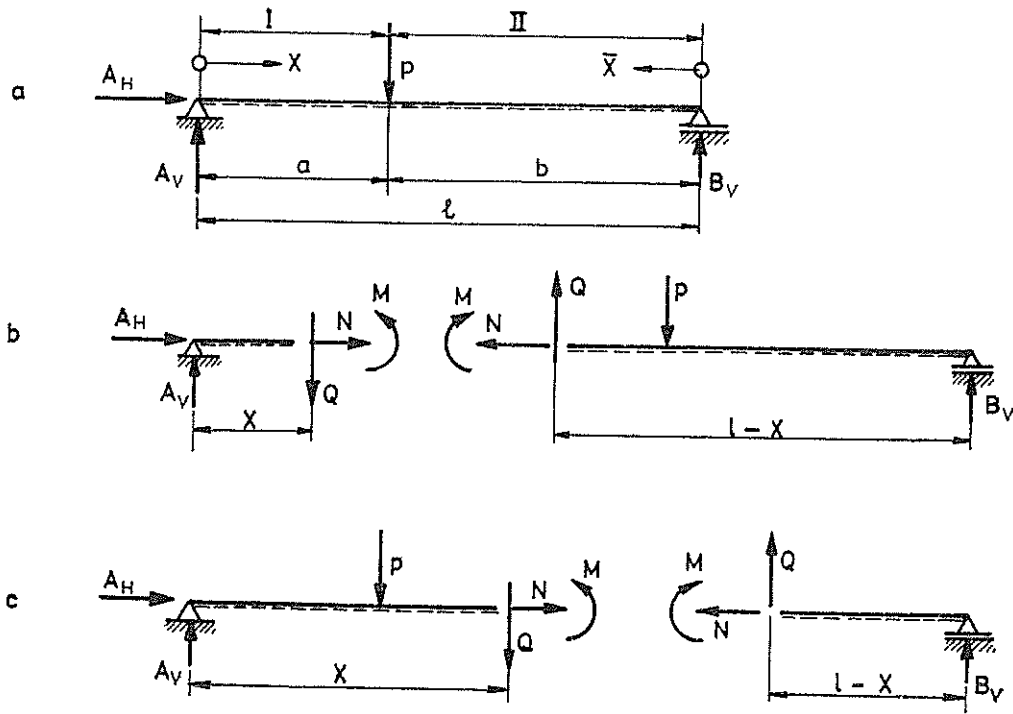
$$\sum V = 0 : A_v + B - P = 0 , B_v = P \cdot a / l$$

التدقيق :

$$\sum M_G = 0 : A_v \cdot a - B_v \cdot b = 0$$

٢ - حساب قيم القطع :

يتألف الجائز من مجالين فقط هما المجال I والمجال II .



شكل 2-50

المجال I : $(0 \leq \bar{x} \leq a)$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الأيسر المقطوع (شكل 2-50 b) يتم تعيين قيم المقطع :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_V = 0 ; Q = P \frac{b}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M - A_V \cdot x = 0 ; M = P b \frac{x}{l}$$

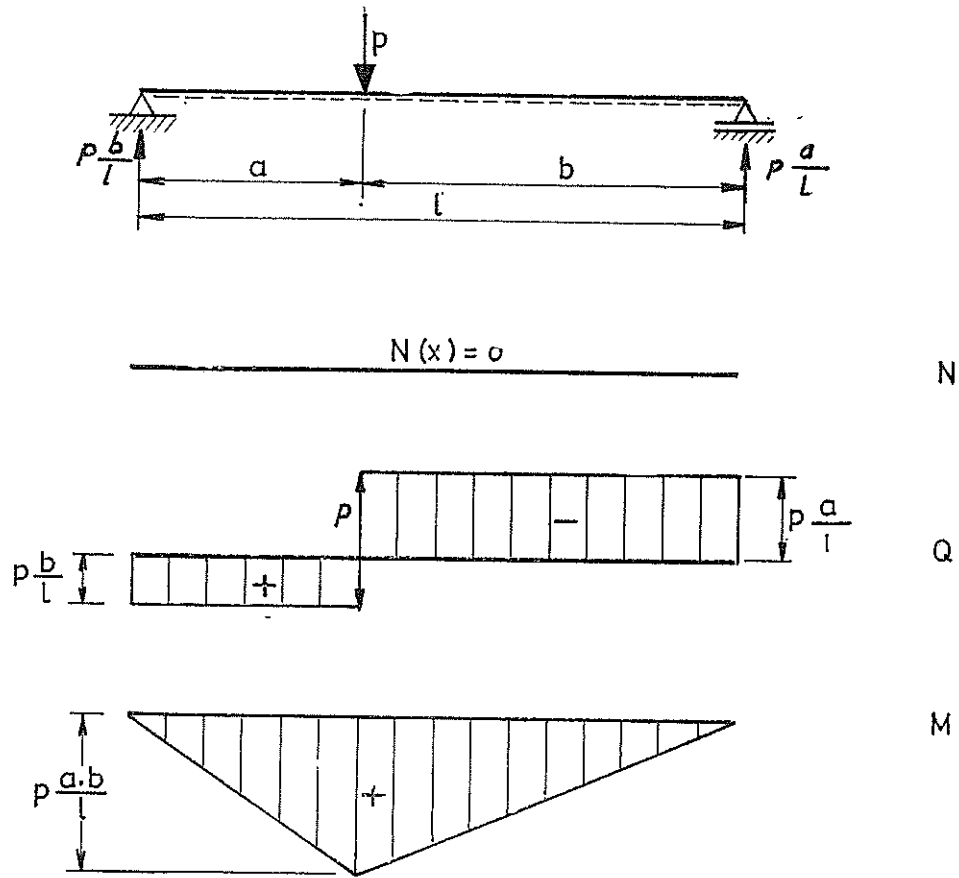
المجال II : $(0 \leq x \leq b)$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الأيمن المقطوع (شكل 2-50c) يتم تعيين قيم المقطع :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q + B_V = 0 ; Q = - P \frac{a}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M - B_V \cdot \bar{x} = 0 ; M = +P \frac{a}{l} \bar{x}$$



شكل 2-51

لقد تم في الشكل (2-51) رسم مخططات قيم القطع .

حالة خاصة . القوة P تؤثر في منتصف الجائز $a = b = l/2$ (شكل 2-52) .

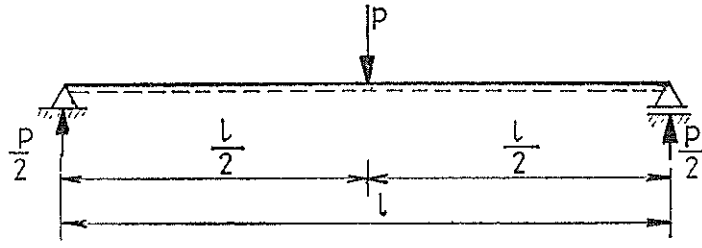
مثال 24 :

المطلوب . إيجاد قيم قطع الجائز البسيط الممثل في الشكل (2-53) (إيجاد المعادلات ورسم المخططات) .

الحل .

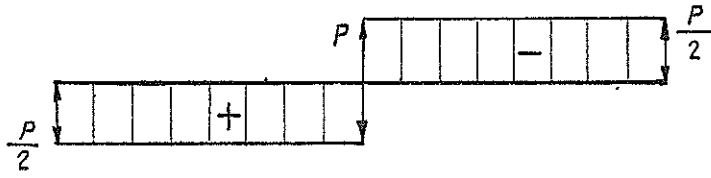
١ - حساب ردود أفعال المساند :

من تناظر الجلة (هندسياً وحولياً) يمكن فوراً القول بأن $A_v = B_v = P$ وكذلك لعدم وجود قوى أفقية بأن $A_H = 0$. بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على نفس النتائج .

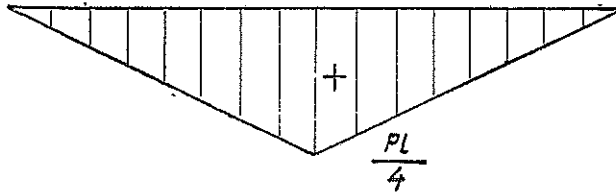


$$N = 0$$

N



Q



M

شكل 2-52

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

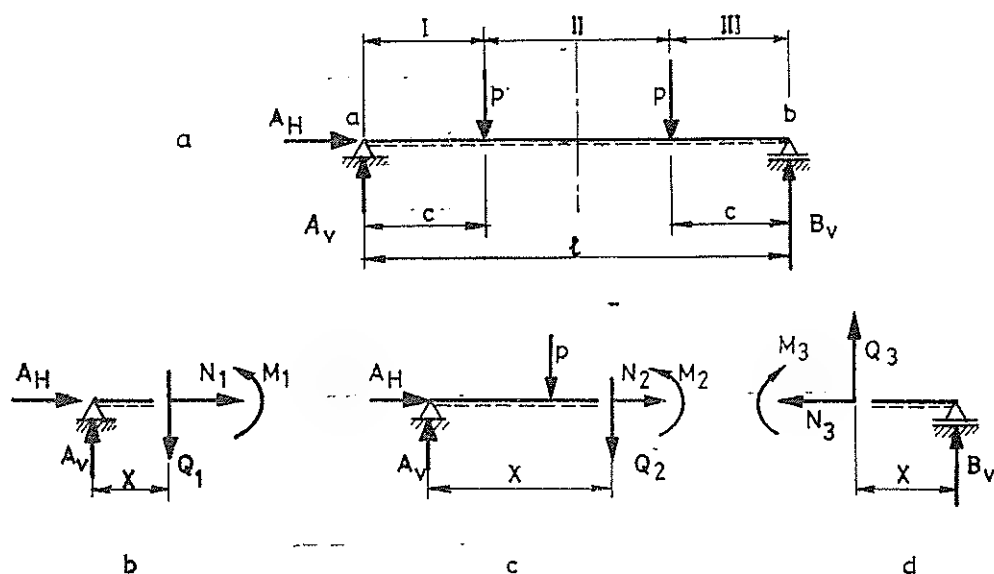
$$\Sigma M_A = 0 : B_v \cdot l - P(l-c) - P \cdot c = 0 ; B_v = P$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P - P = 0 ; A_v = P$$

التدقيق .

$$\Sigma M_d = 0 : A_v \cdot \frac{l}{2} - B_v \cdot \frac{l}{2} + P \cdot \left(\frac{l}{2} - c\right) - P \cdot \left(\frac{l}{2} - c\right) = 0$$

يؤكد تبديل قيم B_v و A_v صحة النتائج المحسوبة .



شكل 2-53

٢ - إيجاد معادلات قيم المقطع (M, Q, N) :

يتألف الجائز من ثلاث مجالات .

المجال I $(0 \leq x \leq c)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الأيسر المقطوع (شكل b 2-53) العلاقات التالية .

$$\sum H = 0 : N_1 = -A_H = 0$$

$$\sum V = 0 : Q_1 = A_V = P$$

$$\sum M_x = 0 : M_1 = A_V \cdot x = P \cdot x$$

$$x = 0 ; M_1 = 0$$

$$x = c ; M_1 = c \cdot P$$

المجال II $(c \leq x \leq l-c)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الأيسر المقطوع (شكل c 2-53) ينتج :

$$\sum H = 0 : N_2 = -A_H = 0$$

$$\sum V = 0 : Q_2 = A_V - P = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M_2 = A_V \cdot x - P(x-c) = P \cdot c$$

المجال III : $(0 \leq \bar{x} \leq c)$

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء اليمين المقطوع (شكل 2-53 d) قيم المقطع في المجال الثالث:

$$\Sigma H = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_3 = -B_v = -P$$

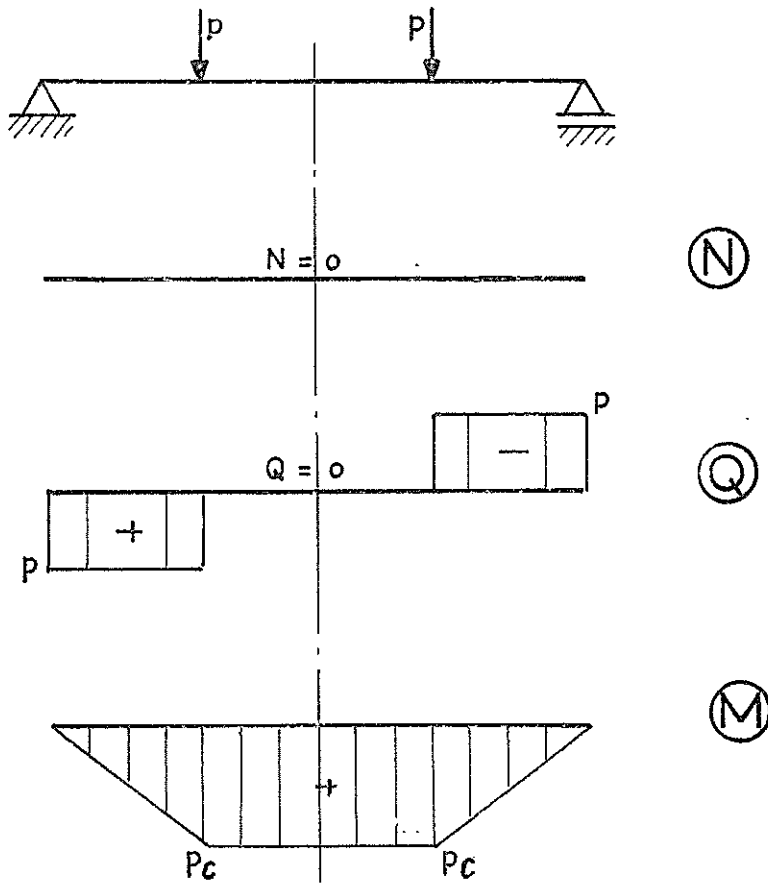
$$\Sigma M_{\bar{x}} = 0 : M_3 = B_v \bar{x} = P \bar{x}$$

$$\bar{x} = 0 ; M_3 = 0$$

$$\bar{x} = c ; M_3 = Pc$$

٣ - رسم مخططات قيم المقطع :

بعد إيجاد معادلات قيم المقطع ترسم المخططات (شكل 2-54)



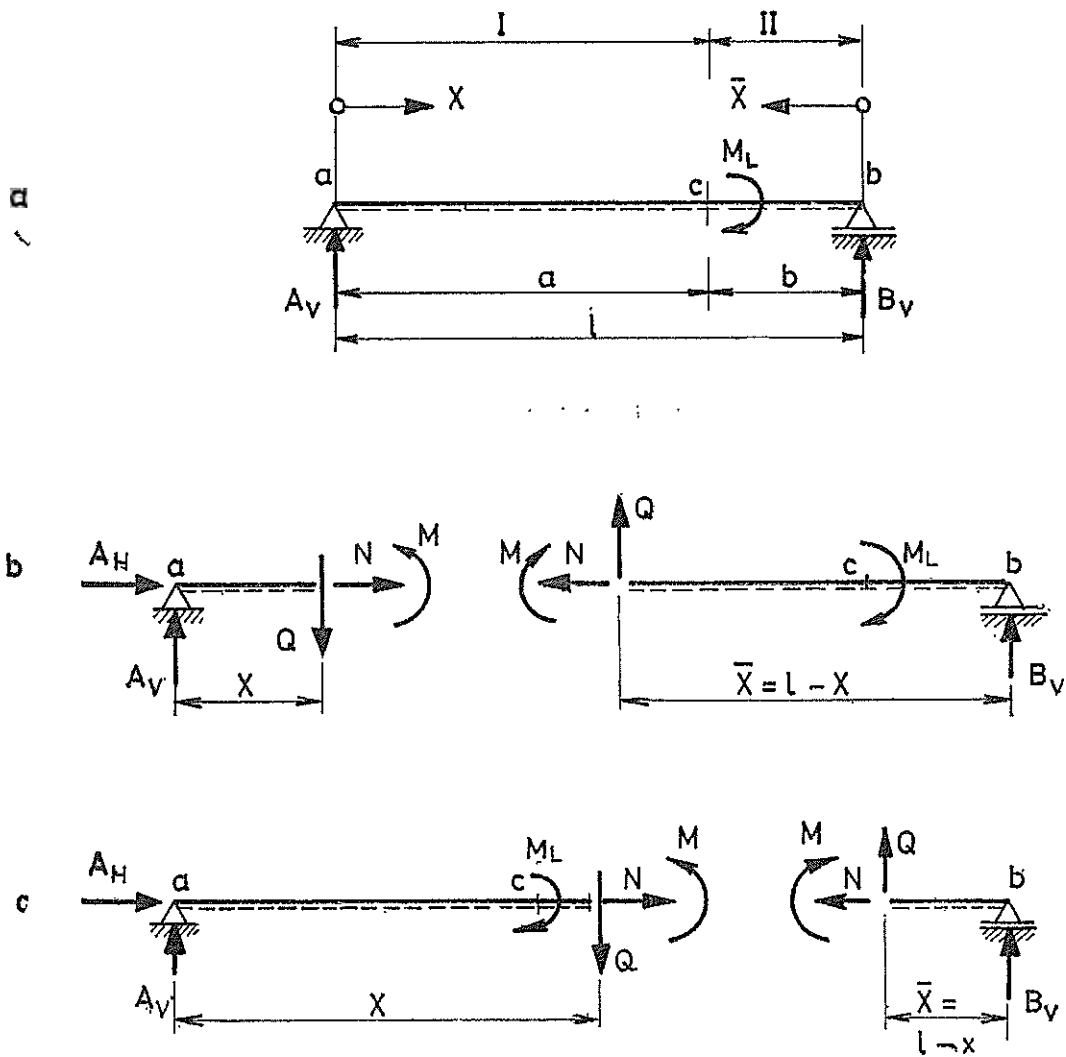
شكل 2-54

ملاحظة : من الشكل (2-51) يتم التوصل للنتيجة التالية :

- ١ - الجملة متناظرة هندسياً وحمولياً .
- ٢ - القوة العرضية Q متناظرة عكسياً .
- ٣ - عزم الانعطاف M متناظر .

مثال 25 :

المطلوب : إيجاد ردود افعال المساند وقيم القطع (M, Q, N) (معادلات ومخططات) للجائز البسيط الممثل في الشكل (2-55) .



شكل 2-55

الحل :

١ - حساب ردود أفعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : A_v \cdot l + M_L = 0 ; A_v = - \frac{M_L}{l}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v = 0 ; B_v = + \frac{M_L}{l}$$

التدقيق :

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot l - M_L = 0$$

٢ - إيجاد معادلات قيم القطع .

يتألف الجائز من مجالين فقط .

المجال I ($0 \leq x \leq a$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الأيسر (شكل b 2-55) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = - A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = A_v = - \frac{M_L}{l}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = A_v \cdot x = - \frac{M_L}{l} x$$

$$x = 0 : M = 0$$

$$x = a : M = - M_L \frac{a}{l}$$

المجال II ($0 \leq \bar{x} \leq b$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الأيمن (شكل c 2-55) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = -B_v = - \frac{M_L}{l}$$

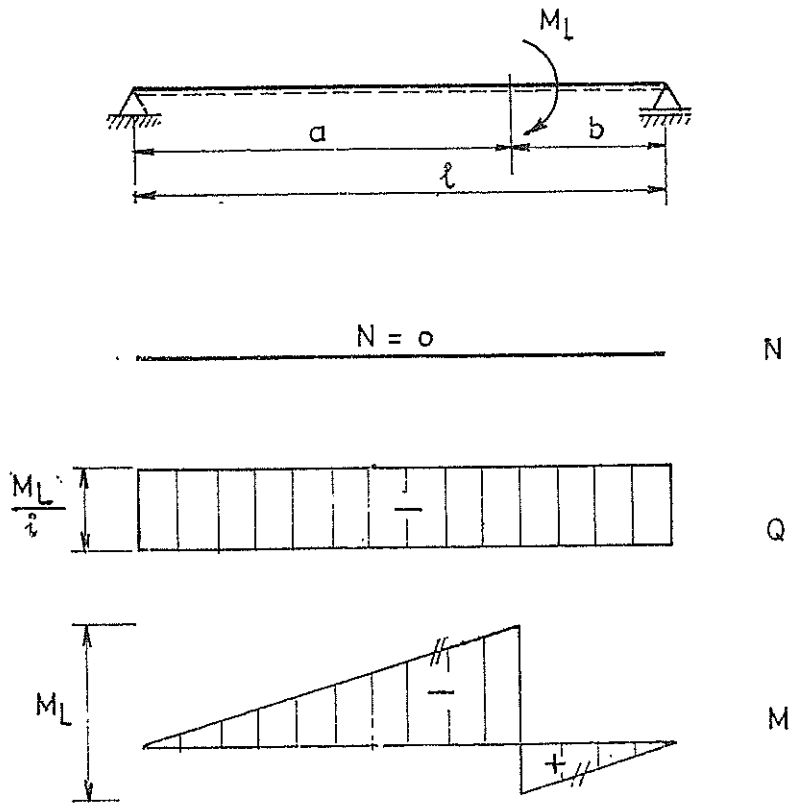
$$\Sigma M_{\bar{x}} = 0 : M = B_v \cdot \bar{x} = M_L \frac{\bar{x}}{l}$$

$$\bar{x} = 0 : M = 0$$

$$\bar{x} = b : M = M_L \frac{b}{l}$$

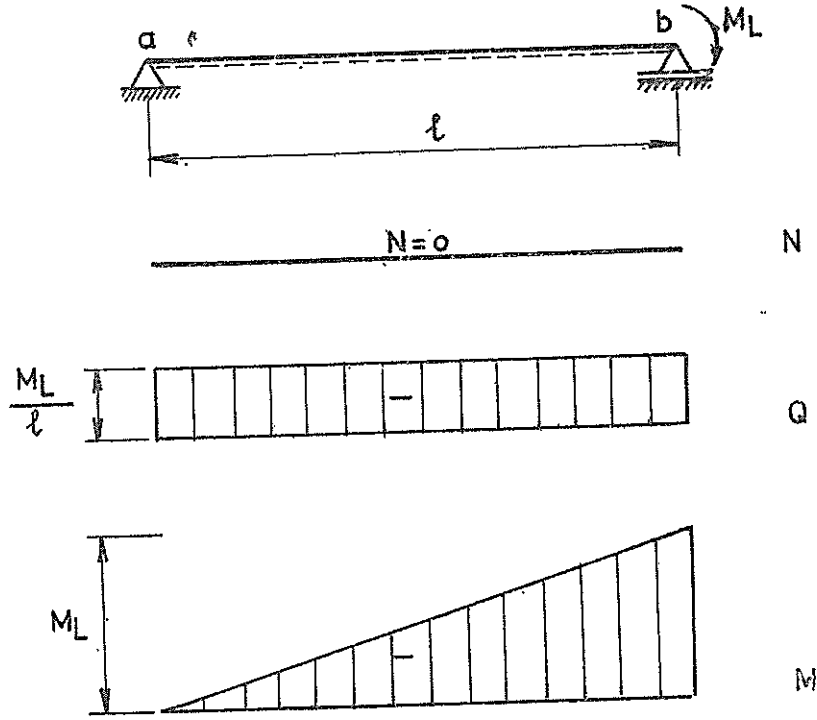
٣ - رسم مخططات قيم القاطع

لقد تم في الشكل (2-56) رسم مخططات قيم القاطع .



شكل 2-56

حالة خاصة : $b = 0$, $a = l$ (شكل 2-57) .



شكل 2-57

مثال 26 :

جائز بسيط يحمل بحمولة جيبيه (على شكل منحنى جيبي) - نصف موجة (شكل 2-58) .
 المعطى : طول الجائز l ، الشدة العظمى للحمولة q_0 .
 المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع (M, Q, N) (معادلات ومخططات) .
 الحل :

١ - معادلة شدة الحمولة $q(x)$:

$$q(x) = q_0 \cdot \sin \alpha x$$

شروط اطراف التحميل :

$$q(x=l) = 0$$

بتحقيق معادلة شدة الحمولة لشروط الاطراف ينتج :

$$q_0 \sin \alpha l = 0 ; \alpha l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

جود نصف مولوجة جيبيية فان الحل $\alpha l = \pi$ هو المطلوب ومنه $\alpha = \pi/l$ وبذلك تصبح معادلة الجمولة (شدة الجمولة عند النقطة التي تبعد x عن النقطة a) :

$$q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)$$

٢ - ردود أفعال المساند .

يعطي تطبيق شروط التوازن ، المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot l - \frac{l}{2} \int_0^l q(x) dx, B_v = \frac{1}{2} \int_0^l q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x dx$$

$$B_v = q_0 \frac{l}{\pi}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - \int_0^l q(x) dx = 0 ; A_v = \int_0^l q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x dx - q_0 \frac{l}{\pi}$$

$$A_v = q_0 \frac{l}{\pi}$$

التدقيق :

لتنظر الجائز بالنسبة للحمولات الشاقولية ينبغي أن يتساوى ردي الفعل الشاقوليين B_v, A_v ويساوي كل منها نصف الجمولة المؤثرة على الجائز :

$$A_v = B_v = \int_0^{l/2} q(x) dx = \int_0^{l/2} q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x dx = q_0 \frac{l}{\pi}$$

٣ - قيم القطع :

آ - باستخدام العلاقات التفاضلية (والتي تفضل في حالة عدم معرفة مساحة سطوح التحميل أو عدم معرفة مراكز ثقلها) :

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

بمكاملة هذه العلاقة ، بعد تبديل تابع الجمولة ، يتم الحصول على القوة العرضية :

$$Q = - \int q(x) dx = - \int q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right)x dx = q_0 \frac{l}{\pi} \cos\left(\frac{l}{\pi}\right)x + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

وبمكاملة هذه العلاقة يتم التوصل لعزم الانعطاف :

$$M = \int Q dx = \int \left[q_0 \frac{l}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x + C_1 \right] dx$$

$$= q_0 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right)x + C_1 x + C_2$$

شروط الاطراف الستاتيكية (اللازمة لايجاد ثوابت التكامل C_1, C_2)

يتم تحديد قيمة ثوابت التكامل بتحقيق معادلات M, Q للشرطين :

$$Q(x=0) = A_v; A_v = q_0 \frac{l}{\pi} + C_1 ; C_1 = A_v - q_0 \frac{l}{\pi} = 0$$

$$M(x=0) = 0; \quad C_2 = 0$$

بتبديل قيم ثوابت التكامل في معادلات M, Q ينتج :

$$Q = q_0 \frac{l}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x$$

$$M = q_0 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right)x$$

ويتضح من هذه المعادلات أن شكل القوة العرضية يمثل منحنى جيب تمام طول الموجة فيه (وهو يقابل 2π) يتحدد بالطول $2l$ (أي ان l تقابل π) كما أن القيمة العظمى للقوة العرضية تساوي $\frac{Pl}{\pi}$ وتقع عند a حيث x تساوي صفراً وعند b حيث x تساوي l (أو حيث $x = \frac{\pi}{l}$ تساوي π) .

أما شكل منحنى عزوم الانعطاف فيمثل منحنى جيبي يشبه منحنى الجمولة ذاتها ، غير أن القيمة القصوى للعزم في منتصف الجائز عند c تصبح :

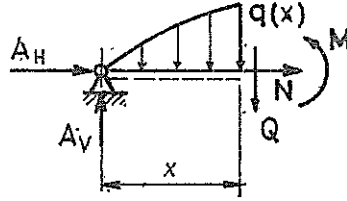
$$\max M = q_0 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2$$

التدقيق :

$$Q(x=l) = -B_v ; -q_0 \frac{l}{\pi} = -q_0 \frac{l}{\pi}$$

$$M(x=l) = 0 ; 0 = 0$$

ب - باستخدام طريقة القطع :



شكل 2-58 a

بنطبق شروط التوازن على الجزء المقطوع الایسر (شكل 2-58 a) ینتج :

$$\Sigma H = 0 : N + A_H = 0 : N = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v + \int_0^x q(x) dx = 0$$

بتبديل A_v بقيمتها والاستعاضة عن $q(x)$ بتابعها ینتج :

$$Q = q_0 \frac{l}{\pi} - \int_0^x q_0 \sin \left(\frac{\pi}{l} \right) x dx = \frac{l}{\pi} q_0 \cos \left(\frac{\pi}{l} \right) x$$

$$\Sigma M_z = 0 : M - A_v \cdot x - \int_0^x q(x) dx \left(x - \frac{\int_0^x x q(x) dx}{\int_0^x q(x) dx} \right) = 0$$

$$M = (A_v - \int_0^x q(x) dx) x + \int_0^x x q(x) dx$$

يمثل الحدين الأولين بعد اشارة المساواة تابع القوة العرضية :

$$Q = A_v - \int_x^x q(x) dx$$

وبذلك تصبح العلاقة الاخيرة :

$$M = Q \cdot x + \int_0^x x q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x dx$$

بالاستعاضة عن Q بتابعها ينتج :

$$M = \left[\frac{l}{\pi} q_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x \right] x + q_0 \int_0^x x \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x dx$$

يحل التكامل الأخير من العلاقة السابقة كالتالي :

$$\int_0^x x \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x dx = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2} - \frac{x \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x}{\frac{\pi}{l}}$$

وبالتبديل في المعادلة الاخيرة ينتج :

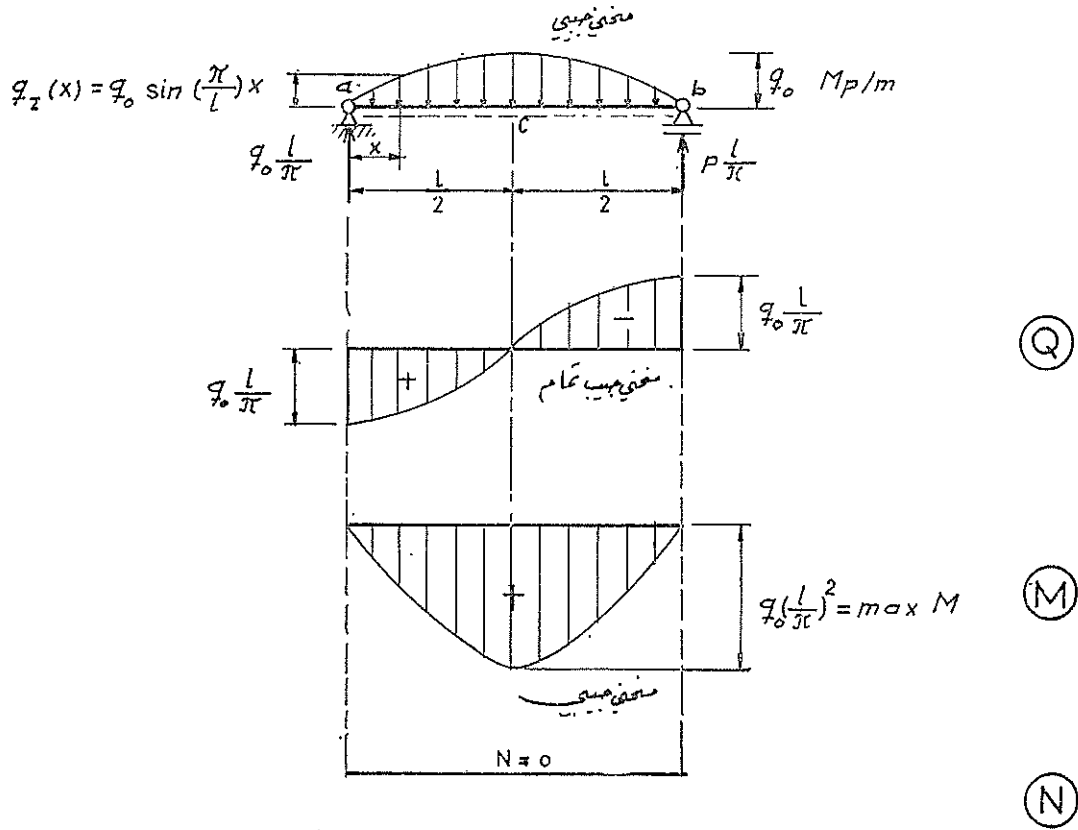
$$M = \frac{l}{\pi} q_0 \cdot x \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x + \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x - \frac{l}{\pi} q_0 \cdot x \cos\left(\frac{\pi}{l}\right) x$$

من هذه العلاقة يتم الحصول على عزم الانعطاف :

$$M = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 q_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}\right) x$$

٤ - مخططات قيم القطع:

لقد تم في الشكل (2-58) رسم مخططات قيم القطع .



شكل 2-58

مثال 27 :

جائر بسيط يحمل بمحمولة موزعة على شكل منحنى جيبي - موجة كاملة (شكل 2-59) .
المعطى : طول الجائر l والشدة العظمى للمحمولة q_0 .

المطلوب : إيجاد قيم القطع (M, Q, N) (معادلات ومخططات) .

الحل :

١ - معادلة الحمولة $q_z(x)$ (شدة الحمولة عند أي قطع يقع على بعد x عن a) :

$$q(x) = -q_0 \sin \alpha x$$

بتحقيق المعادلة السابقة لشروط أطراف الجملة ينتج :

$$q(x = \frac{l}{2}) = 0 : -q_0 \sin \alpha \frac{l}{2} = 0 ; \alpha \frac{l}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

الحل الأصغر الذي يختلف عن الصفر هو :

$$\alpha \frac{l}{2} = \pi : \alpha = \frac{2\pi}{l}$$

بالتبديل في معادلة التحميل ينتج :

$$q(x) = -q_0 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) x \quad (1)$$

٢ - ردود أفعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_a = 0 : B_v &= -\frac{1}{l} \left[\frac{1}{4} l \int_0^{l/2} q(x) dx + \frac{3}{4} l \int_{l/2}^l q(x) dx \right] \\ &= -\left\{ \frac{1}{4} \int_0^{l/2} q_0 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) x dx + \frac{3}{4} \int_{l/2}^l q_0 \sin \left(\frac{2\pi}{l} \right) x dx \right\} \end{aligned}$$

$$B_v = -\left[\frac{l}{4\pi} q_0 - \frac{3l}{4\pi} q_0 \right] = + \frac{1}{2\pi} q_0 l$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v + \left[-\int_0^{l/2} q(x) dx \right] - \left[-\int_{l/2}^l q(x) dx \right] = 0$$

بسبب كون :

$$\int_0^{l/2} q(x) dx - \int_{l/2}^l q(x) dx = 0$$

ينتج أن :

$$A_v + B_v = 0 \quad ; \quad A_v = -B_v = -\frac{1}{2\pi} q_0 l$$

٣ - إيجاد قيم القطع باستخدام العلاقات التفاضلية :

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad ; \quad Q = -\int q(x) dx = \int q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x dx$$

$$Q = -q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad ; \quad M = \int Q dx = \int \left[-q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x + C_1 \right] dx$$

$$M = -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x + C_1 x + C_2$$

بتحقيق معادلتى Q , M لشروط الاطراف الستاتيكية ينتج :

$$Q(x=0) = A_v \quad ; \quad -q_0 \frac{l}{2\pi} + C_1 = A_v \quad ; \quad C_1 = A_v + q_0 \frac{l}{2\pi} = 0$$

$$M(x=0) = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

بانعدام ثابتى التكامل تصبح معادلات Q , M كما يلي :

$$Q = -q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right) x \quad (2)$$

$$M = -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right) x \quad (3)$$

تعني معادلة القوة العرضية (2) أن شكل القوى العرضية يحدده منحني جيب تمام - يمثل موجة كاملة - وان القوة العرضية عند الطرفين a , b تساوي $(q_0 l/2\pi)$ وهي قيمة رد الفعل عندهما مع ملاحظة أن رد الفعل A_v يتجه للأسفل .

أما المعادلة (3) فتعني ان شكل منحني عزم الانعطاف يتحدد بمنحني جيبى - يمثل موجة كاملة - ويشبه منحني الجولة ذاتها . تبلغ القيمة الاعظمية $(q_0 l/2\pi)^2$ وتقع عند النقاط $x=3l/4$ و $x=l/4$.

التدقيق :

$$\begin{aligned} Q(x=l) &= -B_v ; \quad -q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)l - \frac{1}{2\pi} q_0 l = -\frac{1}{\pi} q_0 l \\ &= -\frac{1}{\pi} q_0 l = -\frac{1}{\pi} q_0 l \end{aligned}$$

$$M(x=l) = 0 ; \quad -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{l} l = 0$$

تحديد مكان وقيمة القيم الاعظمية لـ M, Q :

$$\frac{dM}{dx} = Q = 0 ; \quad -q_0 \frac{l}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)x = 0 ; \quad \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)x = 0$$

منها ينتج :

$$x_1 = \frac{l}{4} : \min M = -q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

$$x_2 = \frac{3}{4}l : \max M = + q_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) = 0 ; \quad -q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right)x = 0 ; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right)x = 0$$

منها ينتج :

$$x_3 = 0 ; \quad x_4 = l ; \quad \min Q = -\frac{1}{2\pi} q_0 l$$

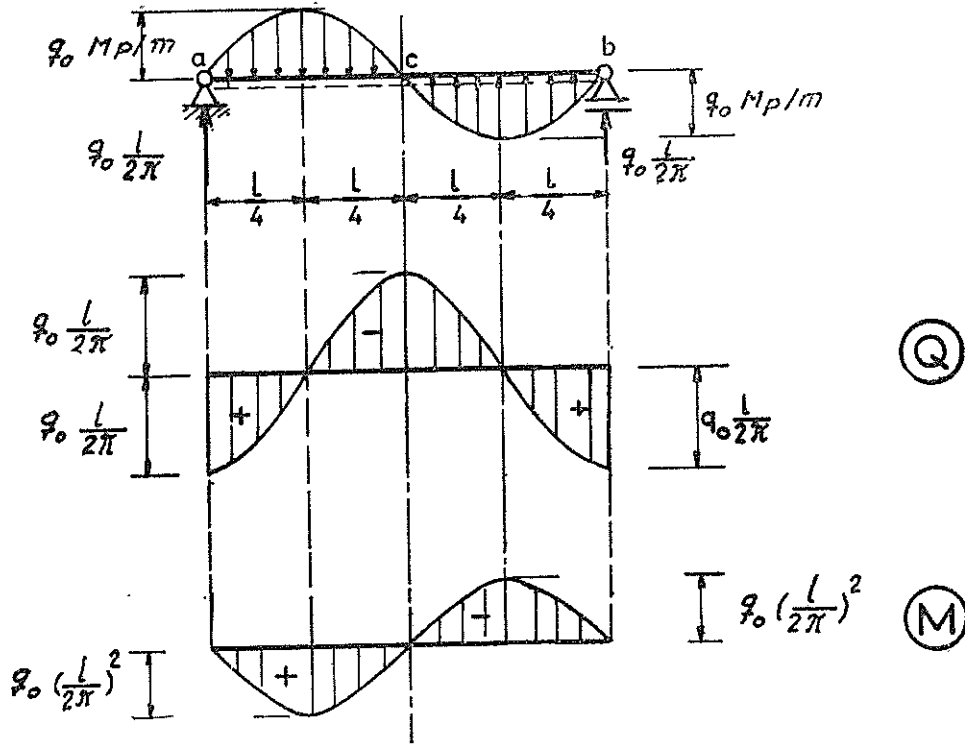
$$x_5 = \frac{l}{2} ; \quad \max Q = +\frac{1}{2\pi} q_0 l$$

٤ - مخططات قيم القطع .

لقد تم في الشكل (2-59) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 28 :

حمل جائز بسيط بحمولة موزعة على شكل منحنى جيب تمام - بطول نصف موجة (شكل 2-60) .



شكل 2-59a

المعطى : طول الجائز l والشدة الاعظمية للحمولة q_0 .

المطلوب : ايجاد مخططات قيم القطع M, Q, N .

الحل :

معادلة شدة الحمولة :

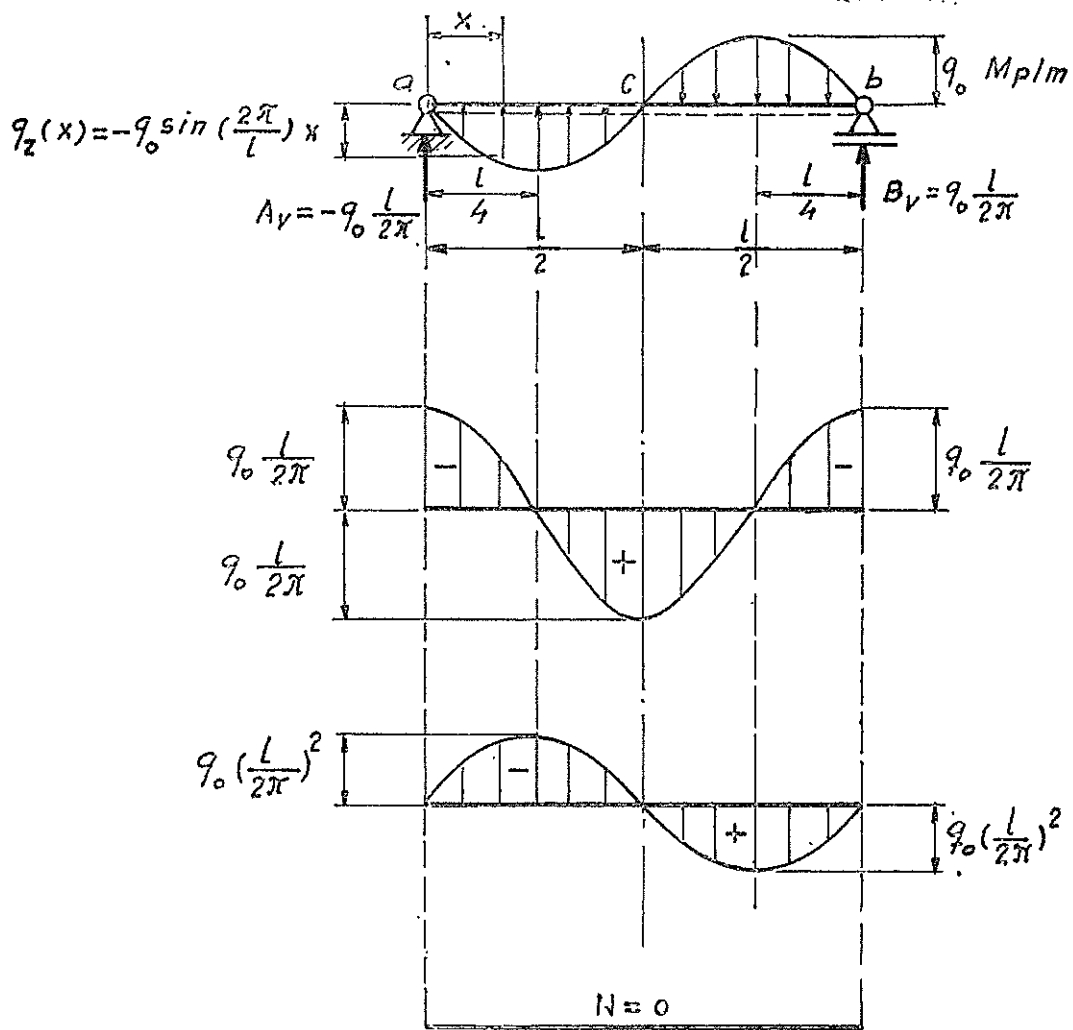
$$q_x(x) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x \quad (1)$$

يتم الحصول على معادلة القوة العرضية بكاملة المعادلة (1) :

$$Q(x) = -\frac{q_0 l}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{l}\right)x + C_1$$

ولا يمكن الآن تحديد الثابت C_1 الا بعد ايجاد معادلة عزم الانعطاف وذلك بكاملة ثانية ،
هكذا :

$$M(x) = \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x + C_1 x + C_2$$



شكل 2-59 b

من الشرط $M=0$ عند a حيث $x=0$ ينتج ان :

$$C_2 = -\frac{q_0 l^2}{\pi^2}$$

ومن الشرط $M=0$ عند c نتيجة للتناظر العكسي . فان :

$$C_1 = \frac{2 q_0 l}{\pi^2}$$

وعلى ذلك تكون معادلة القوة العرضية هي :

$$Q = - \frac{q_0 l}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{l} \right) x + \frac{2 q_0 l}{\pi^2} \quad (2)$$

كما ان معادلة عزم الانعطاف تصبح :

$$M = \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos \left(\frac{\pi}{l} \right) x + 2 \frac{q_0 l}{\pi^2} x - \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \quad (3)$$

يمكن رسم منحنى القوة العرضية ومنحنى عزم الانعطاف باستخدام قانون التفاضل (قانون جمع الآثار) . ففي منحنى القوة العرضية يرسم الخط المستقيم الذى يبعد عن خط القاعدة (خط النسب) ab بمسافة تساوي $2 q_0 l / \pi^2$ وهذا يعطي الحد الثاني للمعادلة . بعد ذلك يتخذ هذا الخط قاعدة لرسم منحنى جيبى سالب الإشارة هو المنحنى $-\frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos \left(\frac{\pi}{l} \right) x$ ليعطي الحد الاول للمعادلة .

وبالمثل فان منحنى عزم الانعطاف ينتج من جمع ثلاث دالات وهي :

١ - الحد الثالث للمعادلة . وهو ثابت - ويتحدد بالخط المستقيم $-\frac{q_0 l^2}{\pi^2}$.

٢ - الخط المستقيم $2 \frac{q_0 l}{\pi^2} x$ الذى يمثل الحد الثاني للمعادلة . ترتيب معادلة الخط المستقيم عند b يساوي $\frac{2q_0 l^2}{\pi^2} +$ وعند a يساوي صفراً .

٣ - منحنى جيب تمام $\frac{q_0 l^2}{\pi^2} \cos \left(\frac{\pi}{l} \right) x$ وهو يمثل الحد الاول للمعادلة .
مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-60) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 29 :

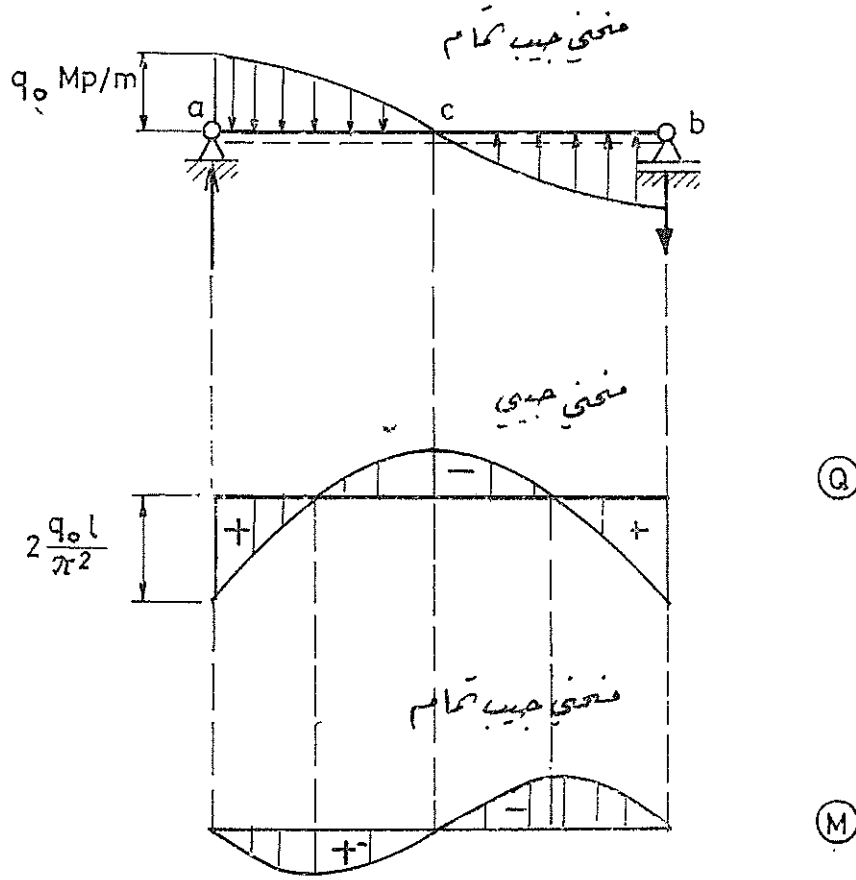
حمل جائز بسيط بحمولة موزعة على شكل منحنى جيب تمام - طول موجة كاملة (شكل 2-61).

المعطى : طول الجائز l والشدة الاعظمية للحمولة q_0 .

المطلوب : ايجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحل :

معادلة التحميل (شدة الحموله عند اي قطع يبعد x متراً عن a) هي :



شكل 2.60

$$q_x(x) = q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)x$$

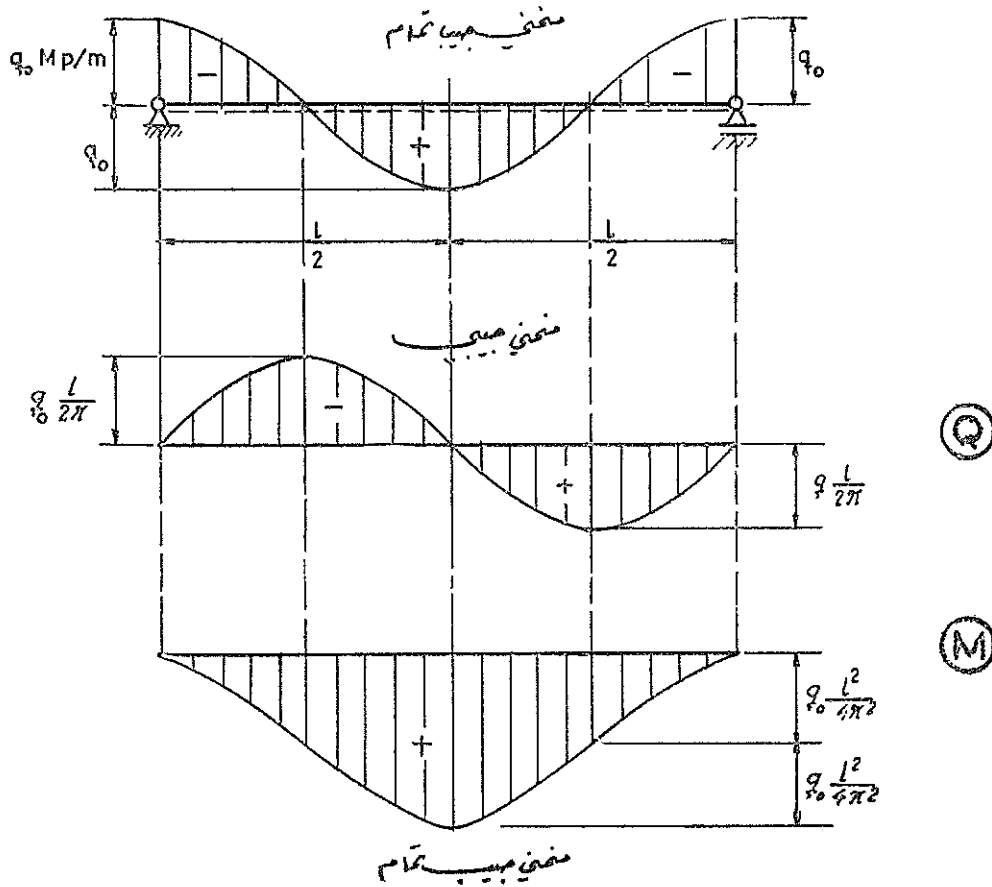
ومنها وبمعرفة ان القوة العرضية عند النقطة a تساوي صفراً ، تصبح معادلة القوة العرضية :

$$Q = -\frac{q_0 l}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{l}\right)x \quad (2)$$

وباجراء مكاملة للمعادلة (1) وبمعرفة ان عزم الانعطاف عند النقطة a يساوي صفراً ، ننتج معادلة عزم الانعطاف :

$$M = \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{l}\right)x - \frac{q_0 l^2}{4\pi^2} \quad (3)$$

من السهل تتبع منحنيات القوة العرضية وعزم الانعطاف الممثلة في الشكل (2-61) .



شكل 2-61

مثال 30 :

حمل جانز بسيط بحمولة موزعة على شكل قطع مكافئ من الدرجة الثانية (شكل 2-62) .

المعطى : طول الجانز l والشدة العظمى للحمولة q_0 .

المطلوب : إيجاد قيم القطع .

الحل :

معادلة منحنى الحمولة (شدة الحمولة عند أي قطع يبعد x عن المسند الثابت) العامة هي :

$$q_x(x) = a + bx + cx^2$$

شروط اطراف التحميل :

$$q_z (x = 0) = 0 ; q_z (x = l/2) = q_0 ; q_z (x = l) = 0$$

بتحقيق المعادلة لشروط اطراف التحميل يتم الحصول على الثوابت :

$$a = 0 , \quad b = + \frac{4 q_0}{l} , \quad c = - \frac{4 q_0}{l^2}$$

وبذلك تصبح معادلة الجُمولة كالتالية :

$$q_z (x) = q_0 \frac{4x}{l^2} (l-x) \quad (1)$$

وبالمكاملة وباعتبار ان القوة العرضية عند منتصف الجائز (النقطة c) ، ولاسباب التناظر ، تساوي صفراً ، فان معادلة منحنى القوة العرضية تصبح :

$$Q = - q_0 \frac{2x^2}{3l^2} (3l-2x) + q_0 \frac{l}{3} \quad (2)$$

وباجراء مكاملة ثانية وباعتبار ان M عند النقطة a (حيث x=0) تساوي صفراً يتم الحصول على معادلة منحنى عزم الانعطاف :

$$M = - q_0 \frac{x^3}{3l^2} (2l-x) + q_0 \left(\frac{l x}{3} \right) \quad (3)$$

من دراسة معادلة القوة العرضية (2) يتضح ما يلي :

١ - قيمة القوة العرضية عند a (يتم الحصول عليها بتعويض x تساوي صفراً) هي :

$$Q = + \frac{q_0 l}{3}$$

وعند b (بتعويض x تساوي l) هي :

$$Q = - \frac{q_0 l}{3}$$

وبذلك تتحدد ثلاثة نقاط من منحنى Q .

٢ - من المعلوم ان منحنى Q هو قطع مكافئ من الدرجة الثالثة وان ميل المماس عليه عند c يساوي شدة الجُمولة هناك وهي تساوي $q_z (x=l/2)$ ميغا بوند على المتر .

اما المعادلة (3) التي تعطي منحنى عزم الانعطاف فيتضح منها ما يلي :

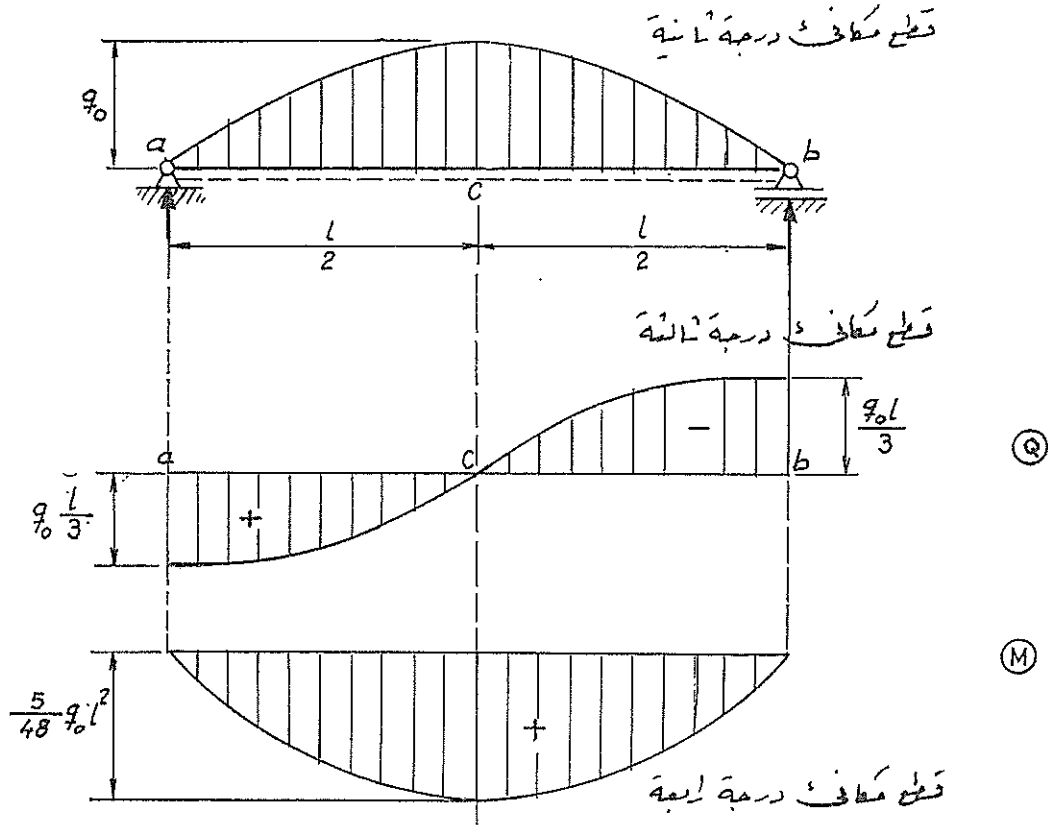
١ - ان القيمة العظمى لعزم الانعطاف تقع في منتصف الجانز وهي :

$$\max M = \frac{5}{48} q_0 l^2$$

٢ - ان المنحنى هو قطع مكافئ من الدرجة الرابعة وان ميل الماس عليه عند الطرف a يساوي القوة العرضية هناك ، أي $q_0 l/3$.

مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-62) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-62

مثال 31 :

يتعرض الجانز البسيط (شكل 2-63) لتأثير عزوم موزعة بانتظام تؤثر بين النقطتين a , b وشدها m ميغا بوند متر على المتر (Mpm/m) .

المعطى : طول الجائز l وشدة الحمولة m .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع ومعادلاتها .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود افعال المساند :

$$\sum M_A = 0 : B_v \cdot l - m \cdot l = 0 \quad ; \quad B_v = m \cdot l$$

$$\sum V = 0 : B_v - A_v = 0 \quad ; \quad A_v = m \cdot l$$

٢ - قيم القطع :

من الواضح ان قيمه القوة العرضية عند اي قطع في الجائز تساوي رد الفعل وبإشارة سالبة (يؤكد ذلك تطبيق شرط توازن القوى الشاقولية على الجزء المقطوع الايسر او اليمين) أي أن :

$$\sum V = 0 : Q + A_v = 0 \quad ; \quad Q = -m \cdot l$$

وذلك لان العزوم الموزعة على الجائز لا تغير قيمة القوة العرضية بين قطاع وآخر . لايجاد مخطط عزم الانعطاف نتخيل القطع $s-s$ الذي يبعد x عن المسند الثابت a ثم نطبق شروط توازن العزوم على الجزء المقطوع الايسر وحول نقطة القطع :

$$\sum M_x = 0 : M = m \cdot x - A_v \cdot x = 0$$

تمثل القيمة $A_v \cdot x$ العزم الناتج عن رد فعل المسند A_v أما القيمة $m \cdot x$ فتمثل العزم الناتج عن العزوم الموزعة بين a و s .

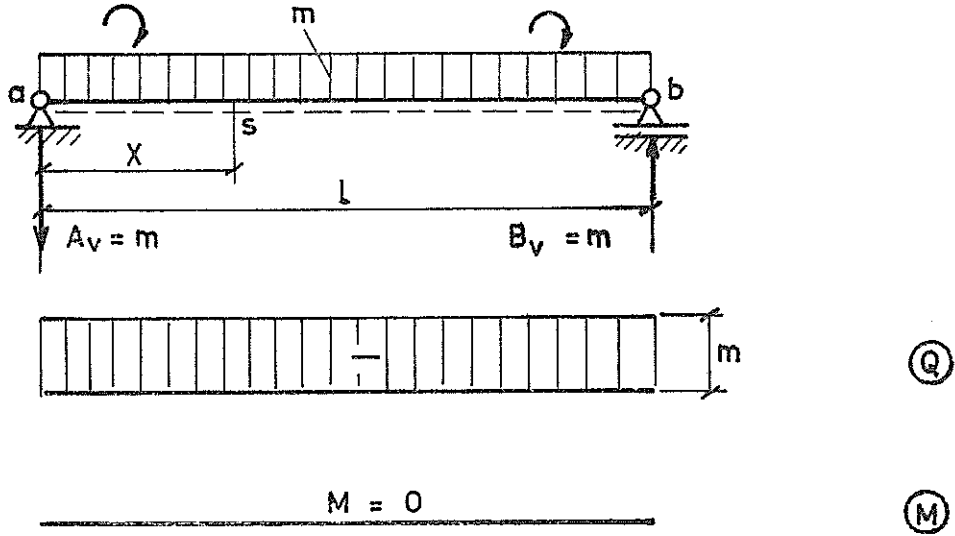
تشير معادلة العزم الى ان عزم الانعطاف ينعدم في جميع قطوع الجائز ab .

٣ - مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-63) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 32 :

تعرض جائز بسيط لتأثير عزم خطي التوزيع (مثلثي ، أي متغير من الدرجة الاولى) (شكل 2-64) .



شكل 2-63

المعطى : طول الجائز l والشدة العظمى للحمولة الموزعة m_0 (عزوم موزعة خطياً) أما تغير شدة الحمولة فيبتدأ من الصفر عند a الى أن يصل عند النقطة b الى قيمته العظمى m_0 .
المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع .
الحل :

١ - ردود أفعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$\sum H = 0 : A_H = 0$$

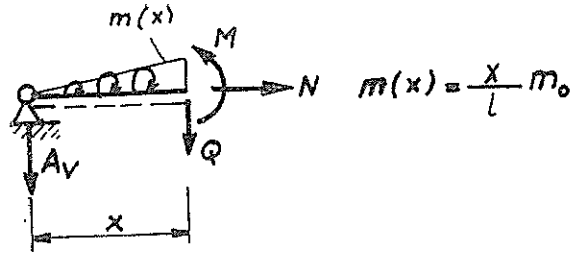
$$\sum M_a = 0 : B_v \cdot l - \frac{1}{2} m_0 l = 0 \quad ; \quad B_v = \frac{1}{2} m_0 l$$

$$\sum V = 0 : B_v - A_v = 0 \quad ; \quad A_v = \frac{1}{2} m_0 l$$

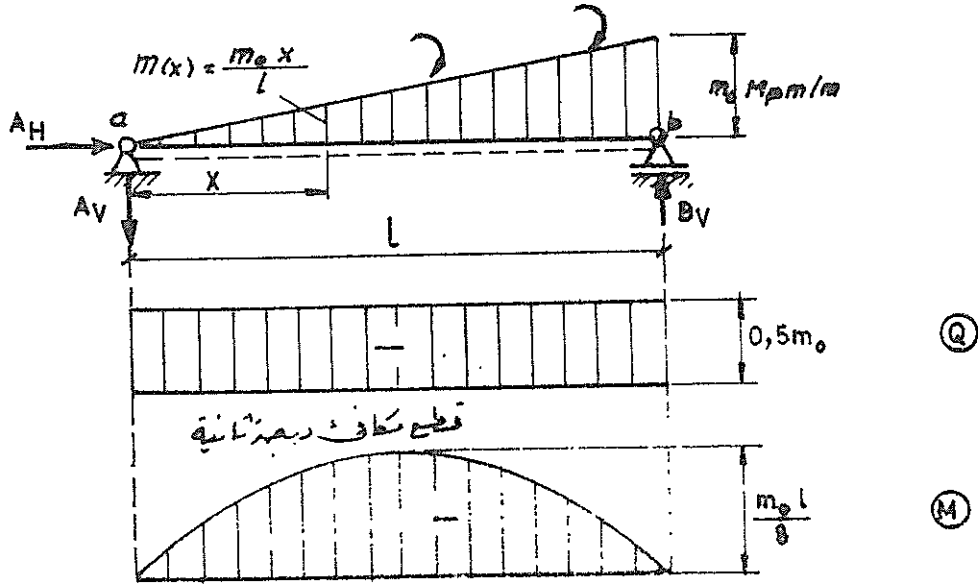
٢ - قيم القطع :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الایسر المقطوع (شكل 2-64 a) ينتج :

$$\sum H = 0 : N = 0$$



شكل 2-64 a



شكل 2-64

$$\Sigma V = 0 : Q + A_v = 0 ; Q = -\frac{1}{2} m_0 \cdot l$$

$$\Sigma M_x = 0 : M - \frac{1}{2} m(x) \cdot x + A_v \cdot x = 0 ; M = -\frac{m_0}{2} x + \frac{m_0}{l} x^2$$

من المعادلات الأخيرة يتم التوصل الى أن القوة العرضية على طول الجائز ثابتة وأن شكل العزم يتبع منحنى قطع مكافئ درجة ثانية .

٣ - مخططات قيم القطع .

لقد تم في الشكل (2.64) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 33 :

يتعرض الجائز البسيط لتأثير حمولة تتألف من عزوم موزعة خطياً كما يشير الشكل (2-66) .

المعطى : طول الجائز l والشدة العظمى للحمولة الموزعة m_0 مقاسة بالميجا بوند متر على المتر
 . (Mpm/m)

المطاب : إيجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجمله ككل يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

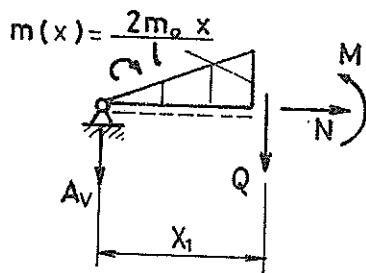
$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot l - 2 \cdot \frac{1}{2} m_0 \cdot \frac{l}{2} = 0 ; B_v = \frac{m_0}{2} Mp$$

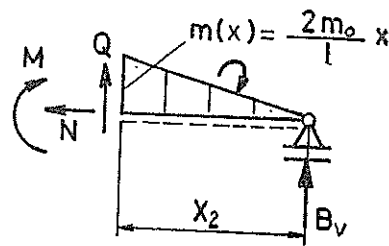
$$\Sigma V = 0 : B_v - A_v = 0 ; A_v = \frac{m_0}{2} Mp$$

٢ - قيم القطع :

يتألف الجائز من مجالين ، وبسبب التناظر كان يكفي إيجاد قيم القطع في مجال واحد .
 ثم تطبيق خواص التناظر عليها ، لولا أن طلاب هذه المرحلة لا تدرسها ولذلك سوف يصار
 لحساب المجالين .



شكل 2-65a



شكل 2-65b

المجال I $(0 \leq x_1 \leq l/2)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-65a) يتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q + A_v = 0 ; Q = - \frac{m_0}{2} M_p$$

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : M - \frac{1}{2} m(x) \cdot x_1 + A_v \cdot x_1 = 0$$

$$M = - \frac{m_0}{2} x_1 + \frac{m_0}{l} x_1^2$$

تمثل هذه المعادلة قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

المجال II ($0 \leq x_2 \leq l/2$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع اليمين (شكل b 2-65) يتبع :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = - B_v ; Q = - \frac{m_0}{2} M_p$$

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M - B_v \cdot x_2 + \frac{1}{2} m(x) \cdot x_2 = 0$$

$$M = \frac{m_0}{2} x_2 - \frac{m_0}{l} x_2^2$$

تمثل هذه المعادلة معادلة قطع مكافئ من الدرجة الثانية .

٣ - مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-66) تمثيل مخططات قيم القطع .

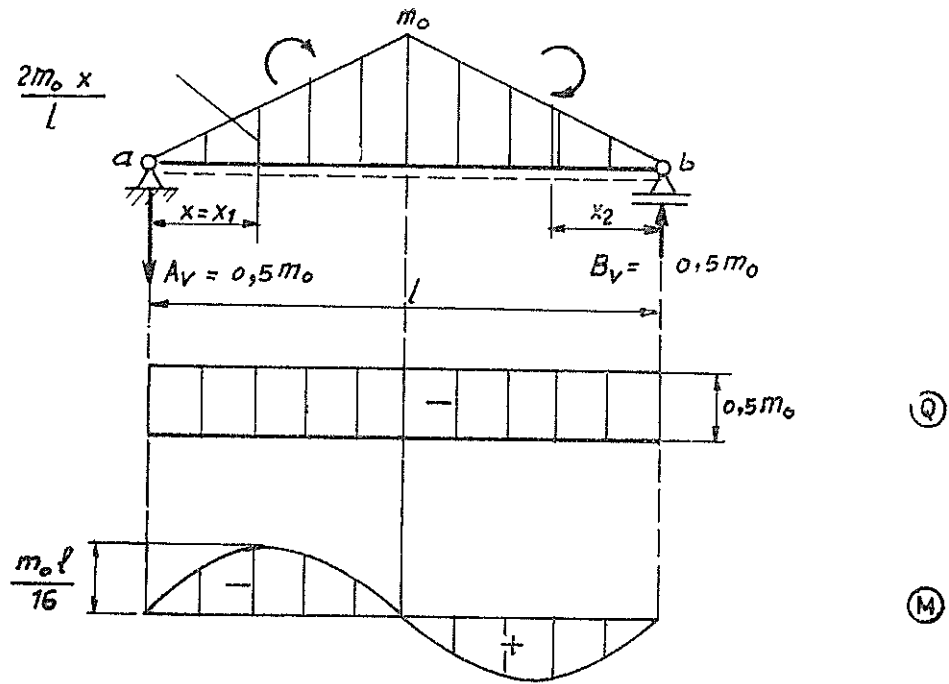
مثال 34 :

تعرض الجائز البسيط لتأثير ثلاثة قوى وحيدة هي $P_1=4,0 \text{ Mp}$ و $P_2=3,0 \text{ Mp}$ و $P_3=2,0 \text{ Mp}$ (كما في الشكل 2-67) .

المطلوب : رسم مخططات القوة الناعمية والقوى العرضية وعزم الانعطاف .

الحل :

بسبب كون الجائز القضبي مستقيم وبسبب تأثير قوى شاقولية فقط لذلك تنعدم القوة الناعمية على طول الجائز ($N=0$) .



شکل 2-66

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز ككل يتبع :

$$\sum M_b = 0 : A_v = \frac{1}{6} (P_1 \cdot 4,0 + P_2 \cdot 3,0 + P_3 \cdot 1,0) = 4,5 \text{ Mp}$$

$$\sum M_a = 0 : B_v = \frac{1}{6} (P_1 \cdot 3,0 + P_2 \cdot 3,0 + P_3 \cdot 5,0) = 4,5 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع :

تحسب القوى العرضية في القطوع التالية :

$$Q_0 = A_v = 4,5 \text{ Mp}$$

$$Q_1 = 4,5 - P_1 = 4,5 - 4,0 = + 0,5 \text{ Mp}$$

$$Q_2 = 0,5 - P_2 = 0,5 - 3,0 = - 2,5 \text{ Mp}$$

$$Q_3 = - 2,5 - P_3 = - 2,5 - 2,0 = - 4,5 \text{ Mp}$$

كما تحسب العزوم في كل من النقاط 1 و 2 و 3 والتي تبلغ :

$$M_1 = A_v \cdot 2,0 = 4,5 \cdot 2,0 = 9,0 \text{ Mpm}$$

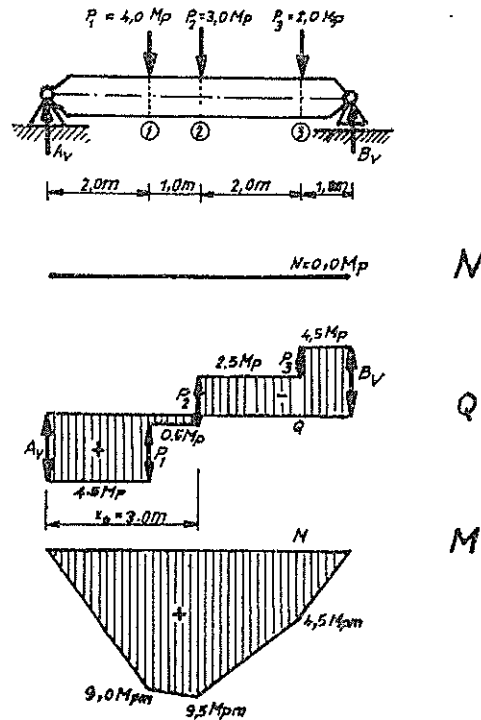
$$M_2 = A_v \cdot 3,0 - P_1 \cdot 1,0 = 4,5 \cdot 3,0 - 4,0 \cdot 1,0 = 9,5 \text{ Mpm}$$

$$M_3 = B_v \cdot 1,0 = 4,5 \cdot 1,0 = 4,5 \text{ Mpm}$$

تتوزع القوى العرضية في كل المجالات توزيعاً ثابتاً مما يؤدي لان يكون توزيع العزوم في تلك المجالات خطياً .

تغير القوة العرضية إتجاهها في النقطة $x_0 = 3,0\text{m}$ وبذلك يأخذ عزم الانعطاف في تلك النقطة قيمة حدية :

$$\max M = 9,5 \text{ Mpm}$$



شكل 2-67

لقد تم في الشكل (2-67) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 35 :

يتعرض الجائز البسيط (شكل 2-68) لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها $q_0 = 3 \text{ Mp/m}$ تؤثر على رقعة من الجائز .

المطلوب : رسم مخططات قيم المقطع .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

لأسباب التناظر فإن ردود أفعال المساند تبلغ :

$$A_v = B_v = \frac{R}{2} = 6,0 \text{ Mp}$$

٢ - قيم المقطع :

لكون الجائز القضبي مستقيم ولكون الحملات المؤثرة شاقولية ، لذلك تنعدم القوة الناعظمية على طول الجائز .

تبلغ القوى العرضية في الأجزاء الطرفية من الجائز الخالية من الحملات القيم التالية : $+6,0 \text{ Mp}$ و $-6,0 \text{ Mp}$ ، وفي الأجزاء المحملة تتوزع القوة العرضية تبعاً للحمولة بشكل خطي ابتداء من $+6,0 \text{ Mp}$ إلى $-6,0 \text{ Mp}$

ويبلغ عزم الانعطاف في النقاط 1 و 2 القيم التالية :

$$M_1 = A.2,0 = 6,0.2,0 = 12,0 \text{ Mpm}$$

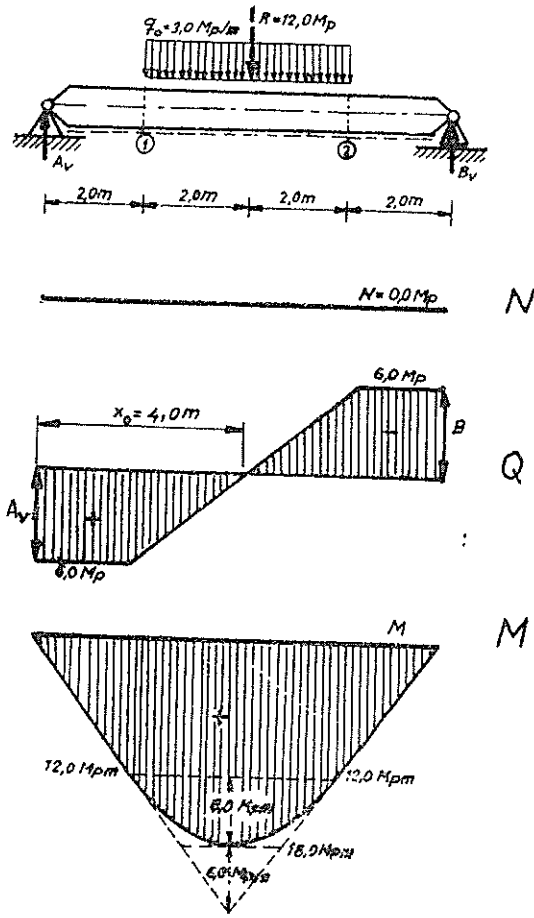
$$M_2 = B.2,0 = 6,0.2,0 = 12,0 \text{ Mpm}$$

يتوزع عزم الانعطاف في المجالات الطرفية خطياً ويتوزع تحت الحملات الموزعة بانتظام على شكل مقطع مكافئ من الدرجة الثانية .

تغير القوة العرضية إشارتها في النقطة $x_0 = 4,0 \text{ m}$ أما عزم الانعطاف فيأخذ هناك قيمة حدية هي :

$$\max M = 12,0 + \frac{q_0 \cdot 4,0^2}{8} = 12,0 + 6,0 = 18,0 \text{ Mpm}$$

لقد تم في الشكل (2-68) تمثيل قيم المقطع .



شكل 2-68

مثال 36 :

يتعرض الجائز البسيط (شكل 2-69) لتأثير قوتين وحيدتين ولتأثير حمولة منتظمة التوزيع تؤثر على رقعة من الجائز .
المطابوب : رسم مخططات قيم المقطع .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

تبلغ ردود افعال المساند ، التي يتم الحصول عليها بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ، القيم التالية :

$$A_v = \frac{1}{10,0} (R \cdot 8,0 + P_1 \cdot 6,0 + P_2 \cdot 4,0) = 10,6 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{10,0} (R \cdot 2,0 + P_1 \cdot 4,0 + P_2 \cdot 6,0) = 5,4 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع

تتوزع القوة العرضية تحت الحمولة الموزعة بانتظام بشكل خطي ابتداء من :

$$A = 10,6 \text{ Mp}$$

الى :

$$A - R = 10,6 - 8,0 = 2,6 \text{ Mp}$$

تأخذ القوى العرضية في المجال الخالي من التحميل والواقع بين النقاط 2,1 ، القيمة الثابتة التالية:

$$2,6 - P_1 = 2,6 - 5,0 = - 2,4 \text{ Mp}$$

ثم تقفز (تنزلق) في المجال غير المحمل الذي يليه الى القيمة :

$$- 2,4 - P_2 = - 2,4 - 3,0 = - 5,4 \text{ Mp}$$

اما العزم فتأخذ في النقاط 2,1 القيم التالية :

$$M_1 = A_v \cdot 4,0 - R \cdot 2,0 = 10,6 \cdot 4,0 - 8,0 \cdot 2,0 = 26,4 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = B_v \cdot 4,0 = 5,4 \cdot 4,0 = 21,6 \text{ Mpm}$$

وفي النقطة 3 فان العزم يبلغ القيمة التالية :

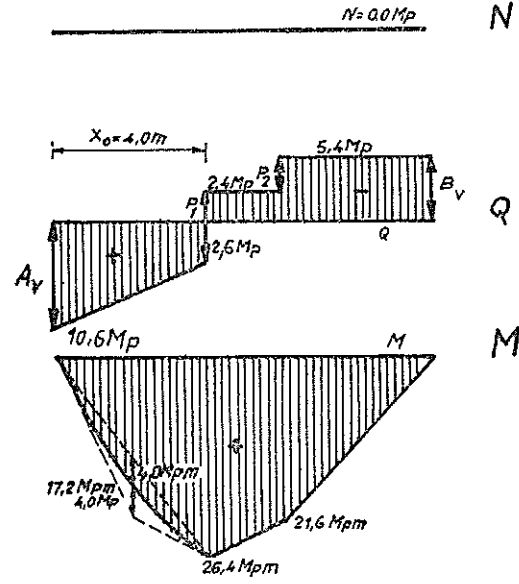
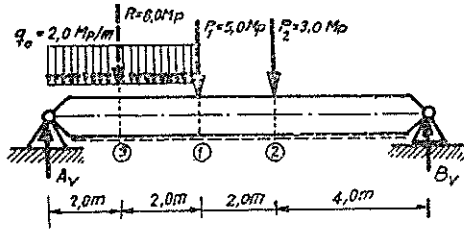
$$M_3 = \frac{26,4}{2} + \frac{q_0 \cdot 4,0^2}{8} = 13,2 + 4,0 = 17,2 \text{ Mpm}$$

يتألف خط العزم من قطع مكافئ تحت الحمولة الموزعة ومن اجزاء خطية بين القوى B, P_2, P_1 .

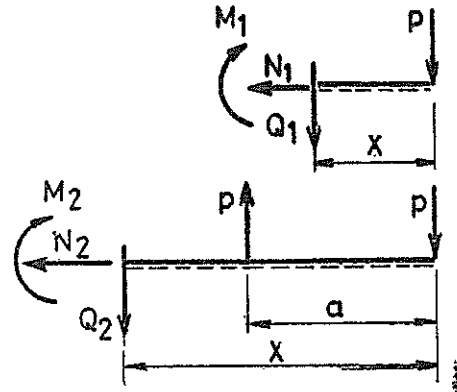
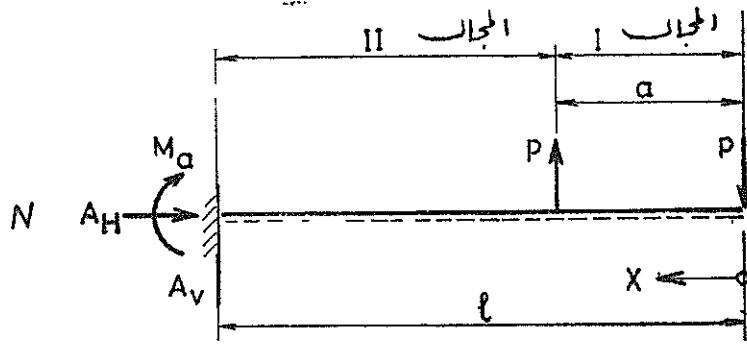
تغير القوة العرضية اشارتها في النقطة $x_0 = 4,0 \text{ m}$ وبذلك يأخذ عزم الانعطاف هناك القيمة الحدية :

$$\max M = 26,4 \text{ Mpm}$$

لقد تم في الشكل (269) رسم مخططات قيم القطع .



شكى 2 69



شكى 2 70

٢ - الجائز البارز (الظفر)

ان الجائز البارز هو جائز موثوق وثاقه تامة من طرف وحر من الطرف الاخر وهو يتصل باسط انواع الانشاءات على الاطلاق .

٢ - ٥ - ١ امثلة على الجائز البارز

مثال 37 :

حل الجائز البارز كما في الشكل (2.70) .

المطلوب : ايجاد قيم القطع .

الحل :

١ - حساب ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة كل يتم الحصول على النتائج التالية :

$$\Sigma H = 0 : A_{II} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + P - P = 0 ; A_v = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : M_a + P.l - P (l-a) = 0 ; M_a = Pa$$

٢ - حساب قيم القطع بطريقة القطع .

يتألف الجائز من مجالين .

المجال I : $(0 \leq x \leq a)$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء اليمين المقطوع (شكل 2.70b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N_1 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_1 = - P$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_1 = - P.x$$

التدقيق :

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{d}{dx} (-Px) = - P = Q_1$$

المجال II : $(a \leq x \leq l)$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء اليمين المقطوع (شكل 2.70c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N_2 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_2 = - Pa = \text{const.}$$

التدقيق :

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{d}{dx} (-Pa) = 0 = Q_2$$

٣ - حساب قيم القطع باستخدام العلاقات التفاضلية :

$$\frac{dQ}{dx} = - q(x) ; dQ = - q_z(x)dx$$

بالمكاملة ينتج :

$$Q = - \int q_z(x) dx$$

$$\frac{dQ}{dx} = Q \quad ; \quad dM = Q dx$$

بالمكاملة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$M = \int Q dx = - \int \left[\int q_z(x) dx \right] dx$$

المجال I ($0 \leq x \leq a$) :

$$q_{z1}(x) = 0$$

$$Q_1 = \int 0 dx = C_1$$

$$M_1 = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

شروط الاطراف الستاتيكية :

$$x = 0 : Q_1 = -P \quad ; \quad C_1 = -P$$

$$M_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

بمعويض قيم الثوابت في العلاقات يتم الحصول على قيم القطع :

$$Q = -P$$

$$M_1 = -Px$$

$$x = 0 : M_2 = 0$$

$$x = a : M_1 = -Pa$$

المجال II ($a \leq x \leq l$) :

$$q_{z2} = 0$$

$$Q_2 = \int 0 dx = C_3$$

$$M_2 = \int C_3 dx = C_3 x + C_4$$

شروط الاطراف :

$$x = a : Q_2 = 0 : C_3 = 0$$

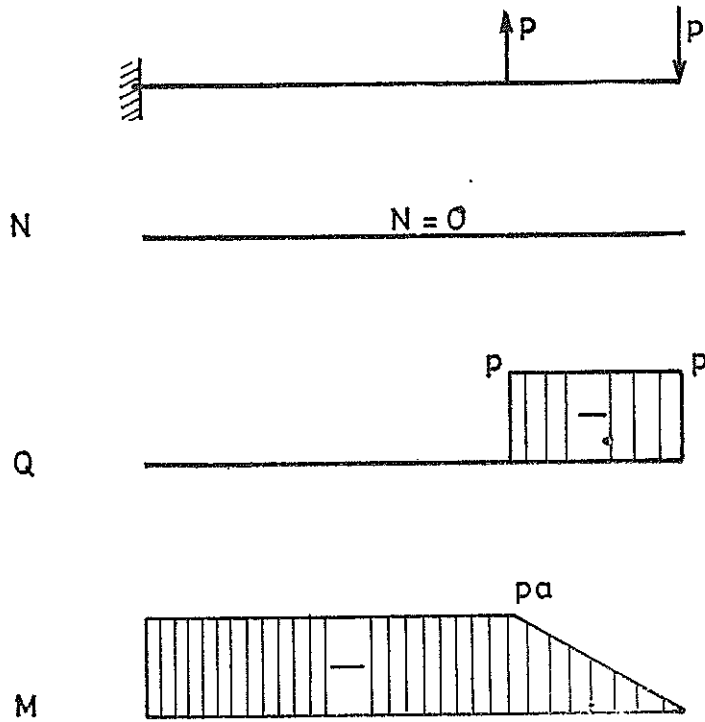
$$M_2 = M_1 ; C_4 = - Pa$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلات الاخيرة يتم الحصول على قيم القطع :

$$Q_2 = 0$$

$$M_2 = - Pa = \text{const} .$$

لقد تم في الشكل (2.70d) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2.70d

مثال 38 :

حمل الجائز البارز (الظفر) كما في الشكل (2.71) .

المعطى : مساحة المقطع العرضي للجائز F وطول الجائز l والوزن النوعي لمادة الجائز γ .
المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع وذلك عندما

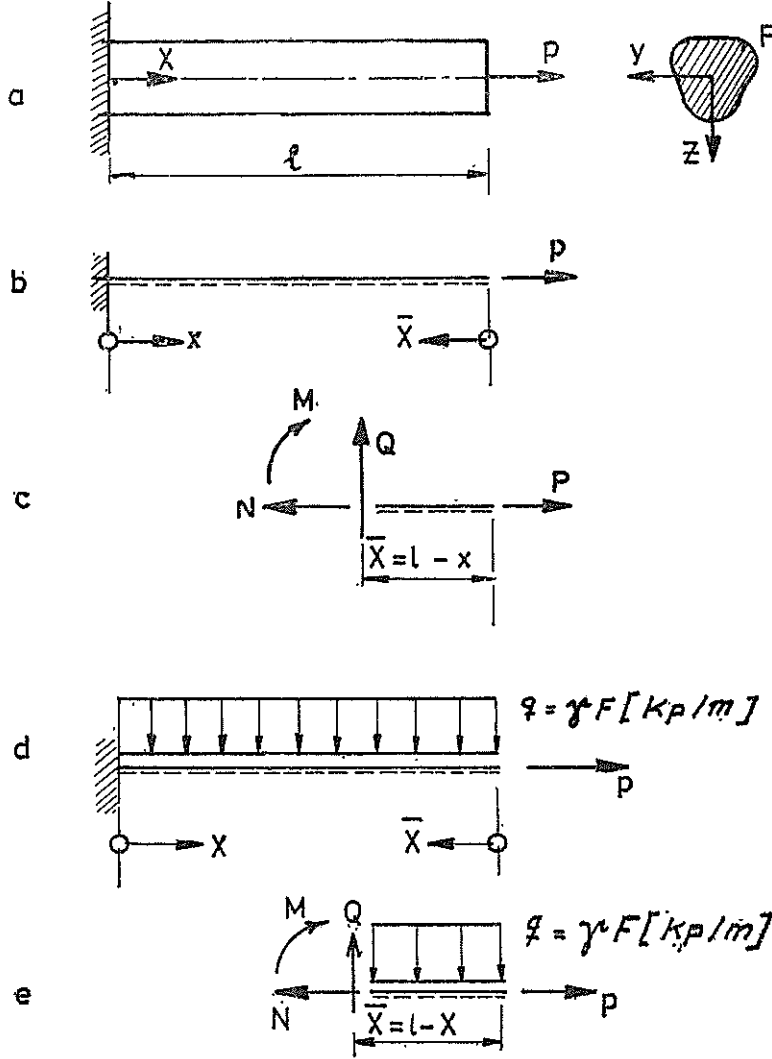
- ١ - يهمل الوزن الذاتي للجائز .
- ٢ - يؤخذ الوزن الذاتي للجائز بعين الاعتبار .

الحل :

٢ - إيجاد قيم القطع باستخدام طريقة القطع

٢ - ١ عندما يهمل الوزن الذاتي للجائز (شكل 2.71b) .

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطوع (شكل 2.71c) ينتج :



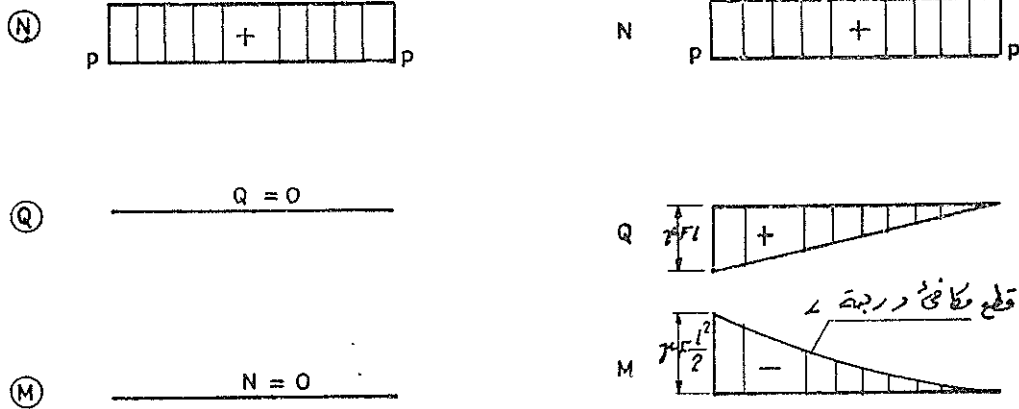
شكل 2-71

$$\Sigma H = 0 : N = + P$$

$$\Sigma V = 0 : Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = 0$$

لقد تم تمثيل مخططات قيم القطع في الشكل (2.72a) .



شكل 2.72

٢ - آ عندما يؤخذ الوزن الذاتي للجائز بعين الاعتبار (شكل 2.71 d) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء اليمين المقطوع (شكل 2.71e) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N = + P$$

$$\Sigma V = 0 : Q = q \cdot \bar{x} = \gamma \cdot F \cdot \bar{x} = \gamma F(l - x)$$

تمثل معادلة القوة العرضية خطأ مستقيماً يمر من مركز الاحداثيات \bar{x} :

$$\bar{x} = 0 : Q = 0$$

$$\bar{x} = l : Q = \gamma F l$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = -q \frac{\bar{x}^2}{2} = -\gamma F \frac{\bar{x}^2}{2} = -\gamma F \frac{(l-x)^2}{2}$$

تمثل معادلة عزيم الانعطاف قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية :

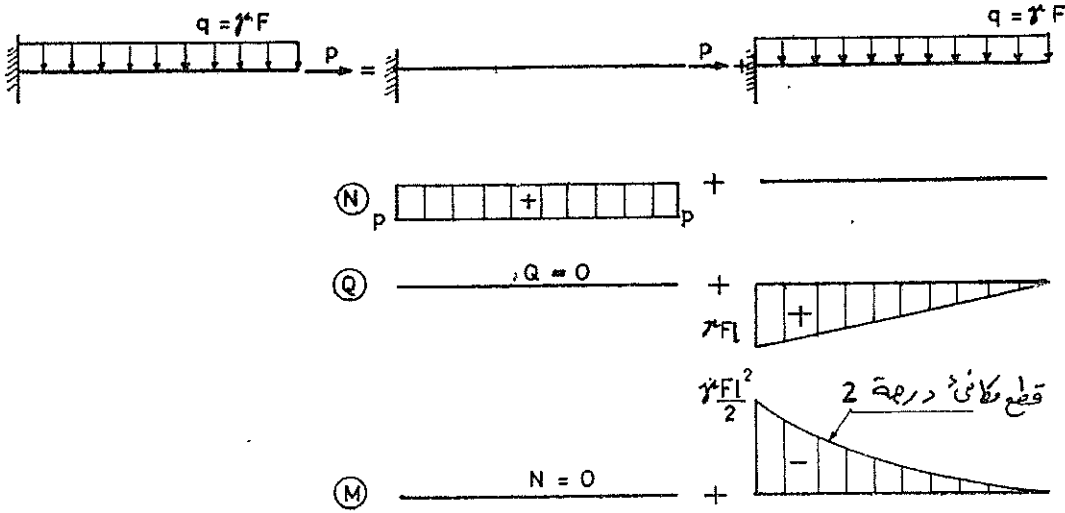
$$\bar{x} = 0 : M = 0$$

$$\bar{x} = l : M = - \gamma F l^2 / 2$$

لقد تم في الشكل 2.72b تمثيل مخططات قيم القطع .

ب - إيجاد قيم القطع باستخدام قانون التفاضل (قانون جمع الاثار) .

يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة باستخدام قانون التفاضل الذي سيتم في الفقرات التالية دراسته بشكل أكثر تفصيلاً (شكل 2-73) .



شكل 2.73

مثال 39 :

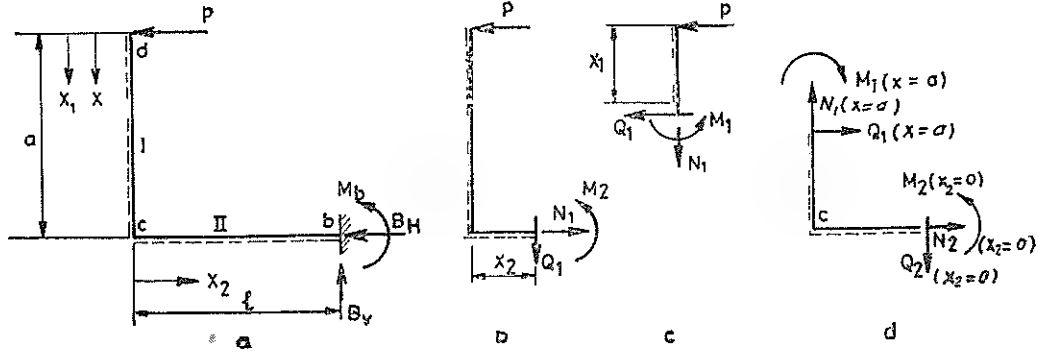
حمل الجائز البارز كما في الشكل (2.74a) .

المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع M, Q, N .

الحل :

١ - إيجاد ردود افعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة كـل يتم الحصول على ردود افعال المساند المطلوبة :



شكل 2.74

$$\Sigma H = 0 : B_H + P = 0 \quad , \quad B_H = -P$$

$$\Sigma V = 0 : B_v = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : M_b + P.a = 0 : M_b = -P.a$$

٢ - حساب قيم القطع

لقد كان ممكناً في هذه الحالة إيجاد قيم القطع دون معرفة مسبقة لردود أفعال المساند .
المجال I ($0 \leq x_1 \leq a$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع العلوي (شكل c 2.74) ينتج .

$$\Sigma H = 0 : Q_1 + P = 0 \quad , \quad Q_1 = -P$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_1 + P x_1 = 0 \quad ; \quad M_1 = -P x_1$$

$$x_1 = 0 : M_1 = 0$$

$$x_1 = a : M_1 = -P.a$$

المجال II ($0 \leq x_2 \leq l$) :

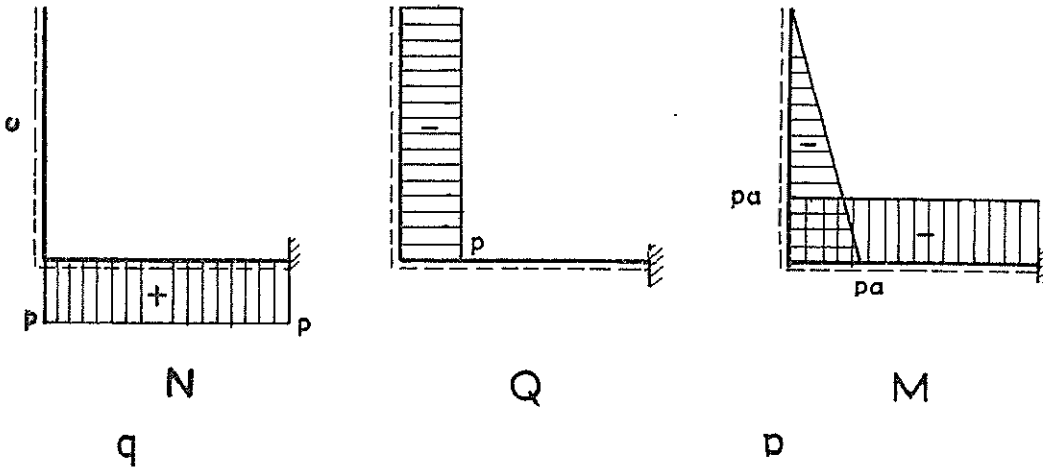
يعطي تطبيق شروط التوازن الجزء المقطوع الأيسر (شكل b 2.74) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_2 - P = 0 \quad , \quad N_2 = +P$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_2 + P.a = 0 \quad , \quad M_2 = -P.a$$

٣ - رسم مخططات قيم القطع :
لقد تم في الشكل (2.75) رسم مخططات قيم القطع .



شكل 2.75

التدقيق :

المجال I :

$$\frac{dM_1}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} (-P x_1) = -P = Q$$

المجال II :

$$\frac{dM_2}{dx_2} = \frac{d}{dx_2} (-Pa) = 0$$

العقدة c (شكل 2.74d) :

$$\Sigma H = 0 : N_2 + Q_1 = 0 ; N_2 = -Q_1$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 - Q_2 = 0 ; N_1 = Q_2$$

$$\Sigma M_c = 0 : M_1 (x_1 = a) - M_2 (x_2 = 0) = 0 ; M_1 (x_1 = a) = M_2 (x_2 = 0)$$

٢ - ٦ الجوائز البسيط ممتد الاطراف

هذا النوع من الجيزان هو جائز بسيط لا تكون فيه المساند المفصاية في طرف الجائز وإنما

يبدأ أحد المسندين أو كلاهما عن طرف الجائز نحو الداخل بحيث يبدو الجائز ممتداً إلى ما بعد المسندين .

ولا يمثل هذا النوع من الجيزان أية صعوبات خاصة في الحل وإنما يمكن تحديد ردود أفعال المساند وردود أفعال القلع (قيم القلع) فيه بالطرق السابقة .

مثال 40 :

يتعرض الجائز عند الاطراف لتأثير عزمين وحيدين (شكل 2.76) .
المطلوب :

١ - حساب ردود أفعال المساند .

٢ - حساب قيم القلع ورسم الخططات .

الحل :

١ - حساب ردود أفعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\sum H = 0 : A_H = 0$$

$$\sum M_A = 0 : B_V \cdot 2,0 + M_1 - M_1 = 0 \quad ; \quad B_V = 0$$

$$\sum V = 0 ; A_V = 0$$

التدقيق :

$$\sum H = 0 : A_V \cdot 2 + M_1 - M_1 = 0$$

٢ - حساب قيم القلع (M,Q,N) :

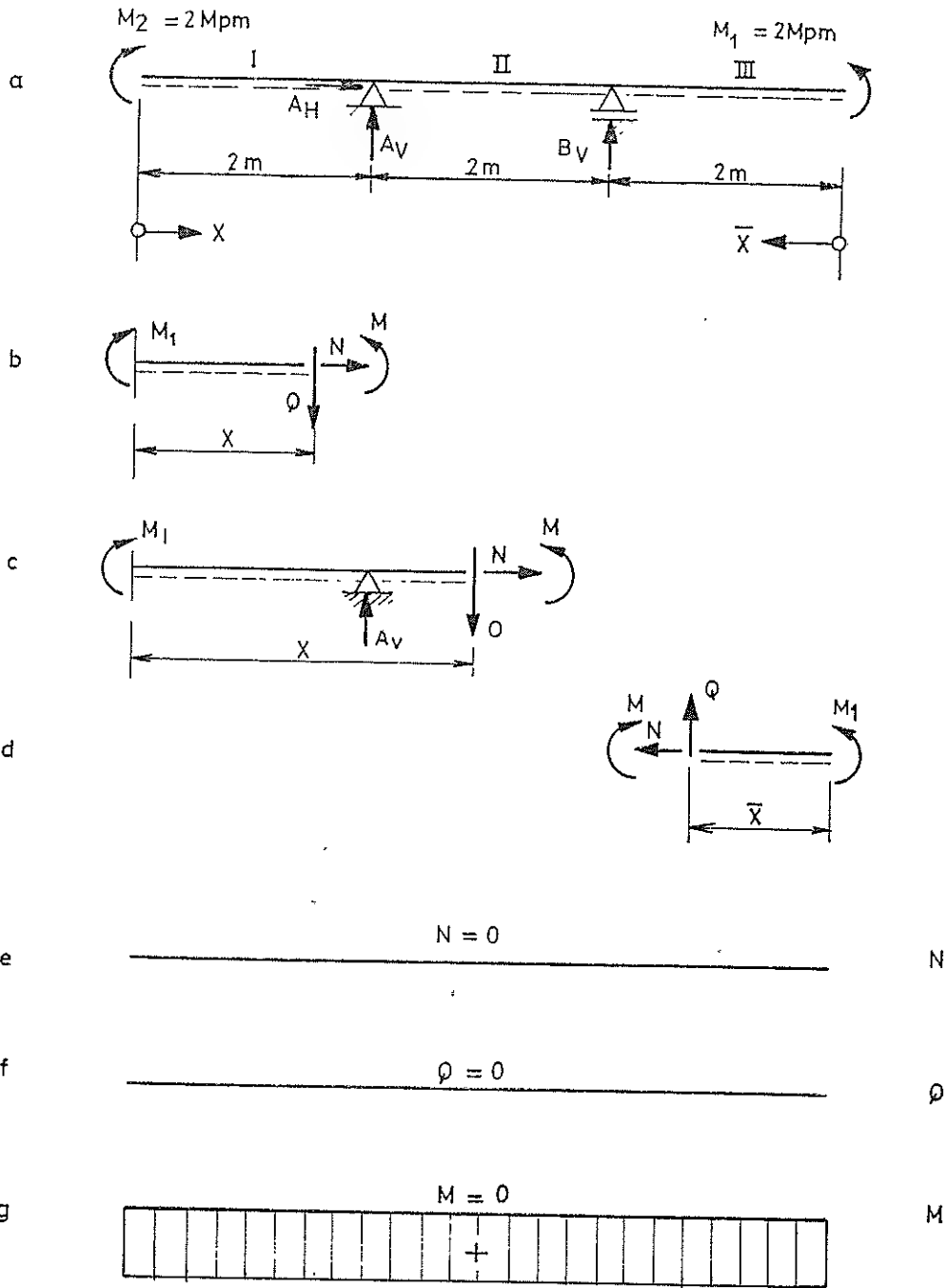
المجال I (0 ≤ x ≤ 2,0) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.67b) ينتج :

$$\sum H = 0 : N = 0$$

$$\sum V = 0 : Q = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M = M_1$$



شكل 2.76

المجال II $(0 \leq x \leq 4)$:

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2.76c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 ; N = 0$$

$$\Sigma V = 0 ; Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 ; M = M_1$$

المجال III ($x \leq \bar{x} \leq 2,0$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع اليمين (شكل 2.76d) ينتج :

$$\Sigma H = 0 ; N = 0$$

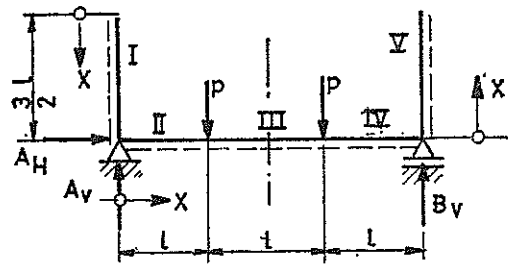
$$\Sigma V = 0 ; Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 ; M = M_1$$

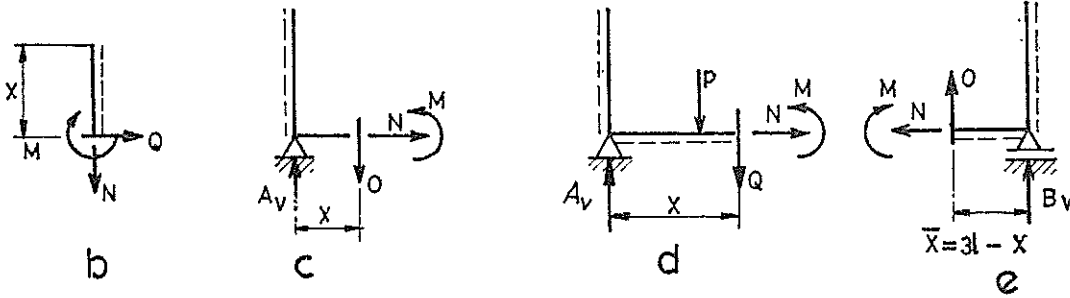
لقد تم في الشكل (2.76) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 41 :

يتعرض الجانر ممتد الاطراف لجمولة كما يشير الشكل (2.77) .



a



شكل 2.77

المطلوب : حساب ورسم قيم القطع ،
الحل :

١ - حساب ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot 3l - P \cdot 2l - P \cdot l = 0 ; B_v = P$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - 2P = 0 ; A_v = P$$

التدقيق :

$$\Sigma M_c = 0 : A_v \cdot \frac{3l}{2} - B_v \cdot \frac{3l}{2} + P \cdot \frac{l}{2} - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

٢ - حساب قيم القطع

يتألف الجائز من خمس مجالات .

المجال I والمجال V (هي مجالات غير محملة) :

بتطبيق شروط التوازن (شكل 2-77 b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = 0$$

المجال II ($0 \leq x \leq l$) :

بتطبيق شروط التوازن (شكل 2-77 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = + P$$

$$\Sigma M_x = 0 : M = A_v \cdot x ; M = P \cdot x$$

$$x = 0 : M = 0$$

$$x = l : M = Pl$$

المجال III ($l \leq x \leq 2l$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن (شكل d 2-77) العلاقات التالية :

$$\sum H = 0 : N = 0$$

$$\sum V = 0 : Q = A_v - P ; Q = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M = A_x \cdot x - P (x - l) = 0 ; M = Pl$$

المجال IV ($2l \leq x \leq 3l$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الأيمن (شكل e 2-77) يتج :

$$\sum H = 0 : N = 0$$

$$\sum V = 0 : Q = -B_v ; Q = -P$$

$$\sum M_x = 0 : M - B_v \cdot \bar{x} = 0 ; M = P (3l - x)$$

$$x = 2l : M = Pl$$

$$x = 3l : M = 0$$

لقد تم في الشكل (2-78) تمثيل قيم القطع .

مثال 42 :

يتعرض الجائز الممتد لمحولة وخيدة كما في الشكل (2-79) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

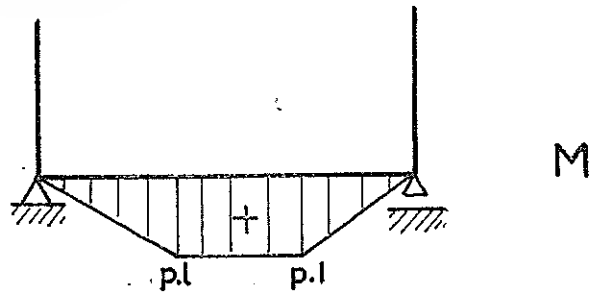
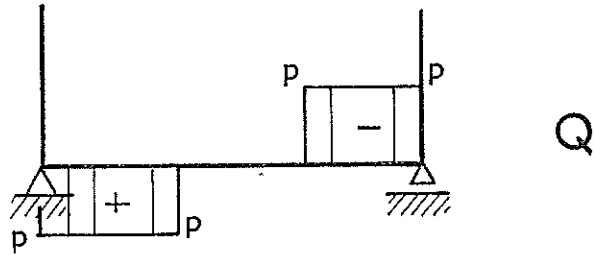
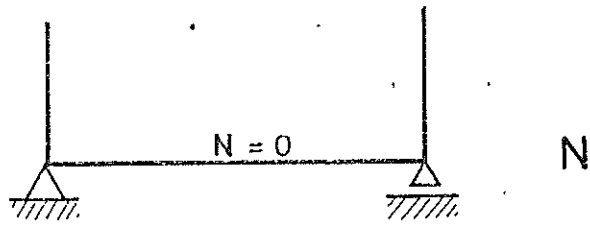
الحل :

تحلل القوة المائلة P الى مركبتين ، مركبة أفقية $P_H = P \cos 45^\circ = \frac{P}{\sqrt{2}}$ ومركبة شاقولية

$P_v = P \sin 45^\circ = \frac{P}{\sqrt{2}}$ ثم يستعاض عنها بتلك المركبات .

١ - ردود افعال الساند :

يعطي تطبيق شروط التوازن العلاقات التالية :



شكل 2-78

$$\Sigma H = 0 : B_H - P \cos 45^\circ ; B_H = \frac{P}{\sqrt{2}} = 0,705 P$$

$$\Sigma M_b = 0 : A_v \cdot 2l + P_H \cdot l \sin 45^\circ + P_v \cdot (l + l \cos 45^\circ) = 0$$

$$A_v \cdot 2l + P \frac{P}{\sqrt{2}} \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{P}{\sqrt{2}} \left(l + \frac{l}{\sqrt{2}} \right) = 0 ; A_v = -0,853 P$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P = 0 ; B_v = 1,560 P$$

التدقيق :

$$\Sigma M_o = 0 : A_v \left(3l + \frac{l}{\sqrt{2}} \right) + B_v \left(l + \frac{l}{\sqrt{2}} \right) + B_H \frac{l}{\sqrt{2}} = 0$$

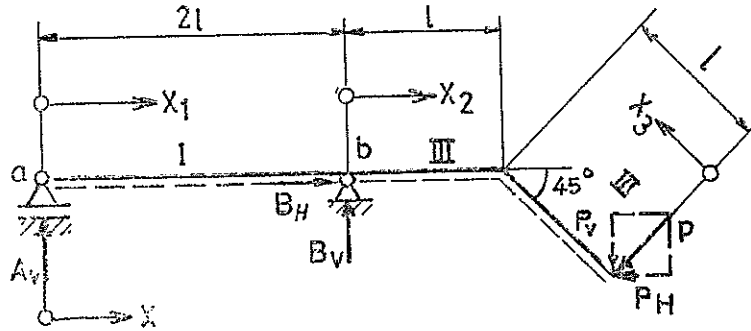
$$Pl(-4,472 + 3,766 \cdot 0,707) = 0$$

$$-4,472 + 4,473 \approx 0$$

ان هذا الفارق الطفيف ناتج عن تبديل الجذر بقيمته العددية وعن العمليات الحسابية .

٢ - حساب قيم القطع .

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات .



شكل 2-79

المجال I $(0 \leq x \leq 2l)$:

بتطبيق شروط التوازن (شكل 2-80a) ينتج :

$$\sum H = 0 : N_1 = 0$$

$$\sum V = 0 : Q_1 = A_v = -0,853 P$$

$$\sum M_{x_1} = 0 : M_1 = A_v \cdot x_1 = -0,853 P \cdot x_1$$

$$x_1 = 0 : M_1 = 0$$

$$x_1 = 2l : M_1 = -1,706 Pl$$

لتدقيق النتيجة يشتق تابع العزم الذي يعطي تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

المجال II $(0 \leq x \leq l)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع (شكل 2-80 b) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_2 + B_H = 0 ; N_2 = -0,707 P$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = A_v + B_v ; Q_2 = +0,707 P$$

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M_2 = A_v (2l + x_2) + B_v x_2 ;$$

$$M_2 = -0,853 P (2l + x_2) + 1,56 P x_2$$

$$M_2 = -1,706 P l + 0,707 P x_2$$

$$x_2 = 0 ; M_2 = -1,707 P l$$

$$x_2 = l : M_2 = -1,000 P l$$

لتدقيق النتيجة يشتق تابع العزم الذي يعطى تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

المجال III ($0 \leq x_3 \leq l$) .

يعطى تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع اليمين (شكل c 2-80) العلاقات التالية :

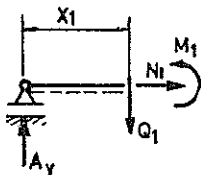
$$\Sigma P_{x_v} = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma P_{z_v} = 0 : Q_3 = + P$$

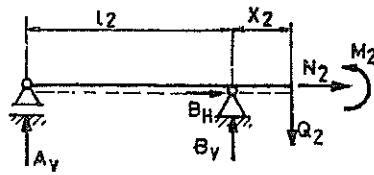
$$\Sigma M_{x_3} = 0 : M_3 = - P x_3$$

$$x_3 = 0 : M_3 = 0$$

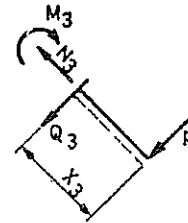
$$x_3 = l : M_3 = - P l$$



a



b



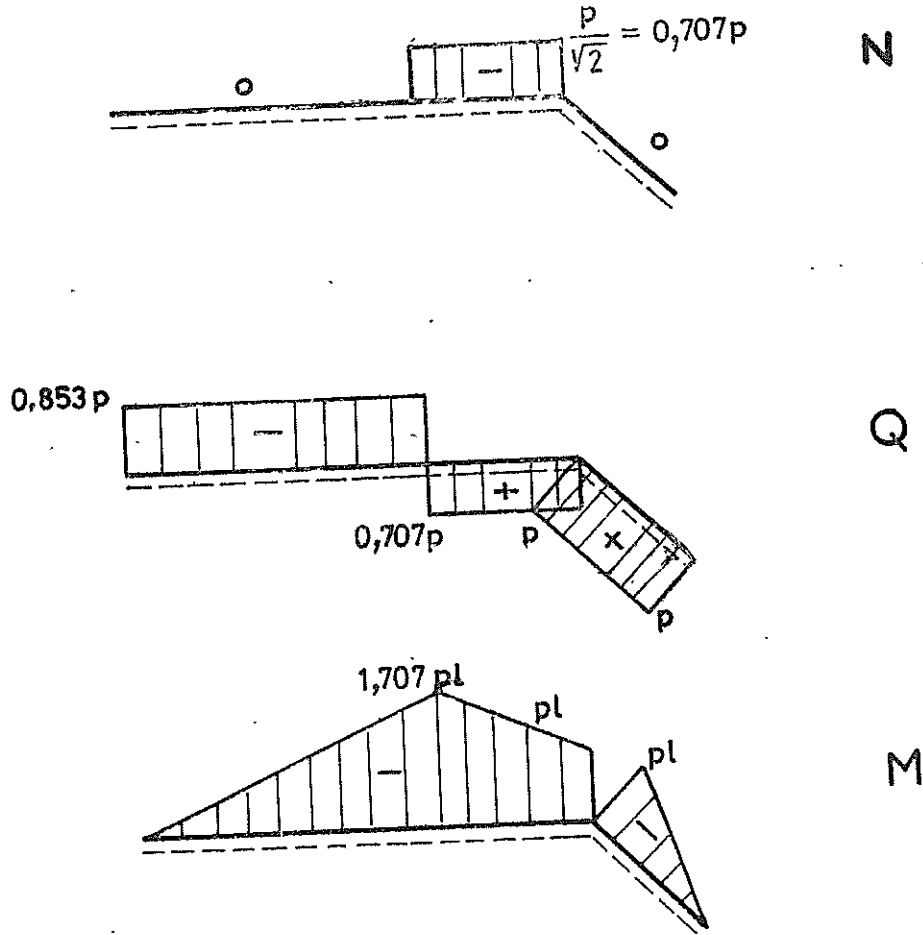
c

شكل 2-80

لتدقيق النتيجة يشتق تابع عزم الانعطاف فيتم الحصول على تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

٣ - مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-81) رسم مخططات قيم القطع .



شكل 2-81

ثال 43 :

يتعرض الجائز البسيط ممتد الطرف (جائز بسيط بذراع بارزة او جائز بسيط بظفر) لتأثير حمولة كما في الشكل (2-82) .

المطلوب . إيجاد قيم القطع .

الحل :

يفضل اعادة الحمولة الموزعة الى قوتين وحيدتين تكافئها الا وهي $R_1 = 24,0 \text{ Mp}$ و $R_2 = 8,0 \text{ Mp}$ -

ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$B_H = B \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} B \quad ; \quad B_V = B \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} B$$

$$A_V = \frac{1}{6,0} (R_1 \cdot 3,0 - R_2 \cdot 1,0 - P \cdot 2,0) = 9,0 \text{ Mp}$$

$$B_V = \frac{1}{6,0} (R_1 \cdot 3,0 + R_2 \cdot 7,0 + P \cdot 8,0) = 28,0 \text{ Mp}$$

$$B = 2 \cdot B_V = 56,0 \text{ Mp}$$

$$B_H = \frac{\sqrt{3}}{2} 56,0 = 48,5 \text{ Mp}$$

$$A_H = B_H = 48,5 \text{ Mp}$$

بواسطة القوتين الافقيتين A_H , B_H يتم ايجاد مخطط القوة الناعمية . ان القوة الناعمية بين المساند هي عبارة عن قوة ضاغطة قيمتها 48,5 - اما في الذراع البارزة (الظفر) فتساوي الصفر.

تبدأ القوة العرضية عند المسند الايسر بالقيمة $A_V = 9,0 \text{ Mp}$ بعد ذلك خطياً الى ان تبلغ القيمة التالية .

$$A - R_1 = 9,0 - 24,0 = -15,0 \text{ Mp}$$

بعد ذلك تقفز عند نقطة الاستناد b الى القيمة .

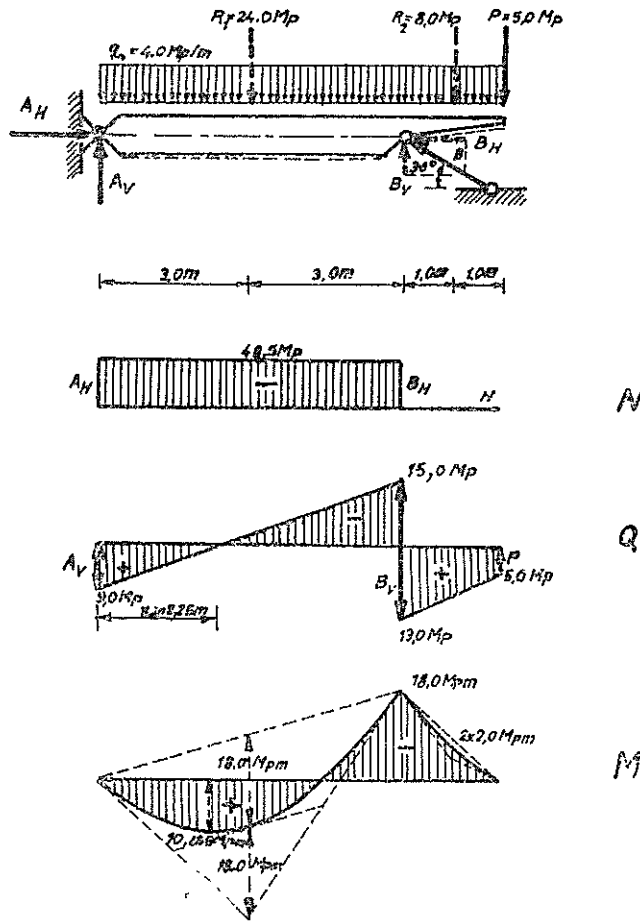
$$-15,0 + B_V = -15,0 + 28,0 = 13,0 \text{ Mp}$$

ثم تتناقص بما يساوي قيمة القوة الوحيدة $P = 50 \text{ Mp}$.

تغير القوة اشارتها على بعد :

$$x_0 = \frac{A_V}{q_0} = \frac{9,0}{4,0} = 2,25 \text{ m}$$

وكذلك فوق المسند الايمن (الوجود في النقطة d) .
تتألف مخططات العزم من مقطعين مكافئين من الدرجة الثانية .



شكل 2-82

يبلغ العزم فوق نقطة استناد المسند الايمن القيمة التالية :

$$A_v \cdot 6,0 - R_1 \cdot 3,0 = 9,0 \cdot 6,0 - 24,0 \cdot 3,0 = -18,0 \text{ Mpm}$$

تقع القيمة الاعظمية الموجبة لعزم الانعطاف عند النقطة $x_0 = 2,25 \text{ m}$ وهي تبلغ :

$$\max M = A_v \cdot 2,25 - \frac{q_0 \cdot 2,25^2}{2} = 10,125 \text{ Mpm}$$

بينما تقع القيمة الاعظمية السالبة للعزم فوق المسند الايمن وهي تبلغ $-18,0 \text{ Mpm}$.
لقد تم في الشكل 2 82 رسم مخططات قيم القطع .

مثال 44 :

يتعرض الجائز البسيط ممتد الاطراف الممثل في الشكل (2-83) لتأثير حمولة موزعة بانتظام تؤثر على رقعة منه كما وتؤثر عليه قوتان وحيدتان الاولى شاقولية والثانية مائلة وتؤثر على نهايته اليسرى. المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل .

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$A_v = \frac{1}{7,0} (P_{1v} \cdot 8,0 + P_2 \cdot 5,0 + R_1 \cdot 2,5 - R_2 \cdot 1,0) = 12,161 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{7,0} (-P_{1v} \cdot 1,0 + P_2 \cdot 2,0 + R_1 \cdot 4,5 + R_2 \cdot 8,0) = 27,667 \text{ Mp}$$

$$A_H = P_{1H} = 2,828 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع:

في مجال الذراع البارزة اليسرى (الظفر الايسر) فقط لا تنعدم القوة الناعمية وهي تبلغ .

$$N = - 2,828 \text{ Mp}$$

يتألف مخطط القوة العرضية من اربعة اجزاء تحدها القوى الوحيدة الاربعة .

تغير القوة العرضية اشارتها عند نقاط الاستناد وكذلك عند النقطة التي تبعد :

$$x_0 = 2,0 + \frac{-P_{1v} + A_v - P_2}{q_0} = 2,0 + \frac{7,33}{5,0} = 2,0 + 1,47 = 3,47 \text{ Mpm}$$

لتعيين مخطط عزم الانعطاف ينبغي حساب العزوم في كل من النقاط 1, 2, 3 التي تبلغ :

$$M_1 = - P_{1v} \cdot 1,0 = - 2,828 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = - P_{1v} \cdot 3,0 + A_v \cdot 2,0 = + 15,838 \text{ Mpm}$$

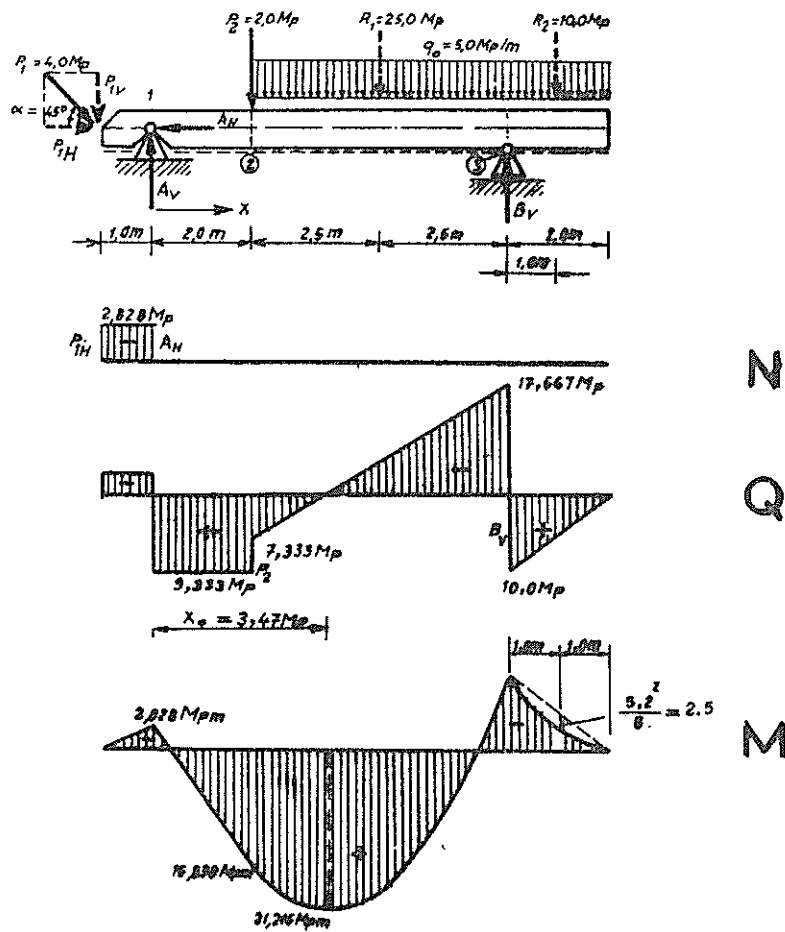
$$M_3 = - R_2 \cdot 1,0 = - 10,000 \text{ Mpm}$$

يأخذ العزم تحت الحمولة الموزعة بانتظام شكل قطع مكافئ من الدرجة الثانية ، وفي الاجزاء غير المحملة يتوزع العزم خطياً .

يلعب العزم عند النقطة $x_0 = 3,47 \text{ m}$ قيمته الاعظمية :

$$\max M = -P_1 \cdot 4,47 + A_v \cdot 3,47 - P_2 \cdot 1,47 - \frac{q_0 \cdot 1,47^2}{2} = 21,216 \text{ Mpm}$$

لقد تم في الشكل (2.83) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-83

مثال 45 :

يتعرض الجائز الممثل في الشكل (2-84) لحالة وحيدة شاقولية .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند التي تبلغ :

$$A_v = \frac{P \cdot 2,0}{8,0} = 1,0 \text{ Mp} \quad ; \quad B_v = \frac{P \cdot 6,0}{8,0} = 3,0 \text{ Mp}$$

لا يحتوي الجائز على قوة داخلية إلا في المجال الشاقولي . اما قيمتها فتبلغ :

$$N = - 4,0 \text{ Mp}$$

تظهر القوة العرضية في كل الاجزاء الاولية وتتوزع هناك بشكل منتظم (ثابت) وذلك لان ذراع القوة P في الجزء الشاقولي لا يتغير مهما كان موضع القطع الاقي . يبلغ عزم الانعطاف في النقطة 1 باعتبارها حداً للجزء الجائز الايسر :

$$M_1 = A_v \cdot 4,0 = 4,0 \text{ Mpm}$$

وفي نفس النقطة من اجل الجزء الايمن من الجائز :

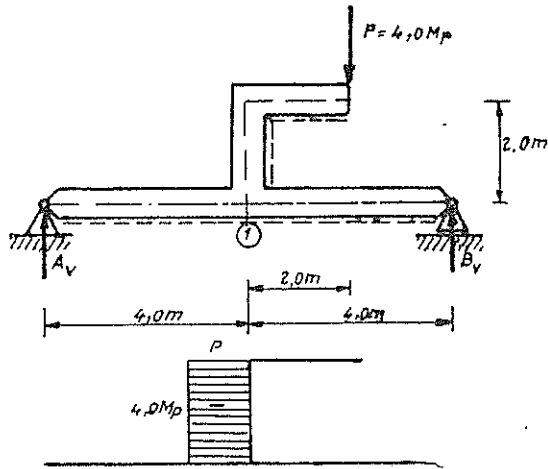
$$M_1 = B_v \cdot 4,0 = 12,0 \text{ Mpm}$$

وكذلك في نفس النقطة من اجل الجزء العلوي للجائز :

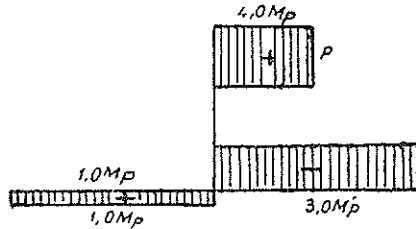
$$M_1 = - P \cdot 2,0 = - 8,0 \text{ Mpm}$$

وبهذا يحتوي مخطط عزم الانعطاف على قفزة تنتج عن تأثير العزم M الذي تشكله القوة P حول النقطة 1 .

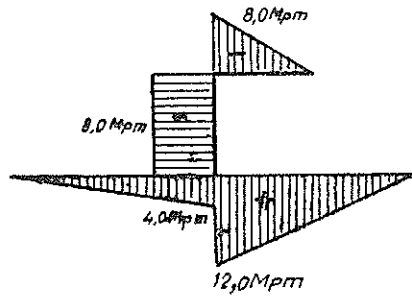
لقد تم في الشكل (2-84) تمثيل مخططات قيم القطع .



N



Q



M

شكل 2-84

مثال 46 :

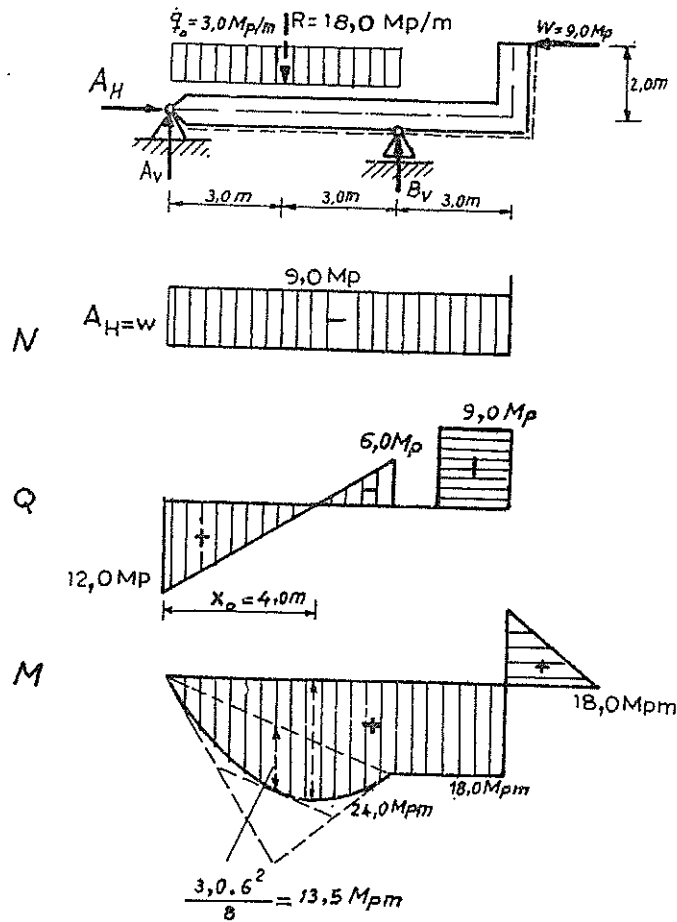
يتعرض الجائز البسيط ممتد الاطراف لتأثير حمولات كما يشير الشكل (2-85) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود أفعال المساند التي تبلغ:



شكل 2-85

$$A_v = \frac{1}{6,0} (R \cdot 3,0 + W \cdot 2,0) = 12,0 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{6,0} (R \cdot 3,0 - W \cdot 2,0) = 6,0 \text{ Mp}$$

$$A_H = W = 9,0 \text{ Mp}$$

تبلغ القوة الناعمية المشكلة نتيجة لتأثير القوة الافقية W في جزء الجائز الافقي ما يلي :

$$N = -9,0 \text{ Mp}$$

تندم القوة العرضية (وحيث ير مخطط القوة العرضية بالصفر) عند النقطة التي تبعد :

$$x_0 = \frac{A_v}{q_0} = \frac{12,0}{3,0} = 4,0 \text{ m}$$

يأخذ عزم الانعطاف في مجال تأثير القوة الموزعة شكل قطع مكافئ من الدرجة الثانية. أما في الأجزاء الأفقية الخالية من التحميل فيأخذ قيمة ثابتة تبلغ :

$$W \cdot 2,0 = 9,0 \cdot 2,0 = 18,0 \text{ Mpm}$$

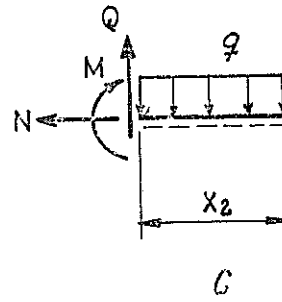
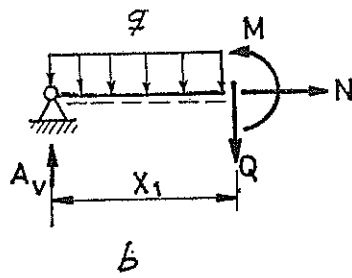
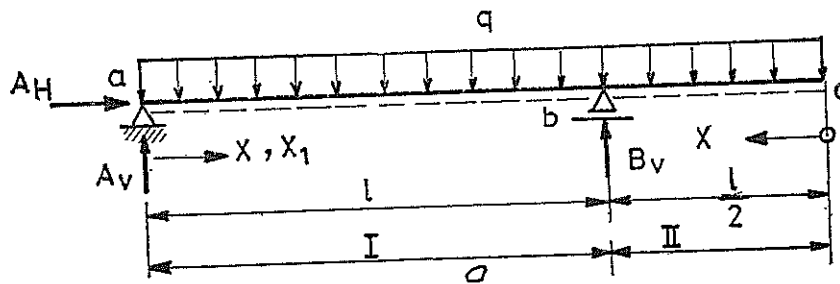
تقع القيمة الأعظمية لعزم الانعطاف عند النقطة التي تبعد $x_0 = 4,0 \text{ m}$ وتبلغ :

$$\max M = A_v \cdot 4,0 - \frac{q_0 \cdot 4,0^2}{2} = 24,0 \text{ Mpm}$$

لقد تم في الشكل (2-85) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 47 :

يتعرض الجائز ممتد الاطراف لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q (شكل 2-86) .
المطلوب : إيجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .



شكل 2-86

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند المطلوبة :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot l - q \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{3}{4} l = 0 ; B_v = \frac{9}{8} q l$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - q \cdot \frac{3}{2} l = 0 ; A_v = \frac{3}{8} q l$$

التدقيق :

$$\Sigma M_c = 0 : A_v \cdot \frac{3}{2} l + B_v \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{3}{4} l = 0$$

بتبديل قيم كل من A_v و B_v يرى ان العلاقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

٢ - قيم القطع :

يتألف الجائز من مجالين I , II .

المجال I ($0 \leq x_1 \leq l$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع اليمين (شكل 2.86b) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v + q x_1 = 0 ; Q = \frac{3}{8} q l - q x_1$$

(تمثل هذه المعادلة خطاً مستقيماً) .

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : M - A_v \cdot x_1 + q \frac{x_1^2}{2} ; M = \frac{3}{8} q l x_1 - q \frac{x_1^2}{2}$$

(تمثل هذه المعادلة قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية) .

تطبيق عددي :

$$x_1 = 0 : Q = \frac{3}{8} ql ; M = 0$$

$$x_1 = l : Q = -\frac{5}{8} ql ; M = -q \frac{l^2}{8}$$

للحصول على القيمة الاعظمية لعزم الانعطاف يعدم تابع القوة العرضية (مشتق عزم الانعطاف) هكذا :

$$Q = 0 = \frac{3}{8} ql - qx_1 ; x_1 = \frac{3}{8} l$$

$$\max M = M(x_1 = \frac{3}{8} l) = \frac{3}{8} ql \cdot \frac{3}{8} l - q \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} l \right)^2 = \frac{9}{128} ql^2$$

المجال II ($0 \leq x_2 \leq l/2$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع اليمين (شكل 2.86c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q = qx_2$$

(معادلة خط مستقيم) .

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M = -q \frac{x_2^2}{2}$$

(معادلة قطع مكافئ درجة ثانية) .

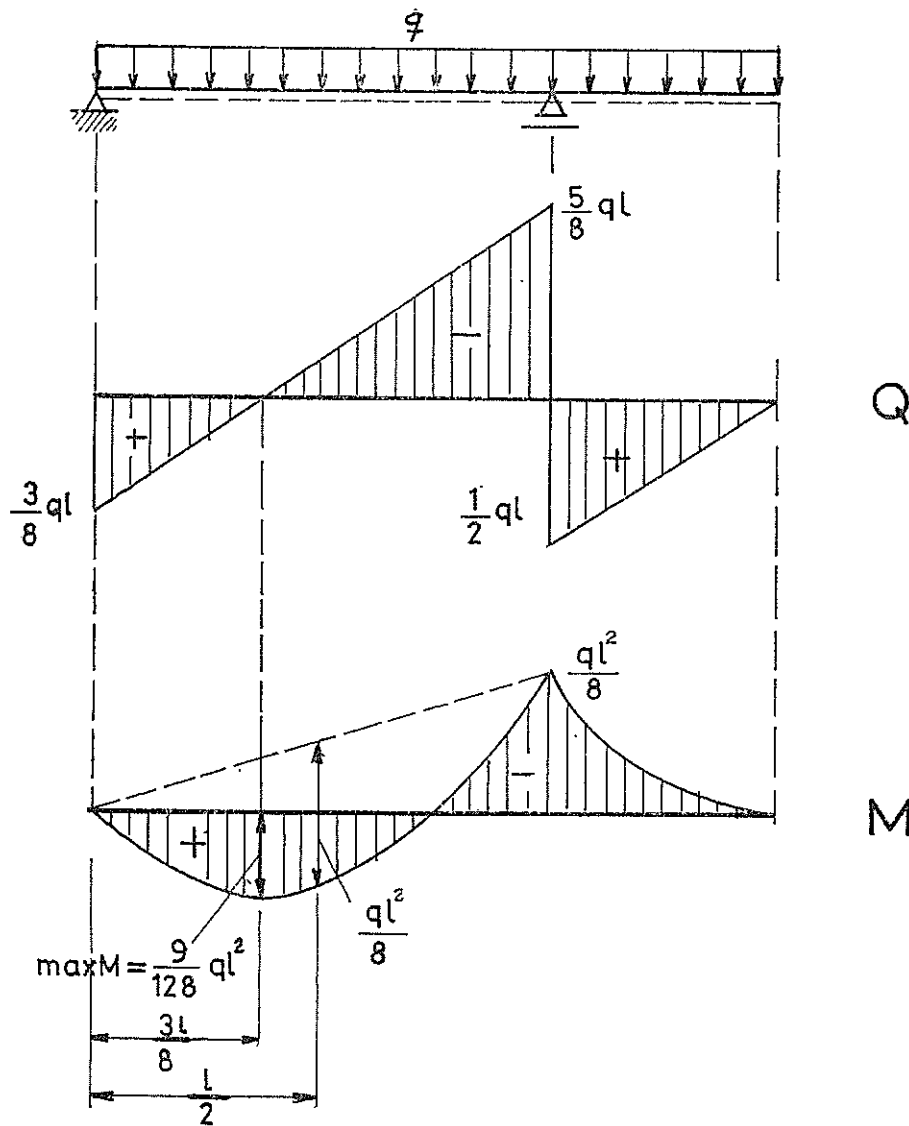
تطبيق عددي :

$$x_2 = 0 : Q = 0 ; M = 0$$

$$x_2 = \frac{l}{2} : Q = \frac{ql}{2} ; M = -q \frac{l^2}{8}$$

٣ - مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2.87) تمثيل مخططات قيم القطع .



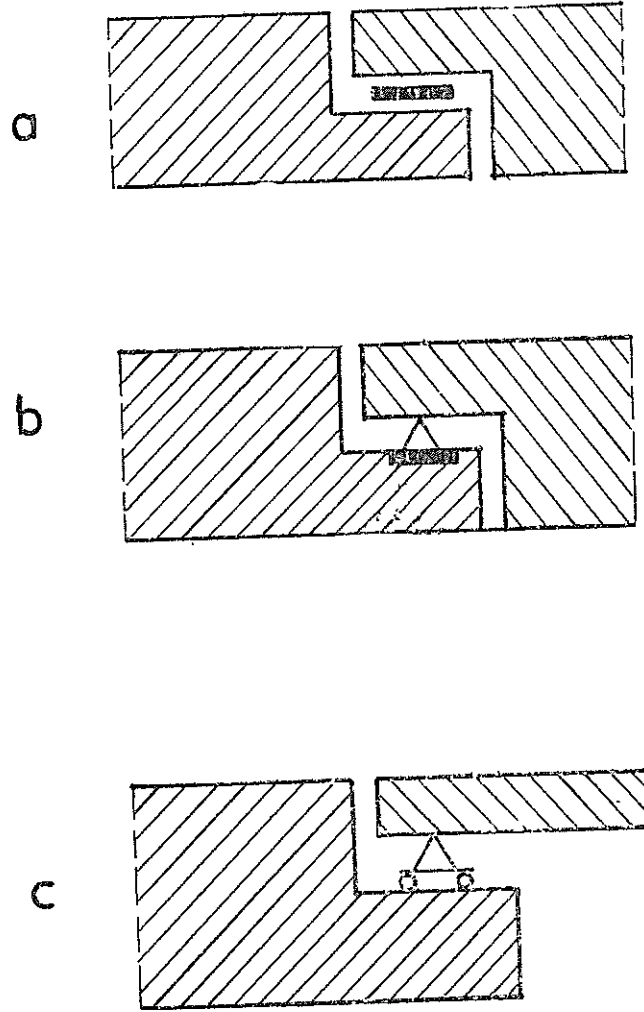
شكل 2 87

٢ - ٧. الجائز المفصلي المركب

يمكن تعريف الجيزان المفصلي المركبة بأنها الجيزان التي يوجد فيها عدد من المفاصل الداخلية يكفي لان يجعلها في مجموعة الجيزان المقررة متناهيًا .

٢ - ٧ - ١ مفاصل الوصل تقع على مستقيم واحد (جائز جرير)

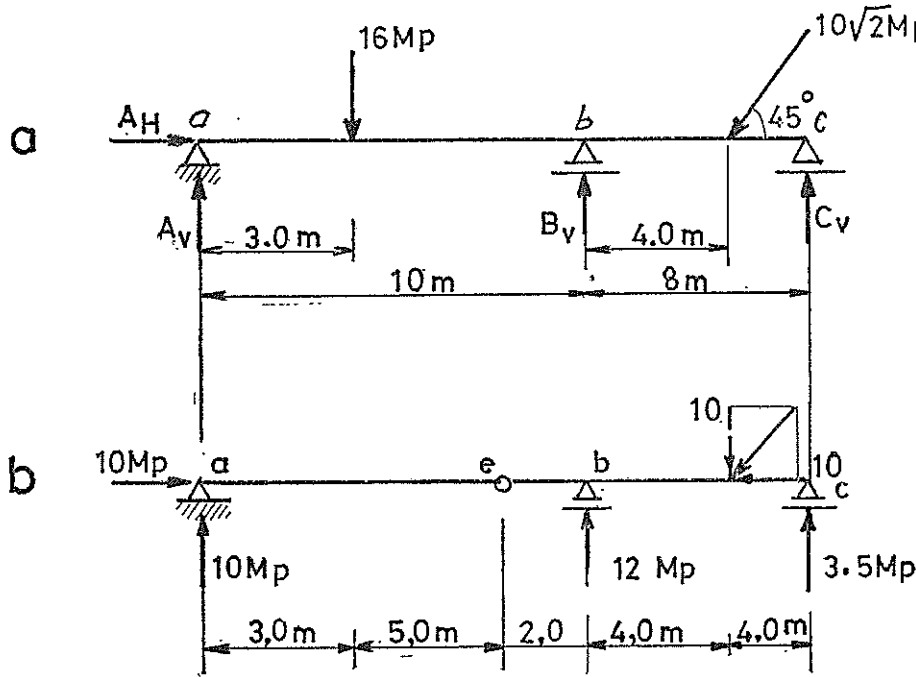
تري في الشكل (2-88 a) صورة مبسطة لشكل مفصلي داخلي موجود في نقطة ما من الجائز



شكل 2-88

ويتضح منه كيفية انقسام الجائز في هذا الوضع الى جزئين يتصل احدهما بالآخر اتصالاً مفصلياً ويبدو في الشكل ان الجزء الايمن من الجائز يستند على الجزء الايسر استناداً مفصلياً عادياً، وهذا هو ما يحدث فعلاً في الطبيعة في معظم الحالات . والاتصال المفصلي في الشكل (2-88 b) هو من النوع الذي يسمح بالدوران فقط ولا يسمح بالحركة الانتقالية النسبية بين جزئي الجائز . أي ان المسند المفصلي المستعمل هو من النوع الثابت . ومن شأن هذا المفصل من الناحية الستاتيكية ان يجعل عزم الانعطاف في نقطة التماس تساوي صفراً . ومعنى هذا من الناحية الستاتيكية هو اضافة شرط جديد على شروط التوازن مقابل كل مفصل داخلي .

باعتبار الجائز abc الممثل في الشكل (2-89a) يمكن فوراً التأكد من ان عدد مركبات رد الفعل لهذا الجائز هي اربع مركبات بفرض ان السندين b , c من النوع المتحرك وان السند عند a من النوع الثابت ولهذا فان هذا الجائز غير مقرر ستاتيكياً وهو جائز مستمر لا تكفي شروط التوازن العادية الثلاثة لتحديد قيم مركبات ردود الفعل الشاقولية له ولا بد اذاً من شرط اضافي بجانب شروط التوازن . فاذا ادخل مفصلاً داخلياً في نقطة ما من الجائز وليكن موضعه النقطة e (شكل 2-89b) فان الجائز يصبح مقرر ستاتيكياً ويطلق عليه اسم الجائز المفصلي المركب . وبالتنقل الى مثال آخر هو abcd (شكل 2-90) والذي يستند على المساند المفصلية المتحركة عند b , c , d , والمسند الثابت عند a ومثل هذا الجائز غير مقرر ستاتيكياً من الدرجة الثانية ، بمعنى ان عدد مركبات ردود الافعال وهو خمسة يزيد على عدد شروط التوازن الثلاثة باثنين من المجاهيل فلا تكفي شروط التوازن وحدها ، اذا لتحديد ردود افعال المساند . ولكي يصبح هذا الجائز جائزاً مفصلياً مركباً ومقرر ستاتيكياً لا بد من ادخال اثنين من المفاصل الداخلية في الجائز من النوع المبين في الشكل (2-88 b) ويمكن ان يتم هذا بأكثر من صورة . ففي الشكل (2-90b) ادخل مفصل داخلي عند h في الفتحة cd وعند g في الفتحة bc أما في الشكل (2-90 c) فقد ادخل المفصلان في فتحة واحدة هي الفتحة bc في الموضعين e , f .



شكل 2-89

α - عدد المفاصل الداخلية ومواضعها .

كما سبق يمكن الآن الاستنتاج ان عدد المفاصل الداخلية التي يلزم تواجدهما في جائز مفصلي مركب بحيث يكون الجائز مقرر مستاتيكيًا يتوقف على العدد الفعلي لمساند الجائز ونوع هذه المساند ويمكن تحديد العدد اللازم من المفاصل الداخلية بواسطة العلاقة التالية :

$$n = (s + 2f) - 2$$

حيث ان :

n هو العدد اللازم من المفاصل الداخلية وان

s هو عدد المساند البسيطة (الخارجية) في الجائز وان

f هو عدد المساند الموثوقة (الخارجية) .

ويلاحظ ان هذه العلاقة لا تفرق بين المسند المفصلي المتحرك (الذي يسمح بالحركة) والمسند الثابت (الذي لا يسمح بالحركة الاتقالية) . وفي الشكل (a 2-90) مثلاً تطبق العلاقة السابقة كالتالي :

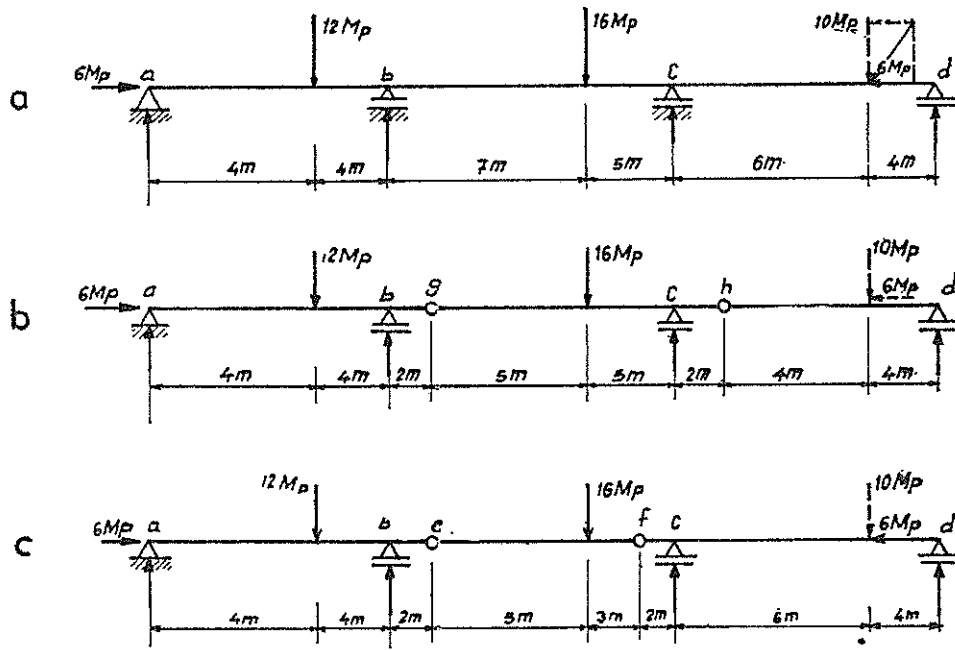
$$s = 4 ; f = 0 ; n = 4 - 2 = 2$$

ويجب الملاحظة عند تحديد مواضع هذه المفاصل الداخلية ما يلي ، حتى يظل الجائز في جميع اجزاء مقرر مستاتيكيًا من جهة وغير قابل الانهيار من جهة اخرى :

١ - لا ينبغي ان تحوي الفتحة الخارجية اكثر من مفصل داخلي واحد . ولا يجوز في هذه الحالة ان تحوي الفتحة التي تليها اكثر من مفصل واحد أيضاً. وعلى ذلك فان مجموع عدد المفاصل الداخلية في الفتحة الخارجية والفتحة التي تليها لا ينبغي ان يزيد عن اثنين .

٢ - لا يجوز ان تحوي فتحة داخلية اكثر من مفصلين داخليين (لا يجوز ان يوجد بين مسندين اكثر من مفصلين) ، على الا يزيد عدد المفاصل الداخلية في فتحتين داخليتين متجاورتين عن ثلاثة مفاصل .

٣ - لا ينبغي ان يزيد عدد المفاصل الداخلية في مجموعة متجاورة من الفتحات عن عدد هذه الفتحات اذا كانت تشمل فتحة خارجية واحدة . فاذا اشتملت المجموعة على فتحتين خارجيتين لزم الا يزيد عدد المفاصل الداخلية عن عدد الفتحات مطروحا منه واحد .



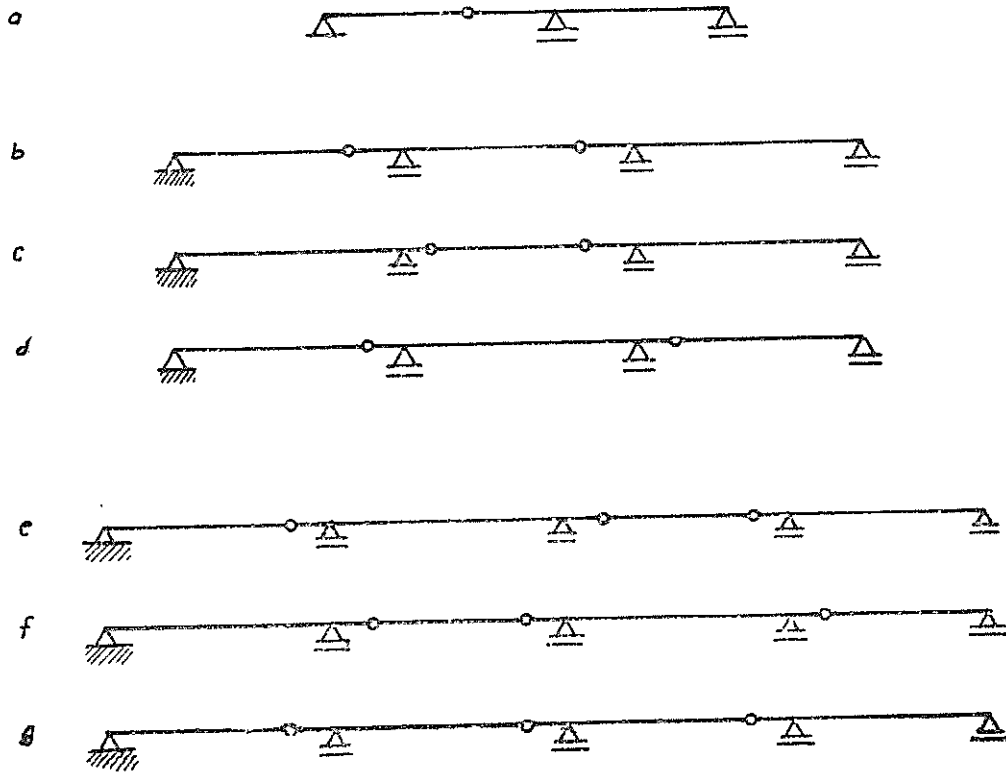
شكل 2-90

- ٤ - لا ينبغي ان يقل عدد المفاصل الداخلية في فتحتين متجاورتين عن مفصل واحد .
 ٥ - اذا كان المسند المتطرف للجائز من النوع الموثوق اعتبرت الفتحة الاخيرة عند تطبيق العلاقة السابقة فتحة داخلية .

- ٦ - لا ينبغي ان يحوي القضيبي (القرص) الواحد اكثر من مسندين (شكل 2-91 e)

٣ - الحركة الافقية وانواع المساند المفصلية

لقد اعتبر في الشكل (2-90) ان جميع المساند الخارجية للجائز فيما عدا مسند واحد هو من النوع الذي يسمح بالحركة الافقية ، وان المفصل الداخلي الذي استعمل في الجائز هو من النوع المبين في الشكل (2-88 b) الذي يسمح بالدوران فقط ولا يسمح بآية حركة افقية . ومثل هذا التصميم من شأنه ان يجعل المركبة الافقية لرد الفعل عند المسند المفصلي الثابت مساوية لجميع المركبات الافقية للحمولات المؤثرة على الجائز بكامل طوله . ويعرض الجائز بذلك في جزء كبير منه الى قوى عمودية زائدة . ومن الممكن تلافياً لما سبق ذكره أن يستعمل مفصلاً داخلياً يسمح بالحركة الافقية الى جانب الدوران (شكل 2.89c) ، بحيث يكون في استطاعة جزئي الجائز في موضع المفصل ان ينزلق احدهما بالنسبة للآخر (افقياً) ، على ان يزيد بهذا عدد الانواع الثابتة من المساند المفصلية الخارجية ويراعى في تحديد الثابت والمتحرك من المساند المفصلية والمفاصل الداخلية معاً ما يلي :



شكل 2-91

١ - ان يكون كل جزء من الجائز قادراً على حرية التمدد والانكماش تحت تأثير العوامل الخارجية .

٢ - ان لا يكون اي جزء من الجائز قادراً على حرية التحرك الاقي تحت تأثير المحولات الخارجية . ويمكن ان يتحقق هذا باكثر من صورة واحدة . ففي الجائز المفصلي المركب الممثل في الشكل (2-90) مثلاً يمكن اختيار حلول اخرى لانواع المفاصل كما يلي :

- ١ - مساند ثابتة (غير متحركة) عند d , c , b ومساند متحركة عند a خارجياً، ثم g , h داخلياً .
- ٢ - مساند ثابتة عند d , g , b ومساند متحركة عند a , c , h . وسيلاحظ دائماً أن عدد المساند القابلة للحركة في هذا المثال هو 3 وان عدد المساند (داخلياً وخارجياً) التي لا تسمح بالحركة هو ايضاً 3 ، والواقع ان اختيار المساند المتحركة وغير المتحركة لن يغير من عدد المفاصل الداخلية الذي يلزم لكي يجعل الجائز المفصلي مقرر ستاتيكيماً كما تعطيه العلاقة الاخيرة من الفقرة السابقة . ويمكن تعليل ذلك كما يلي :

ان المسند المفصلي الذي يسمح بالحركة يحوي مجهولاً واحداً وان الذي لا يسمح بالحركة يحوي مجهولين .

وفي نفس الوقت فإن المفصل الداخلي الذي لا يسمح بالحركة (الافقية) يعطي شرطاً اضافياً واحداً ، أما المفصل الذي يسمح بالحركة فيعطي شرطين وهما :

أ - عزم الانعطاف في موضع المفصل يساوي الصفر .

ب - القوة الناعظمية في موضع المفصل تساوي الصفر .

وعلى ذلك فإن استبدال مسند خارجي متحرك في الشكل (2-90) بمسند ثابت مقابل استبدال مفصل داخلي ثابت بمفصل متحرك يعني زيادة عدد المجاهيل بمقدار زيادة عدد الشروط التي تتوفر لايجاد هذه المجاهيل .

٢ - طرائق حل الجيزان المفصلية المركبة تحليلياً

٢ - ١ الطريقة الأولى (حل الجيزان المفصلية) .

تعتمد هذه الطريقة على ايجاد مركبات ردود الافعال الشاقولية عند المساند الخارجية الفعلية للجائر باستعمال شروط التوازن المادية مع الشروط الاضافية الناتجة عن وجود المفاصل الداخلية، ثم ترسم مخططات القوة الناعظمية والقوة العرضية وعزوم الانعطاف بعد ذلك كالمعتاد . وتكون الشروط المستعملة لتحديد ردود الافعال باحدى الصورتين التاليتين :

١ - العزم حول أي (بالنسبة لاي) مسند لجميع المحولات وردود الافعال المؤثرة على الجائر يساوي الصفر (شروط توازن) .

٢ - عزم الانعطاف عند أي مفصل داخلي يساوي صفراً (ومعنى هذا هو ان العزم حول المفصل لجميع القوى المؤثرة على أحد الجانبين فقط دون الجانب الآخر يساوي صفراً) . ولتدقيق القيم الناتجة يمكن استخدام شرط تساوي المركبات الشاقولية لجميع المحولات وردود الافعال بالصفر .

لتوضيح الطريقة سيتم حل المثال التالي :

مثال 47 :

المطلوب : حل الجائر المفصلي المركب المبين في الشكل (2-92 a) .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

يوجد هنا اربعة مجاهيل (لان المركبة الافقية لرد الفعل عندهم معاوم انها تساوي ٠ مميغابوند) . ويمكن الحصول عليها من الشروط التالية :

١ - عزم الانعطاف في المفصل h يساوي صفراً ، اي ان مجموع العزوم للقوى الموجودة على يمين h تساوي صفراً ، ويعبر عن ذلك بالشرط $M_{hr} = 0$ (لقد كان بالامكان أخذ مجموع العزوم للقوى الموجودة على يسار h تساوي صفراً) ولهذا فان :

$$10 \cdot (4) - 8 \cdot D_v = 0 \quad ; \quad D_v = 5,0 \text{ Mp}$$

٢ - عزم الانعطاف في المفصل g يساوي صفراً . ولهذا فان عزم القوى على يمين g يعطي :

$$16 \cdot (5) - 10 C_v + 10 \cdot (16) - 5 \cdot (20) = 0 \quad : \quad C_v = 14,0 \text{ Mp}$$

٣ - العزم (مجموع العزوم) لجميع القوى حول المسند (بالنسبة للمسند) b يساوي صفراً ويعبر عنه بالشرط $\Sigma M_b = 0$. لهذا ينتج :

$$16 \cdot (7) - 14 \cdot (12) + 10 \cdot (18) - 5 \cdot (22) - 12 \cdot (4) + 8 A_v = 0 :$$

$$A_v = 4,25 \text{ Mp}$$

٤ - العزم (مجموع العزوم) لجميع القوى حول المسند a يساوي صفراً ويعبر عنه بالشرط $\Sigma M_a = 0$. ولهذا ينتج :

$$12 \cdot (4) - 8 \cdot B_v + 16 \cdot (15) - 14 \cdot (20) + 10 \cdot (26) - 5 \cdot (30) = 0 :$$

$$B_v = 14,75 \text{ Mp}$$

وبهذا تتحدد جميع المجاهيل . ويمكن تدقيق هذه النتائج كما يلي :

$$\Sigma V = 0$$

مجموع المحولات الشاقولية :

$$12 + 16 + 10 = 38 \text{ Mp}$$

مجموع ردود الافعال الشاقولية :

$$-(4,25 + 14,75 + 14 + 5) = -38 \text{ Mp}$$

مجموع المحولات الشاقولية + مجموع ردود الافعال الشاقولية = 0 .

٢ - حساب قيم القطع :

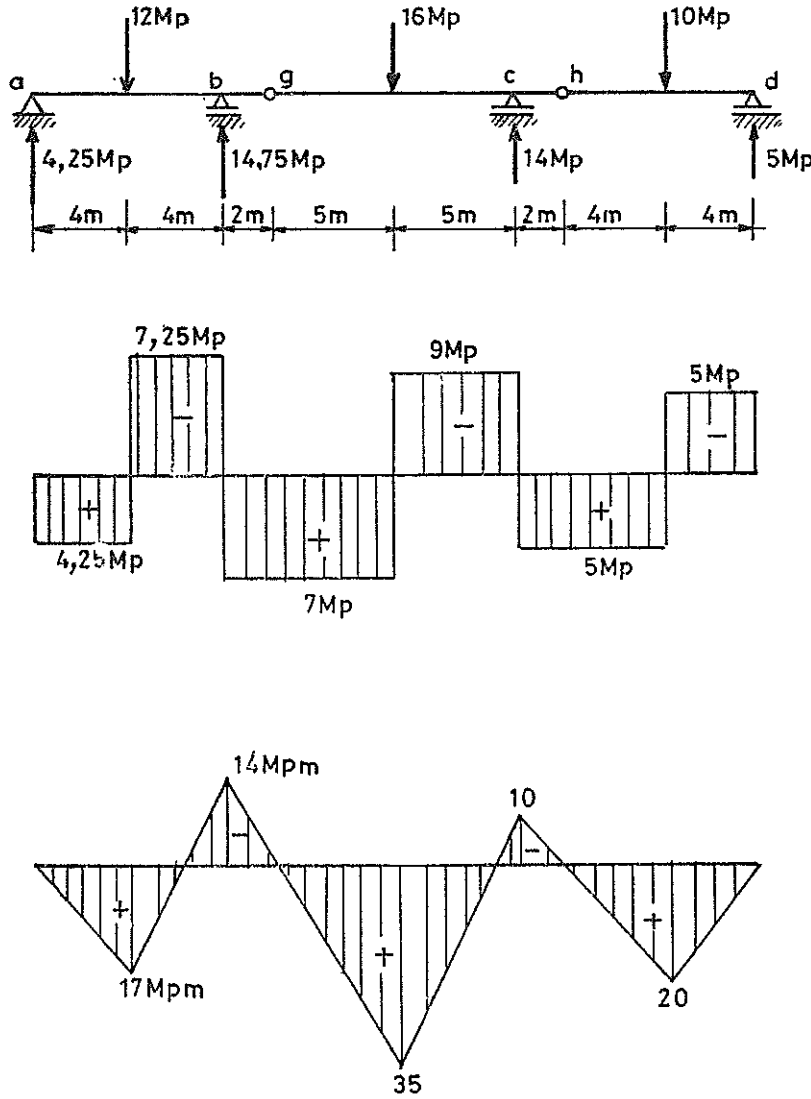
يمكن الان رسم مخطط القوة العرضية ابتداء من الطرف الايسر عند a وهو شكل مدرج

وتمشى الزيادة والنقصان فيه مع اتجاه الحمولات الوحيدة كما يظهر في الرسم ومن السهل تتبع هذا الشكل .

ويلاحظ ان قيمة القوة العرضية لا تتغير عند المفصل الداخلي ما لم توجد قوة وحيدة خارجية في موضع المفصل .

٣ - رسم مخططات قيم القطع :

سيتم هنا رسم مخطط عزم الانعطاف باستعمال فكرة فرق العزوم حيث يكون التغير في عزم الانعطاف بين قطعين مساوياً لمساحة القوة العرضية بين القطعين المذكورين ، وبذلك تحسب



شكل 2-92

قيم عزوم الانعطاف عند المحولات الوحيدة ومواقع ردود الافعال عند المساند . وبلاحظ ان
عزم الانعطاف في موضع المفصل الداخلي يجب ان يساوي صفراً .
لقد تم في الشكل (2-92) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 48 :

المطاب : تعيين قيم القطع للجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-93) .
الحل :

١ - ردود افعال المساند :

يختلف الجائز الممثل في الشكل (2-93) عن الجائز المبين في الشكل (2-92) والذي سبق
حله ، في مواقع انفصال الداخلية فقط . ويكون تحديد ردود الافعال الشاقولية كما يلي :

١ - عزم الانعطاف في المفصل f يساوي صفراً (يؤخذ الجزء الايمن من المفصل f ، أي
الجزء fd) ويعبر عن هذا الشرط بالعلاقة التالية $M_{fr} = 0$ ، ولهذا :

$$M_{fr} = 0 : 10 \cdot (8) - 12 \cdot D_v - 2 C_v = 0 \quad (a)$$

ولا يمكن الآن حل هذه المعادلة لانها تحوي مجهولين ، ولهذا يستمر في تحديد الشرط الثاني
هكذا .

٢ - عزم الانعطاف في المفصل e يساوي صفراً (يؤخذ الجزء الايمن من المفصل e ، أي
ed) ويعبر عن هذا الشرط بالعلاقة التالية : $M_{er} = 0$ وبذلك يتم التوصل للعلاقة المطلوبة :

$$M_{er} = 0 : 16 \cdot (5) + 10 \cdot (16) - 10 \cdot C_v - 20 \cdot D_v = 0 \quad (b)$$

ومن المعادلتين (a) و (b) ينتج أن :

$$D_v = 40 \text{ Mp}$$

$$C_v = 16,0 \text{ Mp}$$

٣ - ويمكن الان تحديد ردي الفعل عند b ، a من الشرطين السابقين ولكن بأخذ العزوم
للقوى الموجودة على يسار f ، e بدلا من تلك التي على يمينها ، هكذا :

$$M_{fl} = 0 : 16 \cdot (3) + 12 \cdot (14) - 10 \cdot B_v - 18 A_v = 0 \quad (c)$$

$$M_{fl} = 0 : 12 \cdot (6) - 2 B_v - 10 A_v = 0 \quad (d)$$

من هاتين المعادلتين ينتج :

$$A_v = 4,5 \text{ Mp}$$

$$B_v = 31,5 \text{ Mp}$$

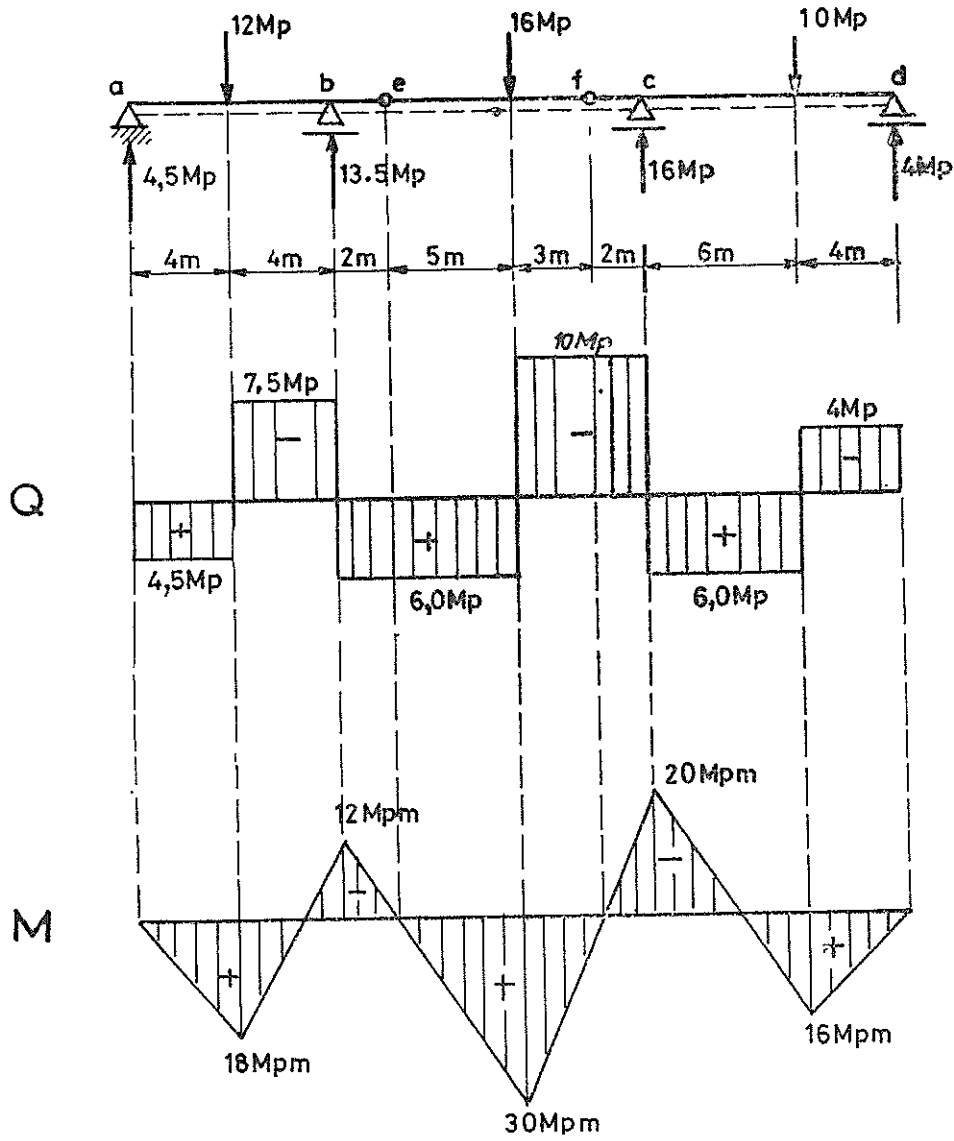
لقد كان من الممكن أخذ العزوم (مجموع العزوم) لجميع القوى حول b لايجاد رد الفعل A_v ثم حول a لايجاد رد الفعل B_v بعد معرفة ردي الفعل عند c , d , مما سبق .
ويستطاع الآن لتدقيق النتائج السابقة جمع كل الحمولات وردود الافعال فيرى ان مجموعها يساوي صفراً .

٢ - مخططات قيم القطع :

لقد تم رسم مخططات قيم القطع في الشكل (2-93) .

٣ - الطريقة الثانية (لحل الجيزان المفصلية تحليلياً)

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم الجائز الى أجزاء الانشائية ودراسة القوى المؤثرة على كل جزء وايجاد ردود الافعال ومخططات القوى العرضية وعزوم الانعطاف التابعة له والناجمة عن هذه القوى . وتحدد الاجزاء الانشائية بمواقع المفاصل الداخلية . وتبعاً لهذا فان الجائز المبين في الشكل (2-89 b) ينقسم انشائياً الى جزئين ae , cc وينقسم الجائز المبين في الشكل (2-90 c) الى ثلاثة اجزاء هي : ae , ef , fd كما أن الجائز المركب الممثل في الشكل (2-90 b) ينقسم انشائياً الى الاجزاء الثلاثة التالية : ag , gh , hd ويعتبر كل جزء من هذه الاجزاء جائزاً بسيطاً او جائزاً ممتد الاطراف وقد يكون الجزء الاخير جائزاً بارزاً (ظفراً) اذا كان المسند الخارجي مسنداً موثقاً . ويستند كل جزء من اجزاء الجائز على مسندين مفصليين (فيما عدا الجزء الاخير من الجانبين فقد يكون جائزاً بارزاً) . وهذه المساند اما ان تكون مساند خارجية من المساند الفعلية للجائز أو مسند داخلي عند المفصل الداخلي حيث يستند احد جانبي الجائز على الجانب الاخر والجزء الذي يستند على مسندين من المساند الخارجية قادر على ان يتحمل ما عليه من حمولات خارجية ، وما عسى ان يؤثر عليه من ردود فعل عند موضع المفصل الداخلي خارج هذين المسندين بوصفه حاملاً للاجزاء التي على جانبيه اذا لزم الامر . اما جزء الجائز الذي يستند على مسندين من المساند الداخلية عند مفصلين داخليين على جانبيه من الجائز



شكل 2-93

فيسمى هذا الجزء أحياناً بالفتحة المعلقة وينقل رد الفعل المؤثر عليه بإشارة معاكسة الى الجزء الذي يحمله كقوة مؤثرة على هذا الجزء نتيجة حمله لهذه الفتحة المعلقة . فاذا كان بجزء الجائز مسند خارجي واحد لزمه مسند داخلي آخر في موضع الفصل الداخلي حيث يستند على الجزء الذي يليه والذي يحمل رد فعله في هذا الموضع . ولايضاح هذا يرجع الى الجيزان المفصلية المركبة التي تم التنويه عنها سابقاً ، حيث يرى في الشكل (2-89 b) ان الجزء ae يستند عند e على الجزء ecb وفي الشكل (2-90 c) يرى ان الجزء ef هو فتحة معلقة تستند يميناً على الجزء fed عند f ويساراً على الجزء eba عند e اما اجزاء الجائز المركب الممثل في الشكل (2-92 a)

فيري فيها ان الجزء dh يستند عند h على الجزء gch الذي يستند بدوره عند g على الجزء abg . وليعتبر الان المثال التالي :

مثال 49 :

المطلوب : تعيين قيم القطع للجائز المفصلي المركب الممثل في الشكل (2-94) باستخدام طريقة تقسيم الجائز الى اجزائه الانشائية .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

يبين الشكل (2-94) الاجزاء الانشائية الثلاثة للجائز ومن السهل تتبع ردود الافعال المؤثرة على كل جزء منها ويلاحظ ماييلي :

١ - الجائز البسيط hd يكون رد الفعل عليه عند h يساوي 5 ميغا بوند الى الاعلى . وبؤثر هذا بقوة مساوية ومعاكسة على الجائز الحامل gch عند h اي بقوة تساوي 5 ميغابوند الى الاسفل .

٢ - الجائز gch يكون رد الفعل له عند g هو 7 ميغابوند الى الاعلى ويحسب بأخذ العزوم حول c ولهذا تؤثر على الجزء الثالث abg بقوة تساوي 7 ميغابوند الى الاسفل .

٢ - مخططات قيم القطع :

ويمكن الان رسم مخططات القوى العرضية وعزوم الانعطاف لكل جزء على حدة بالطريقة العادية وبذلك يتم الحصول على نفس المخططات المبينة في الشكل (2-94) .

٣ - ٢ أمثلة

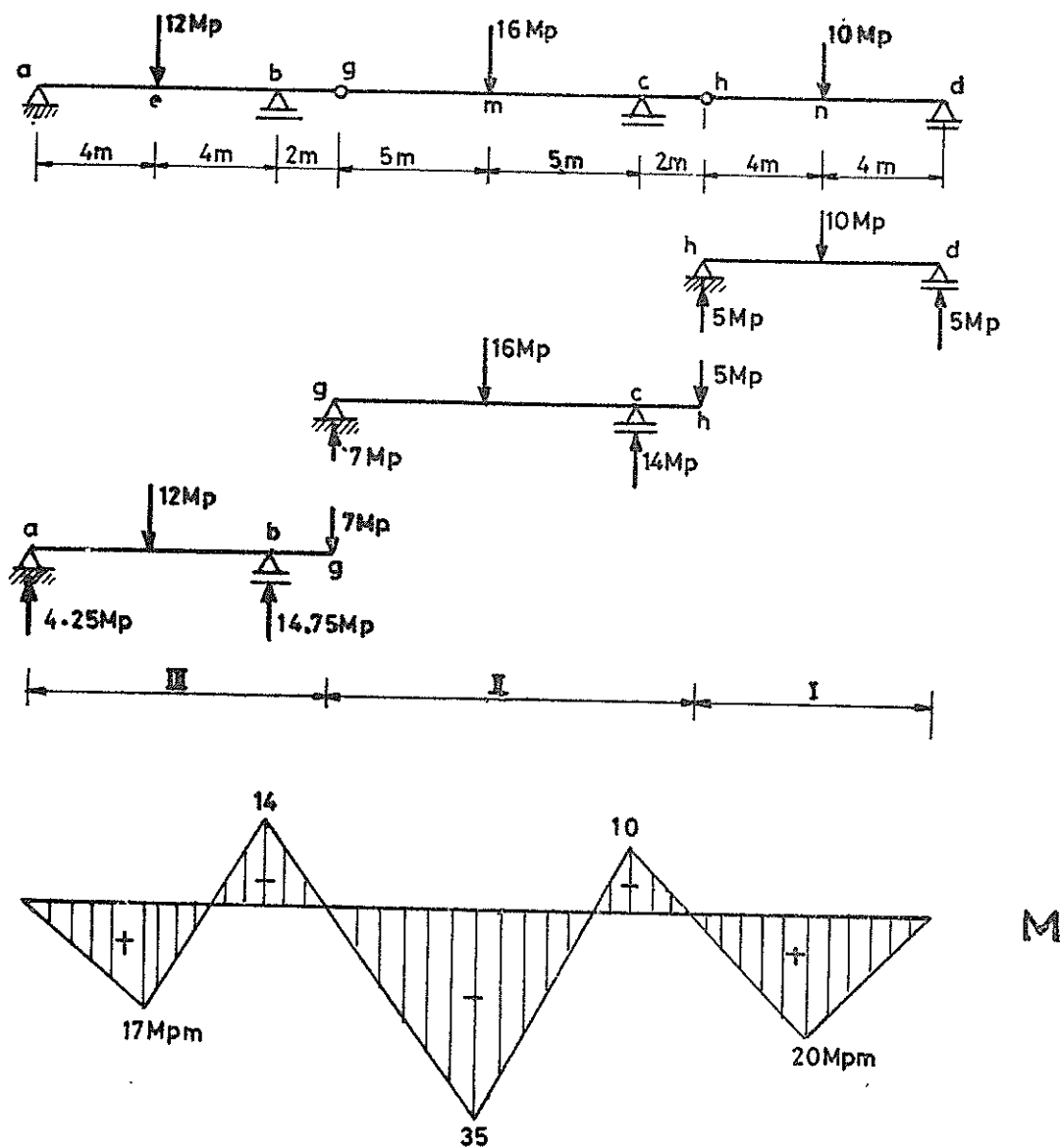
مثال 50 :

الجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-95) .

المعطى :

$$P_1 = 3000 \text{ kp} ; \alpha = 30^\circ ; l_2 = 3\text{m} ; l_4 = 1\text{m}$$

$$P_2 = 4000 \text{ kp} ; l_1 = 2\text{m} ; l_3 = 4\text{m} ; l_5 = 2\text{m}$$



شكل 2-94

المطلوب :

- ١ - حساب ردود افعال المساند (قوى الاستناد) .
- ٢ - حساب قوى المفاصل (قوى التمثيل) .
- ٣ - حساب ورسم مخططات قيم القطع (القوة الناعمية ، القوة العرضية ، عزم الانعطاف) .

الحل :

١ - الطريق التحليلي (باستخدام الطريقة الثانية) :

بتطبيق شروط التوازن على الجمل الجزئية (شكل d 2.95) ينتج :

الجزء الايسر

الجزء اليمين

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v + G_v - P_1 = 0 ; C_v - G_v - P_2 \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma H = 0 ; G_H - A_H = 0 ; G_H - P_2 \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : G_v l_3 + B_v l_2 - P_1 l_1 = 0 ; C_v l_4 - P_2 \sin \alpha l_5 = 0$$

يعطي حل مجموعة المعادلات السابقة ردود الافعال المطلوبة :

$$A_H = P_2 \cdot \cos \alpha , 4000 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3464 \text{ kp}$$

$$A_v = (1 - \frac{l_1}{l_2}) P_1 + (\frac{l_3}{l_2} - 1) (\frac{l_5}{l_4} - 1) P_2 \sin \alpha = 1669 \text{ kp}$$

$$B_v = \frac{l_1}{l_2} P_1 - \frac{l_3}{l_2} (\frac{l_5}{l_4} - 1) P_2 \sin \alpha = - 667 \text{ kp}$$

$$G_H = P_2 \cos \alpha = 3464 \text{ kp}$$

$$G_v = (\frac{l_5}{l_4} - 1) P_2 \sin \alpha = 2000 \text{ kp}$$

$$C_v = \frac{l_5}{l_4} P_2 \sin \alpha = 4000 \text{ kp}$$

لتدقيق النتائج يمكن تطبيق شروط التوازن على الجسم بكامله ، حيث يمكن هناك الانطلاق من حقيقة انعدام العزم في المفصل ، هذه الشروط هي :

$$M_{gr} = 0 : C_v l_4 - P_2 \sin \alpha l_5 = 0$$

أو :

$$M_{gr} = 0 : A_v l_3 + B_v (l_3 - l_2) - P_1 (l_3 - l_1) = 0$$

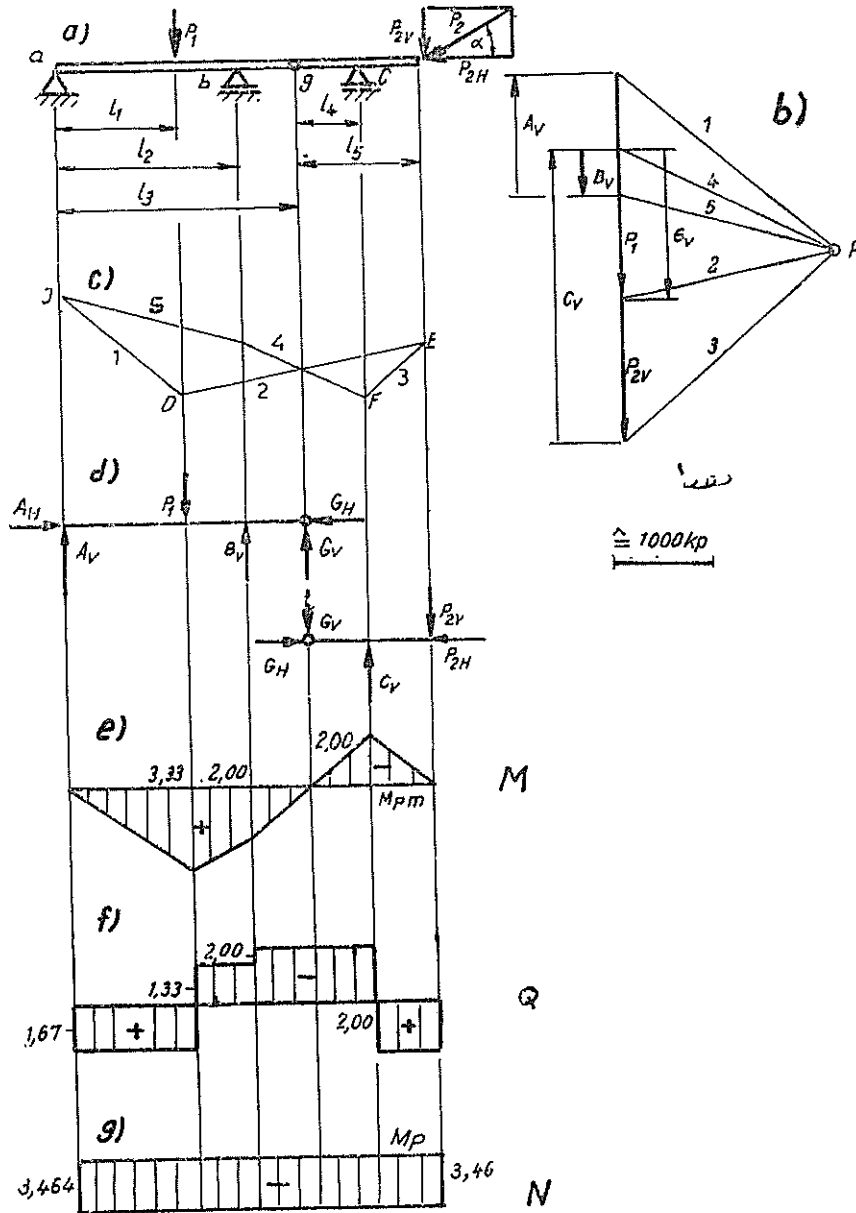
$$\Sigma M_a = 0 : C_v (l_4 + l_3) + B_v l_2 - P_2 \sin \alpha (l_3 + l_5) - P_1 l_1 = 0$$

$$\sum V = 0 : A_v + B_v + C_v - P_1 - P_2 \sin \alpha = 0$$

$$\sum H = 0 : A_H - P_2 \cos \alpha = 0$$

٢ - الطريق التخطيطي :

يعتمد الحل التخطيطي على طريقة المضلع الجلي (شكل 2-95 b) والمضلع JDEF (شكل 2-95 c)



شكل 2-95

بما ان عزم الانعطاف في المفصل g يساوي الصفر لذلك يلزم ان يتقاطع الشعاع 4 مع الشعاع 2 في النقطة g . لعدم إنكسار الشعاع 2 تحت النقطة b لذلك ينبغي على الاشعة 5,4 ، وبسبب تأثير القوة الوحيدة ، إحداث الانكسار اللازم .

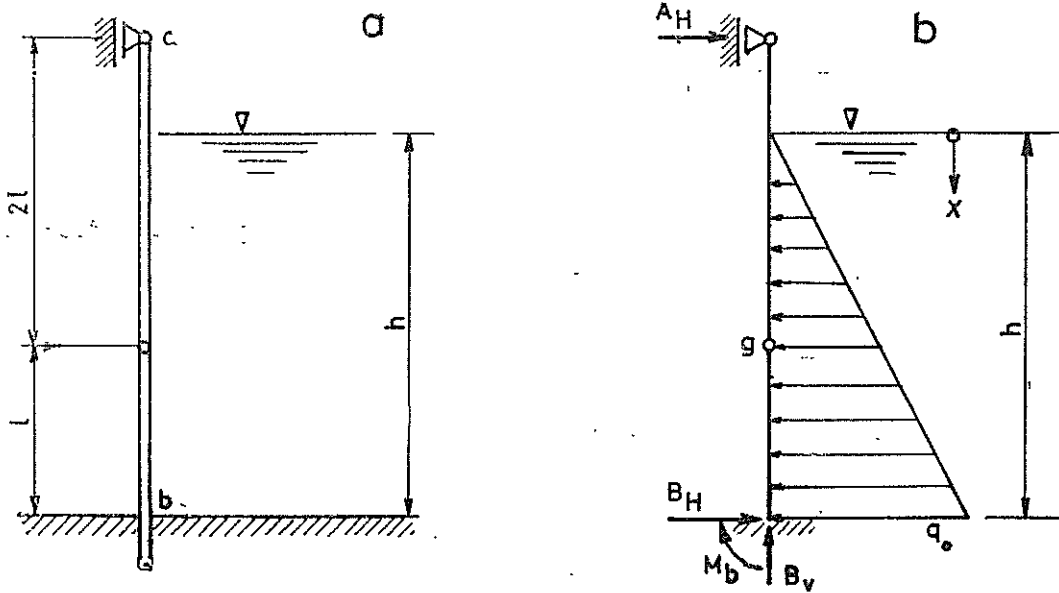
تتقاطع الاشعة 1 , 5 عند النقطة J وذلك لتحقيق شرط انعدام العزم هناك .
تحتسب قيم القطع (ردود أفعال القطع) من الشكل (2-95 d) حسب الطريقة المعروفة الاشكال (2-95 c...g) .

مثال 51 :

يتعرض باب عبارة مائية عرضه b لضغط الماء (شكل 2-96) .

المعطى : l , b , h والوزن النوعي للماء γ .

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند A , B كتابع للارتفاع h .



شكل 2-96

الحل :

يمكن اعتبار ضغط الماء على باب العبارة المائية كحمولة مثلثية (التوزيع) . تصل شدة الحمولة الاعظمية عند النقاط $x=h$ وتساوي $q_0 = \gamma \cdot h$. يتطلب حل المسألة التفريق بين حالتين للتحميل :

الحالة 1 ($h \geq l$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن ، المعادلات التالية :

$$M_{g_0} = 0 : -A_H \cdot (2l) + \frac{1}{2} \frac{(h-l)^2}{h} q_0 \cdot \frac{1}{3}(h-l) \cdot b = 0$$

$$\Sigma H = 0 : A_H + B_H - \frac{1}{2} q_0 \cdot h \cdot b = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : -M_b - A_H \cdot 3l + \frac{1}{2} q_0 \cdot h \cdot \frac{1}{3} h \cdot b = 0$$

$$\Sigma V = 0 : B_v = 0$$

يحل مجموعة المعادلات يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A_H = \frac{1}{12} \frac{b}{l} (h-l)^3 \cdot \gamma ; B_H = \frac{1}{2} b h^2 \gamma - A_H$$

$$M_b = \frac{1}{6} b h^3 \gamma - 3 A_H l ; R_v = 0$$

الحالة 2 ($h \leq l$) :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$M_{g_0} = 0 : A_H \cdot 2l = 0$$

$$\Sigma H = 0 : A_H + B_H - \frac{1}{2} q_0 \cdot h \cdot b = 0$$

$$\Sigma V = 0 : B_v = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 ; -M_b - 3A_H \cdot l + \frac{1}{2} q_0 h \frac{1}{3} h b = 0$$

يحل مجموعة المعادلات يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A_H = 0 ; B_H = \frac{1}{2} b h^2 \gamma ; M_b = \frac{1}{6} b h^3 \gamma ; B_v = 0$$

مثال 52 :

المطلوب : إيجاد قيم القطع للجوائز المفصلي الممثل في الشكل (2-97) .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$M_{g1} = 0 : A_v \cdot l - q l \cdot \frac{l}{2} = 0 ; A_v = \frac{q l}{2}$$

$$\Sigma M_b = 0 : A_v \cdot 2l - C_v \cdot l + q l \cdot \frac{l}{2} - q (2l) \frac{2l}{2} = 0 ; C_v = - \frac{q l}{2}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v + C_v - q \cdot 3l = 0 ; B_v = 3 q l$$

التحقق :

يعطي تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للنقطة g العلاقات التالية :

$$\Sigma M_g = 0 : A_v \cdot l - B_v \cdot l - C_v \cdot 2l + q \cdot 3l \cdot \left(\frac{3}{2}l - l \right) = 0$$

٢ - حساب قيم القطع

يتألف الجائز من مجالين .

المجال I ($0 \leq x_1 \leq 2l$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل b 2-97) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v + q x_1 = 0 : Q = \frac{q l}{2} - q x_1$$

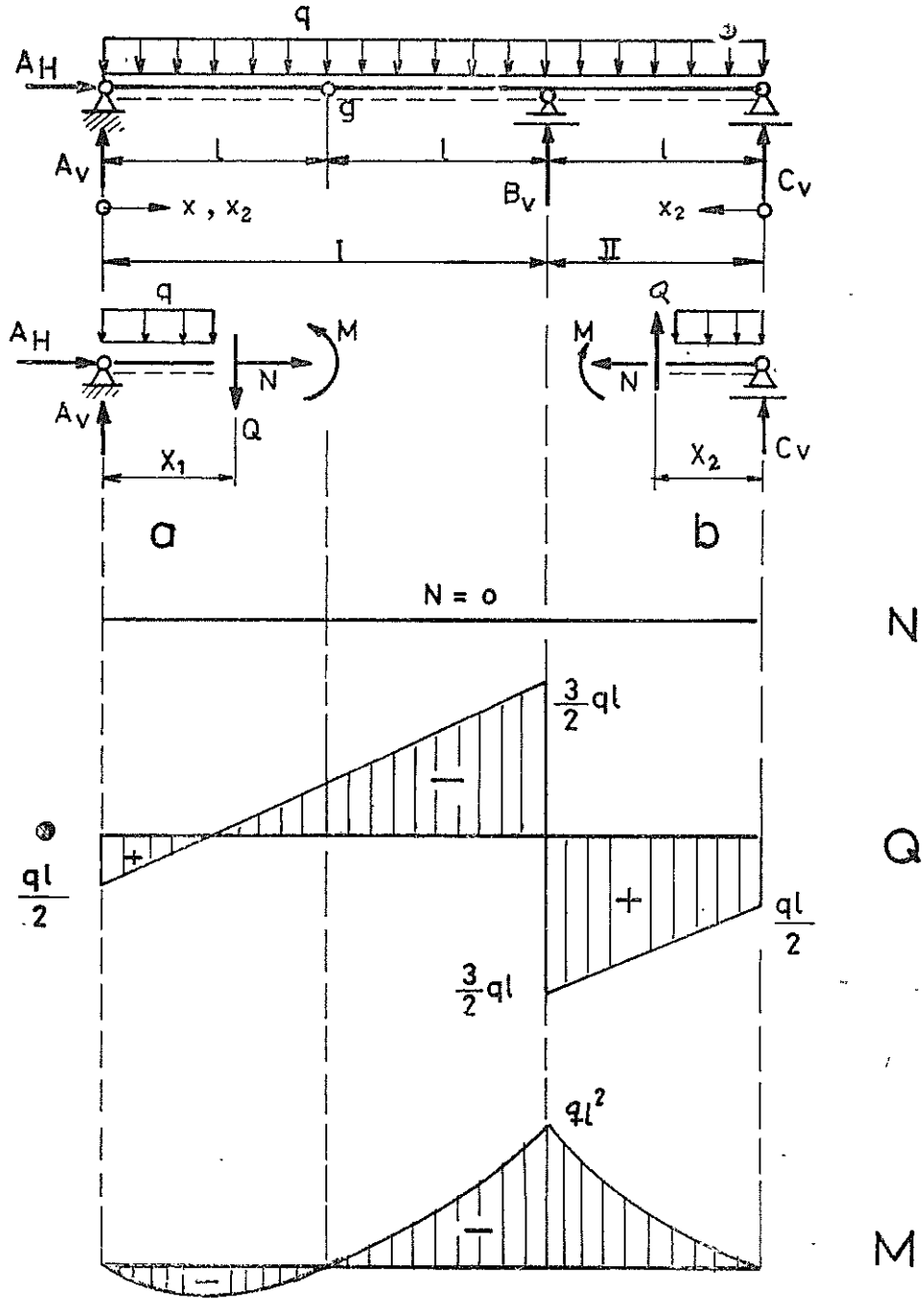
تمثل معادلة القوة العرضية خطأ مستقيماً ميله $-q$ ولا يمر من مركز الاحداثيات .

$$\Sigma M_{x1} = 0 : M - A_v \cdot x_1 + q x_1 \frac{x_1}{2} = 0 : M = \frac{q l}{2} x_1 - q \frac{x_1^2}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

المجال II ($0 \leq x_2 \leq l$) .

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل c 2-97) ينتج :



شكل 2-97

$$\Sigma H = 0 : N = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q + C_v - q x_2 = 0 : Q = -\frac{q l}{2} + q x_2$$

تمثل معادلة القوة العرضية خطأً مستقيماً ميله $+q$ ولا يمر من مركز الاحداثيات .

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M - C_v \cdot x_2 + q x_2 \frac{x_2}{2} = 0 : M = -\frac{q l}{2} x_2 - q \frac{x_2^2}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

مثال 53 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع للجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-98a) .

الحل :

١ - ايجاد ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$M_{gr} = 0 : C_v \cdot 6,00 - 15,0 \cdot 3,00 = 0 ; C_v = + 7,50 \text{ Mp}$$

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : C_v \cdot 16,00 + B_v \cdot 7,00 - 15,00 \cdot 13,00 = 0$$

$$B_v = + \frac{75}{7} \text{ Mp} \approx 10,7142 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v + C_v - 15,0 = 0 ; A_v = -3,2142 \text{ Mp}$$

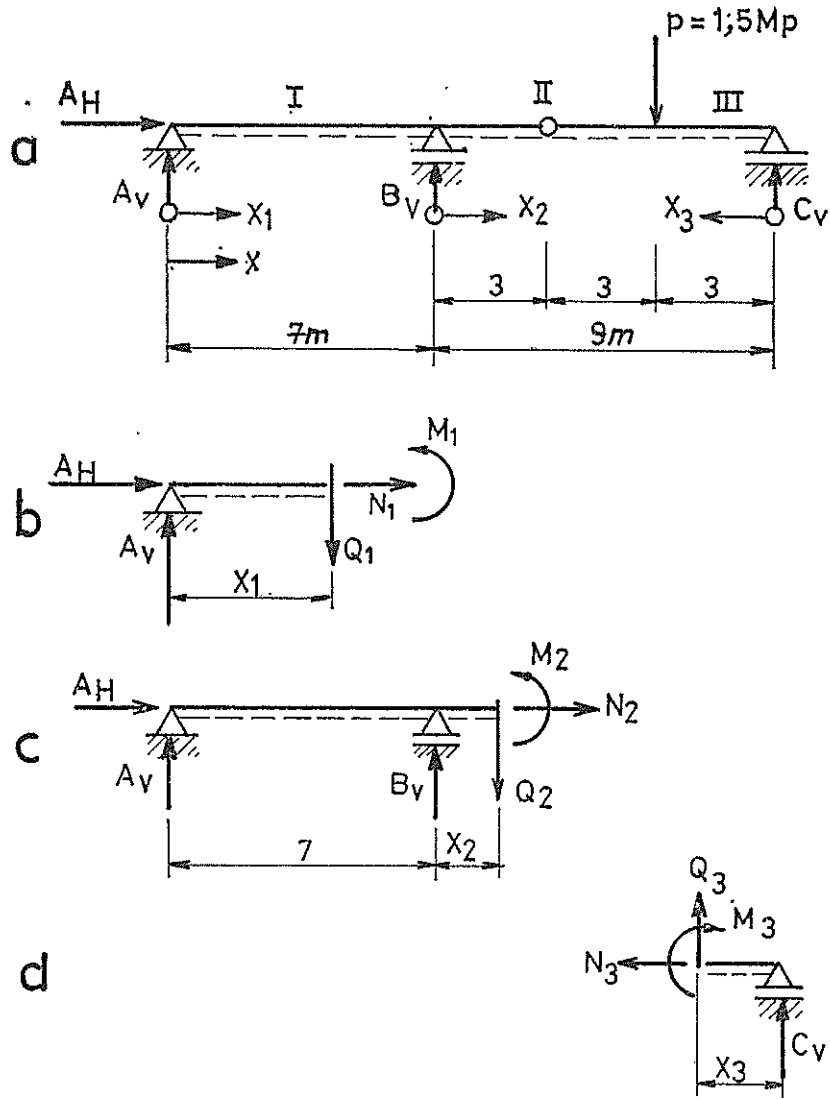
التدقيق :

$$M_{gl} = 0 : A_v \cdot 10 + B_v \cdot 3 = 0$$

بتبديل ردود أفعال المساند بقيمها يرى أن العلاقة محققة وهذا ما يؤكد صحة النتائج .

٢ - حساب قيم القطع :

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات .



شكل 2-98

المجال I : $(0 \leq x_1 \leq 7)$

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-98b) يتج :

$$\Sigma H = 0 : N_1 + A_H = 0 : N_1 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_1 - A_v = 0 : Q_1 = +A_v = -3.2142 \text{ MP} = -\frac{22.5}{7} \text{ MP}$$

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : M_1 - A_v x_1 = 0 : M_1 = A_v x_1 = -\frac{22.5}{7} x_1$$

$$x_1 = 0 : M_1 = 0$$

$$x_1 = 7 : M_1 = -22,5 \text{ Mpm}$$

باشتقاق معادلة عزم الانعطاف M_1 والحصول على القوة العرضية Q_1 يؤكد صحة النتيجة .

المجال II ($0 \leq x_2 \leq 6$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الابر (شكل 2-98c) يتج :

$$\Sigma H = 0 : N_2 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 - A_v - B_v = 0 : Q_2 = A_v + B_v$$

بتبديل قيم ردود افعال المساند في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على القوة العرضية :

$$Q_2 = -\frac{22,5}{7} + \frac{7,5}{7} = \frac{52,5}{7} = 7,5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M_2 - B_v \cdot x_2 - A_v \cdot (7,0 + x_2) = 0$$

$$M_2 = B_v x_2 + A_v (7,0 + x_2)$$

يعطي تبديل ردود افعال المساند في المعادلة الاخيرة عزم الانعطاف :

$$M_2 = -22,5 + \frac{52,5}{7} x_2$$

$$x_2 = 0 : M_2 = -22,5 \text{ Mpm}$$

$$x_2 = 6 : M_2 = +22,5 \text{ Mpm}$$

باشتقاق معادلة عزم الانعطاف بالنسبة للاحداثي x_2 يتم الحصول على تابع القوة العرضية وهذا يؤكد صحة النتيجة .

المجال III ($0 \leq x_3 \leq 3$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الاعمى (شكل 2-98d) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_3 + C_v = 0 : Q_3 = -C_v = -7,50 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{xz} = 0 : M_3 - C_v \cdot x_3 = 0 : M_3 = + C_v x_3 = 7,50 x_3$$

$$x_3 = 0 : M_3 = 0$$

$$x_3 = 3 : M_3 = 22,5 \text{ Mpm}$$

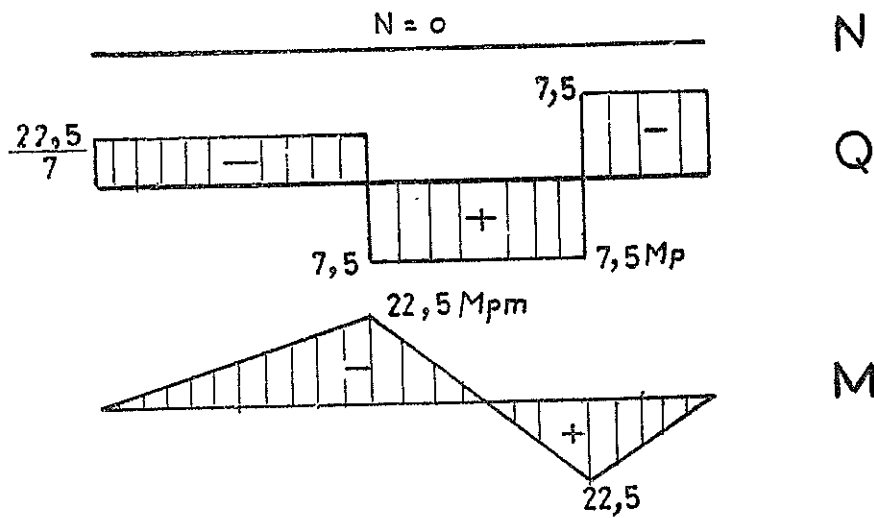
باشتقاق تابع عزم الانعطاف :

$$\frac{dM_3}{dx} = -\frac{dM_3}{dx_3} = -\frac{d}{dx_3} (C_v x_3) = -C_v = Q_3$$

تأكد صحة النتيجة .

٣ - رسم مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-99) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-99

مثال 54 :

المعطى : الجائز انفصلي الممثل في الشكل (2-100) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

تبلغ ردود أفعال المساند وقوى المفاصل القيم التالية :

$$G_{1v} = G_{2v} = \frac{R_2}{2} = 20,0 \text{ Mp}$$

$$A_v = \frac{1}{6,0} (P_1 \cdot 8,0 - R_1 \cdot 1,0 - G_1 \cdot 2,0) = 11,67 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{6,0} (-P_1 \cdot 2,0 + R_1 \cdot 7,0 + G_1 \cdot 8,0) = 33,33 \text{ Mp}$$

$$C_v = \frac{1}{6,0} (G_{2v} \cdot 9,0 + R_3 \cdot 7,5 + P_2 \cdot 2,0) = 68,75 \text{ Mp}$$

$$D_v = \frac{1}{6,0} (-G_{2v} \cdot 3,0 - R_3 \cdot 1,5 + P_2 \cdot 4,0) = 26,25 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع :

بسبب كون الجائز القضيبى مستقيم وبسبب كون المحولات المؤثرة شاقولية لذلك لا تتشكل فيه أية قوى ناظرية (قوى طولية) .

تبلغ القوة العرضية في جزئي الجائز الايسرين القيم التالية :

$$- 15,0 \text{ Mp}$$

$$- 15,0 + A_v = - 15,0 + 11,67 = - 3,33 \text{ Mp}$$

توزع القوة العرضية بين المسندين الوسطيين بشكل خطي وذلك ابتداء من القيمة :

$$- 3,33 + B_v = - 3,33 + 33,33 = 30,0 \text{ Mp}$$

وحتى القيمة :

$$30,0 - R_1 - R_2 - R_3 = 30,0 - 10,0 - 40,0 - 15,0 = - 35,0 \text{ Mp}$$

أما القوة العرضية بين المسندين الايمنين فتثبت بواسطة القيمتين :

$$- 35,0 + C_v = - 35,0 + 68,75 = + 33,75 \text{ Mp}$$

$$33,75 - P_2 = 33,75 - 60,00 = - 26,25 \text{ Mp}$$

تقع نقطة انعدام القوة العرضية بين المفاصل على بعد :

$$x_0 = \frac{G_{1,v}}{q_0} = \frac{20,0}{5,0} = 4,0 \text{ m}$$

لتحديد شكل عزم الانعطاف ينبغي حساب قيم العزوم في النقاط 1 , 2 , 3 , 4 , 5 والتي تبلغ قيمتها في تلك النقاط :

$$M_1 = - P_1 \cdot 2,0 = - 30,0 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = - P_1 \cdot 8,0 + A_v \cdot 6,0 = - 50,0 \text{ Mpm}$$

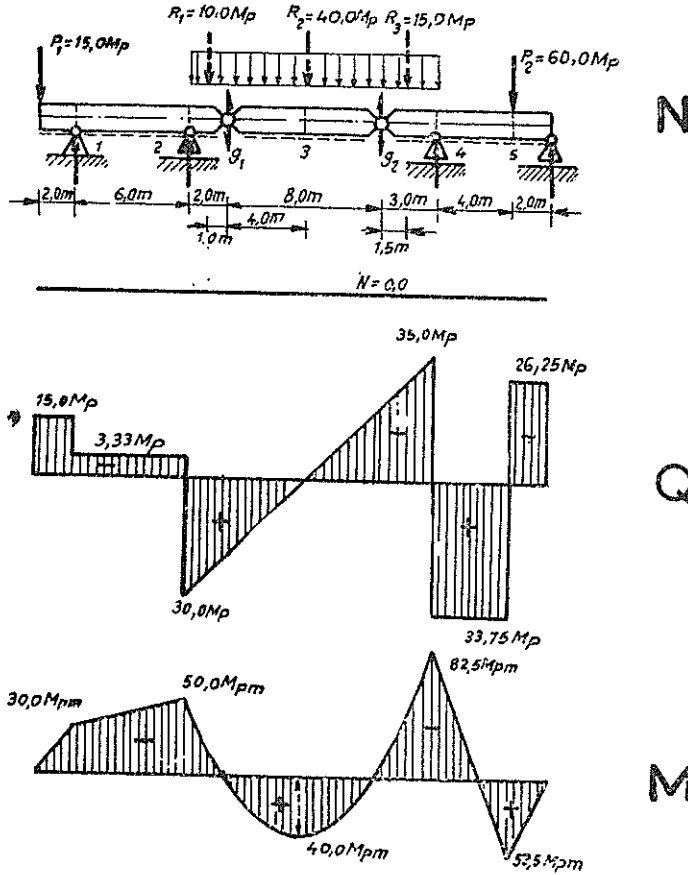
$$M_3 = G_{1,v} \cdot 4,0 - \frac{q_0 \cdot x_0^2}{2} = 40,0 \text{ Mpm}$$

$$M_4 = D_v \cdot 6,0 - P_2 \cdot 4,0 = - 82,5 \text{ Mpm}$$

$$M_5 = D_v \cdot 2,0 = 52,5 \text{ Mpm}$$

٣ - رسم خطوط قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-100) تمثيل خطوط قيم القطع .



شكل 2-100

٢ - ٧ - ٢ مفاصل الوصل لاتقع على مستقيم واحد :

يتبع فصيلة الجيزان المفصليّة التي لاتقع مفاصل الوصل فيها على مستقيم واحد ، الجائز ثلاثي المفصل والاطار ثلاثي المفصل والقوس ثلاثي المفصل .

α - أمثلة

مثال 55 :

القوس ثلاثي المفصل الممثل في الشكل (2-101 a) .

المعطى : محصلات القوى التي تؤثر على يمين ويسار القوس :

$$R_1 = 6000 \text{ kp} , \quad R_2 = 5000 \text{ kp}$$

وكذلك أيضاً الأبعاد والمقاييس التالية :

$$\alpha = 30^\circ ; \quad l_3 = 2 \text{ m} ; \quad l_6 = 2 \text{ m}$$

$$l_1 = 2 \text{ m} ; \quad l_4 = 5,5 \text{ m} ; \quad l_7 = 2 \text{ m}$$

$$l_2 = 3,5 \text{ m} ; \quad l_5 = 1,5 \text{ m} ; \quad l_8 = 3,5 \text{ m}$$

المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند بالطريقتين التحليلية والتخطيطة .

الحل :

١ - الطريق التحليلي :

بمعطى تعليل شروط التوازن على الجزء الأيسر من الشكل (2-101 b) ما يلي :

$$\sum V = 0 : A_v - R_1 \cos \alpha + G_v = 0$$

$$\sum H = 0 : A_H + R_1 \sin \alpha - G_H = 0$$

$$\sum M_a = 0 : R_1 l_5 \sin \alpha - R_1 l_1 \cos \alpha + G_H l_6 + G_v l_3 = 0$$

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن من الشكل (2-101 b) مايلى :

$$\Sigma V = 0 : -G_v - R_2 \cos \alpha + B_v = 0$$

$$\Sigma H = 0 : G_H - R_2 \sin \alpha - B_H = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : R_2 l_7 \sin \alpha + R_2 l_3 \cos \alpha + G_v l_4 - G_H l_8 = 0$$

بحل مجموعتي المعادلات يتم الحصول على قيم ردود أفعال المساند :

$$A_H = 2579 \text{ kp} ; B_H = 3079 \text{ kp} ; G_H = 5579 \text{ kp}$$

$$A_v = 4129 \text{ kp} ; B_v = 5397 \text{ kp} ; G_v = 1067 \text{ kp}$$

لتدقيق النتائج يمكن هنا ايضاً تطبيق شروط التوازن على الجائز ككل :

$$\Sigma H = 0 : A_H - B_H + R_1 \sin \alpha - R_2 \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - R_1 \cos \alpha - R_2 \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma M_b = 0 : -A_v \cdot (l_2 + l_4) - A_H \cdot (l_8 - l_6) + R_1 \cos \alpha \cdot (l_3 + l_2 - l_1) -$$

$$- R_1 \sin \alpha [l_8 - (l_6 - l_5)] + R_2 \sin \alpha \cdot l_7 + R_2 \cos \alpha \cdot l_3 = 0$$

$$M_{gr} = 0 : -B_H \cdot l_8 + B_v \cdot l_4 - R_2 \cos \alpha \cdot (l_4 - l_3) - R_1 \sin \alpha \cdot (l_8 - l_7) = 0$$

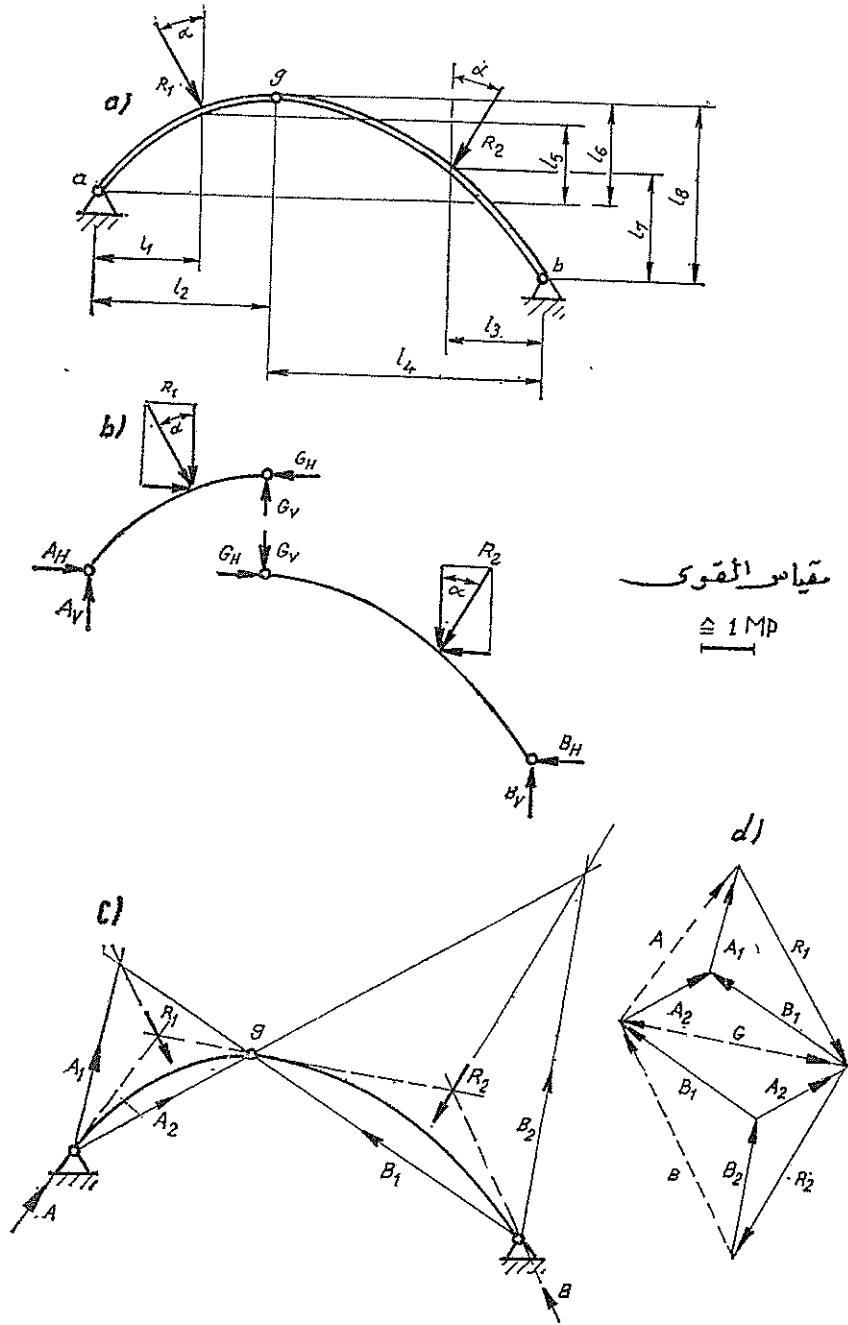
٢ - الطريق التخطيطي :

ليعتبر في البداية أن القوس ثلاثي المفصل يحمل بالقوة R_1 فقط ($R_2 = 0$) .

وبما أن عزم الانعطاف في المفصل g يساوي الصفر اذاً ينبغي أن يمر حامل قوة رد الفعل B_1 من نقطة التمثيل g (شكل 4-101c) وكذلك ينبغي ان يمر حامل القوة A_1 من نقطة B_1 مع R_1 . لقد تم في الشكل (2-101c) رسم مخطط القوى التابع لها .

بعد ذلك ليعتبر أن القوس يحمل بالقوة R_2 فقط . وبسبب انعدام العزم في النقطة g يلزم أن يمر حامل القوة A_2 من g كما ينبغي أن يمر حامل B_2 من نقطة تقاطع A_2 مع R_2 . أما ردود افعال المساند النهائية فتساوي عندئذ :

$$A = A_1 + A_2 ; B = B_1 + B_2$$



شكل 2-101

عندما ترتب مضلعات القوى A_1, B_1, R_1 وكذلك A_2, B_2, R_2 بحيث تشكل القوى R_1, R_2 مع بعضها تنابها شعاعياً ، عندئذ يتم تحقيق علاقة الجمع السابقة بنقل القوى A_1, B_1 نقلاً موازياً فقط .

التدقيق :

تشكل القوى A, G, R_1 وكذلك القوى B, G, R_2 مضلعات مغلقة للقوى (مضلعات قوى مغلقة) ، مما يحتم على كل منها ان تمر في مخطط المكان من نقطة واحدة .
عندما ترسم في مخطط المكان موازيات لحوامل القوى A, B, G الموجودة في مضلع القوى ، ينبغي ان تقاطع هذه الموازيات مع حامل كل من القوتين R_1 وكذلك R_2 في نقطة واحدة .
لقد تم رسم ذلك في الشكل c 2-101 بشكل منقطع .

مثال 56 :

المعطى : P, l . نصف قطر البكرة صغير ويمكن اهماله .

المطلوب : حساب ردود افعال المساند وقوى المفاصل وقيم القطع للجوائز الممثل في الشكل (2-102) .

الحل :

١ - ردود افعال المساند وقوى المفاصل :

بتطبيق شروط التوازن (الطريقة الثانية) على الجزء العلوي من الشكل (2-102 b) ينتج :

$$\sum V = 0 : - A_v + G_v - \frac{4}{5} P - P = 0$$

$$\sum H = 0 : A_h + G_h - \frac{3}{5} P = 0$$

$$\sum M_g = 0 : 3A_v \cdot l - 3 \left(\frac{4}{5} + 1 \right) P \cdot l = 0$$

وبتطبيق شروط التوازن على الجزء السفلي من الشكل (2-102 b) يتم الحصول على العلاقات التالية:

$$\sum V = 0 : - G_v + \frac{4}{5} P + B_v = 0$$

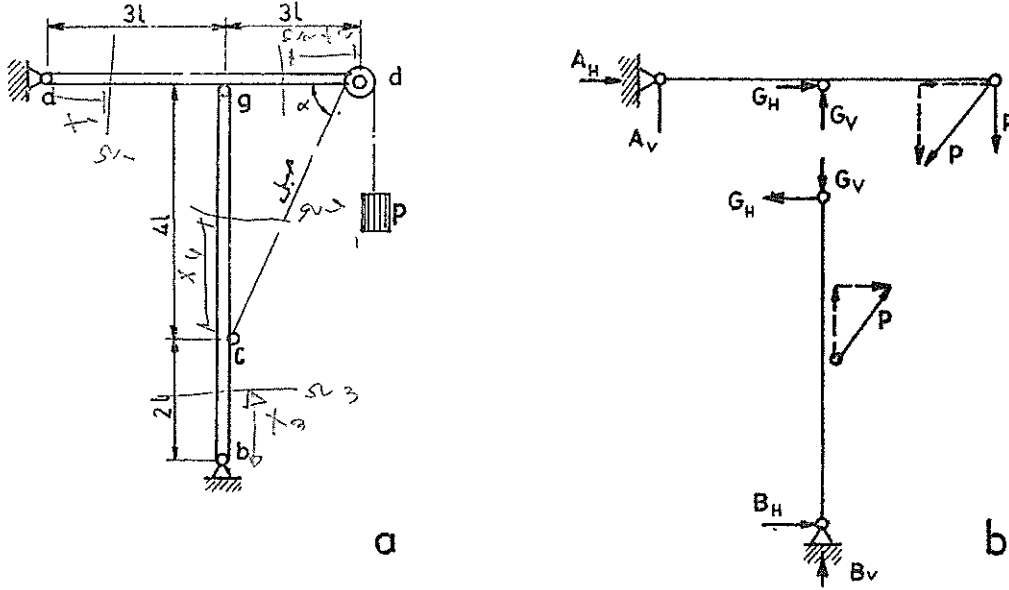
$$\sum H = 0 : - G_h + \frac{3}{5} P + B_h = 0$$

$$\sum M_g = 0 : \frac{3}{5} P \cdot 4l + 6B_h \cdot l = 0$$

النتيجة : محل مجموعتي المادلات يتم الحصول على المطلوب :

$$A_H = \frac{2}{5} P ; B_H = -\frac{2}{5} P ; G_H = \frac{1}{5} P$$

$$A_V = \frac{9}{5} P ; B_V = \frac{14}{5} P ; G_V = \frac{18}{5} P$$



شكل 2-102

يمكن ايضاً الحصول على ردود افعال المساند بتطبيق شروط التوازن على الجائز ككل (شكل 2-101) (باستخدام الطريقة الاولى) :

$$M_{gu} = 0 : -B_H \cdot 6l - P \cdot \frac{3}{5} \cdot 4l = 0$$

$$B_H = -\frac{12}{30} P = -\frac{2}{5} P$$

$$\Sigma M_a = 0 : -B_V \cdot 3l - B_H \cdot 6l + P \cdot 6l = 0$$

$$B_V = 2P - 2B_H = 2P + \frac{4}{5} P = \frac{14}{5} P$$

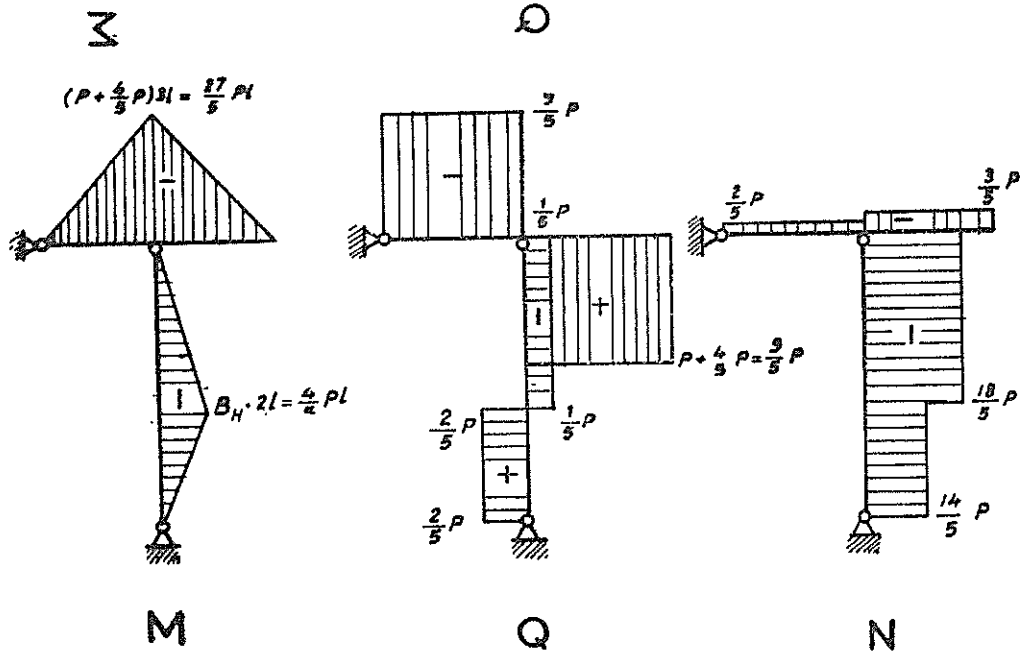
$$\Sigma H = 0 : A_H + B_H = 0$$

$$A_H = -B_H = +\frac{2}{5} P$$

$$\Sigma V = 0 : -A_v + B_v - P = 0$$

$$A_v = B_v - P = \frac{14}{5} P - P = \frac{9}{5} P$$

لقد تم رسم مخططات قيم القطع في الشكل (2-103) .



شكل 2-103

٢ - ٨ الجيزان الاطارية (الاطارات)

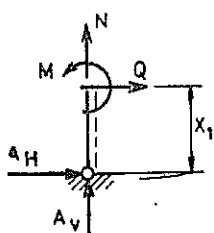
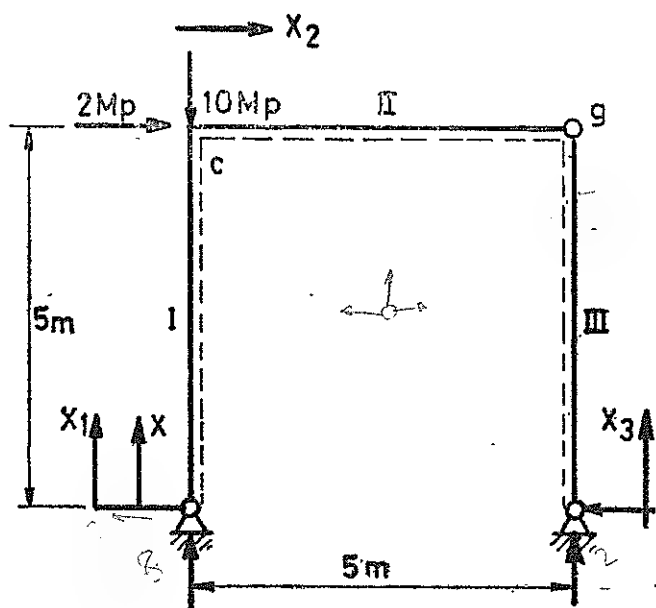
الاطارات هي الانشاءات التي يكون محورها الاوسط مضلعاً . ويطلق اسم الاطارات البسيطة على النوع الذي يستند على مسندين مفصليين ، احدهما من النوع الثابت الذي لايسمح بالانتقال (مسند ثابت) والثاني من النوع المتحرك الذي يسمح بالحركة الانتقالية باتجاه ما (مسند متحرك) ويكون رد الفعل عنده عمودياً على اتجاه الحركة . ويسمى هذا النوع من الاستناد بالاستناد البسيط أسوة بما سبق في حالة الجيزان البسيطة .

يطلق اسم الاطار ثلاثي المفصل على الاطار الذي يستند خارجياً على مسندين مفصليين من النوع الثابت الذي لا يسمح بالحركة الانتقالية والذي يحوي ايضاً بداخله عند احد القطوع العمودية

مفصل داخلي من النوع الذي يسمح بالدوران ولا يسمح بالحركة الانتقالية وذلك بخلاف الجيزان المفصلية المركبة التي قد يكون المفصل الداخلي فيها من النوع الذي يسمح بالحركة الانتقالية .

مثال 57 :

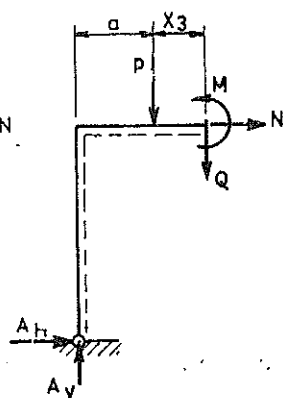
جائز اطاري ثلاثي المفصل (إطار ثلاثي المفصل) (شكل 2-104) .
المطلوب : إيجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .



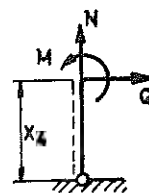
a



b



c



d

شكل 2-104

الحل :

١ - ردود افعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن وشروط المفصل (شرط انعدام العزم في المفصل) يتم الحصول على ردود
أفعال المساند المطلوبة :

$$M_{gr} = 0 : B_H = 0$$

$$\Sigma M_v = 0 : B_v \cdot 5 - 2.5 = 0 : B_v = 2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - 10 = 0 : A_v = 8 \text{ Mp}$$

$$\Sigma H = 0 : A_H + 2 - B_H = 0 : A_H = -2 \text{ Mp}$$

٢ - إيجاد معادلات قيم القطع .

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات . بعد تثبيت الاحداثيات يمكن اجراء القطوع اللازمة .

المجال I ($0 \leq x_1 \leq 5$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع السفلي (شكل a 2-104) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : Q_1 = -A_H = +2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 = -A_v = -8 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : M_1 = -A_H x_1 = 2 x_1$$

$$x_1 = 0 : M_1 = 0$$

$$x_1 = 5 : M_1 = 10 \text{ Mpm}$$

المجال II ($0 \leq x_2 \leq 5$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الاسر شكل (b 2-104) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_2 = -A_H - 2.0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = -10 + A_v = -2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M_2 = -10 x_2 + A_v x_2 - A_H \cdot 5 = -2 x_2 + 10$$

$$x_2 = 0 : M_2 = 10 \text{ Mpm}$$

$$x_2 = 5 : M_2 = 0$$

المجال III ($0 \leq x_2 \leq 5$) :

ان المجال III هو عبارة عن مسند فوسي ولعدم تأثير أية قوة خارجية عمودية على محوره يمكن فوراً القول بأن $Q_3 = 0$, $M_3 = 0$. بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل c 2-104) تتأكد صحة العلاقات السابقة ويعطى علاوة على ذلك المعادلة التالية :

$$\Sigma H = 0 : Q_3 = B_H = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_3 = - B_H x_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : N_3 = - B_V = - 2 \text{ Mp}$$

التدقيق :

باقتطاع العقدة c (شكل d 2-104) ثم تطبيق شروط التوازن عليها ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N_2 + 2 - Q_1 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 + 10 + N_1 = 0$$

$$\Sigma M_c = 0 : M_1 = M_2$$

بتبدل القيم التي تم الحصول عليها يرى ان العلاقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

باقتطاع العقدة g (شكل e 2-104) ثم تطبيق شروط التوازن عليها ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N_2 = Q_3$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = N_3$$

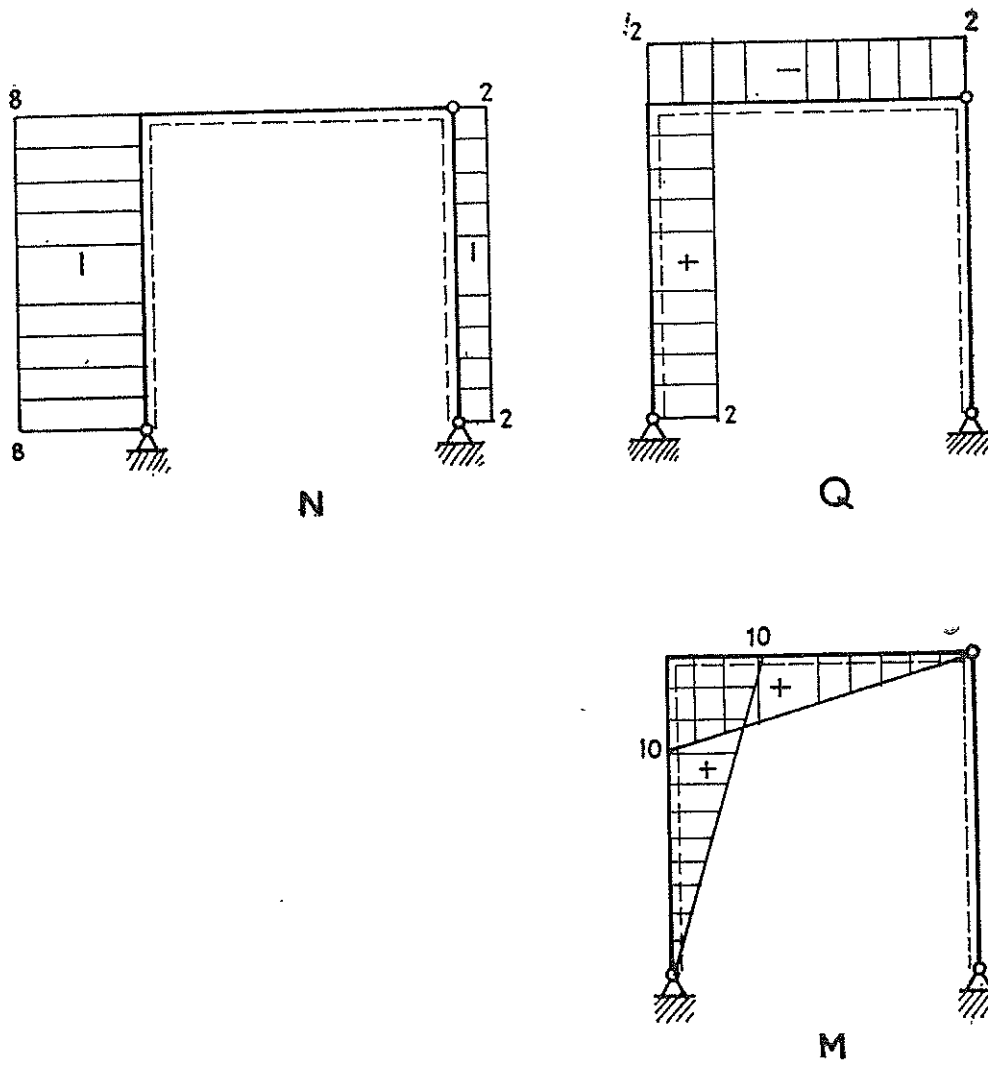
بتبدل القيم التي تم الحصول عليها يرى أن العلاقات السابقة محققة وهذا يؤكد صحتها .

٣ - رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-105) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 58 :

المطلوب : إيجاد قيم القطع للجائز الاطاري الممثل في الشكل (2-106) .



شكل 2-105

(يهمل اثناء الحساب الوزن الذاتي للانشاء) .

الحل :

١ - حساب ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$\sum H = 0 : A_H = -P_2 = -2 \text{ Mp}$$

$$\sum M_a = 0 : B_v \cdot 2 - P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 2 = 0 : B_v = 2 P_1 + P_2$$

$$B_v = 4 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P_1 = 0 : A_v = P_1 - B_v$$

$$A_v = -3 \text{ Mp}$$

التدقيق :

$$\Sigma M_d = 0 : A_v \cdot 4 + B_v \cdot 2 - A_H \cdot 2 = 0$$

بتبديل ردود الافعال بقيمها المحسوبة يرى ان العلاقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

٢ - حساب قيم القطع

يتألف الجائز من ثلاثة مجالات . بعد تثبيت الاحداثيات يمكن اجراء القطوع اللازمة .

المجال I ($0 \leq x_1 \leq 2$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل c 2-106) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : Q_1 = -A_H = +2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 = -A_v = +3 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : M_1 = -A_H x_1 = 2 x_1$$

تمثل هذه المعادلة مستقيما ميله +2 ويمر من مركز الاحداثيات .

$$x_1 = 0 : M_1 = 0$$

$$x_1 = 2 : M_1 = 4 \text{ Mpm}$$

المجال II ($0 \leq x_2 \leq 2$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل d 2-106) العلاقات التالية :

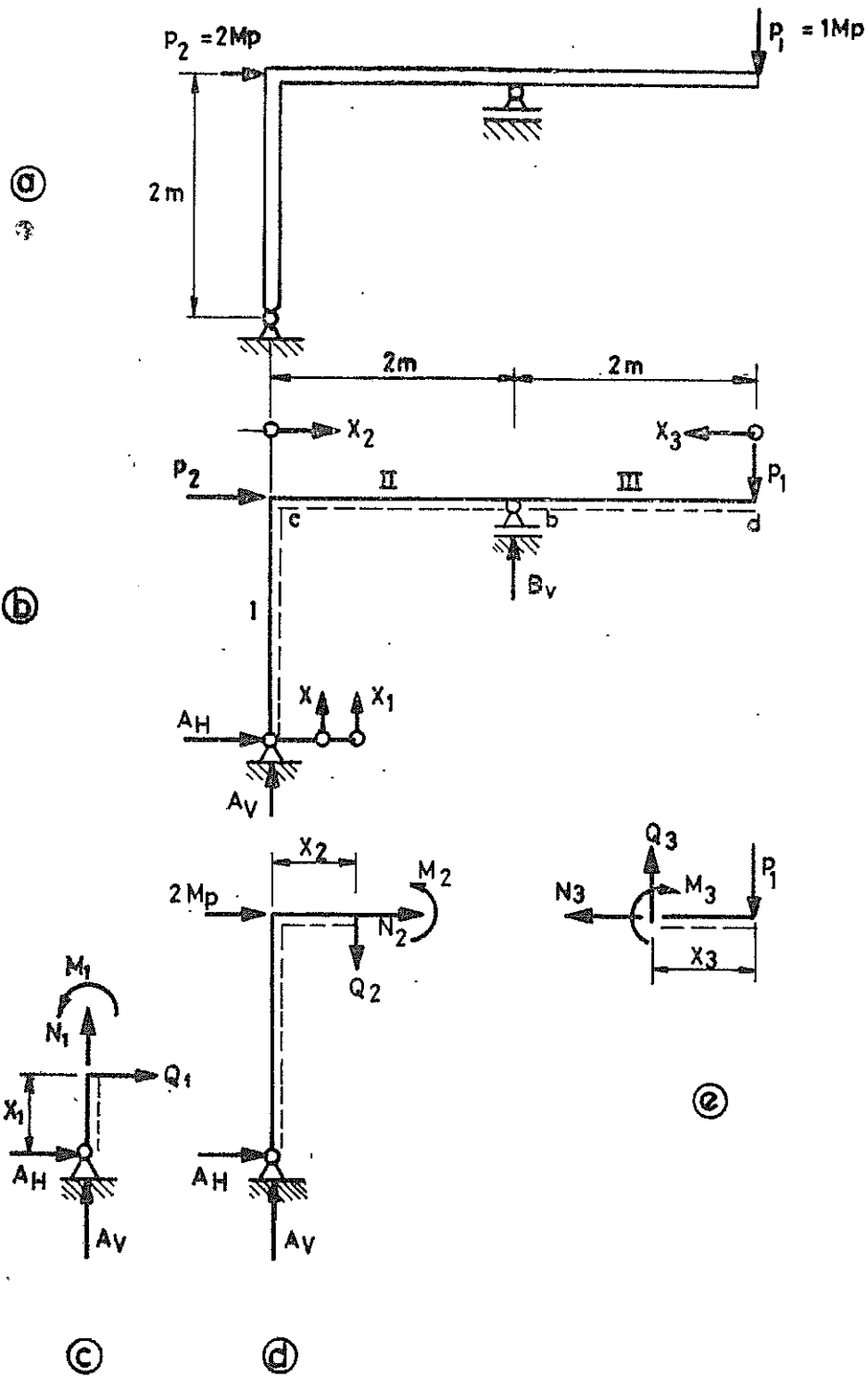
$$\Sigma H = 0 : N_2 = -A_H - 2 = +2 - 2 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = A_v = -3 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M_2 = A_v \cdot x_2 - A_H \cdot 2 = -3 x_2 + 4$$

$$x_2 = 0 : M_2 = 4 \text{ Mpm}$$

$$x_2 = 2 : M_2 = -2 \text{ Mpm}$$



شکل 2-106

المجال III ($0 \leq x_3 \leq 2$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل e 2-106) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_3 = P_1 = 1 \text{ Mp}$$

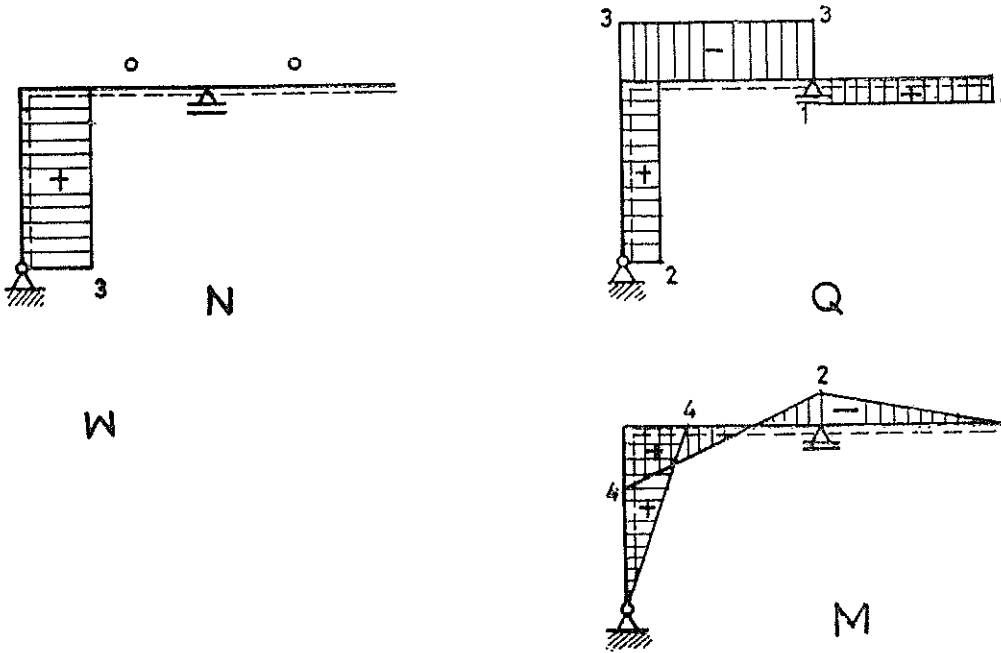
$$\Sigma M_{x_3} = 0 : M_3 = -P_1 x_3 = -x_3$$

$$x_3 = 0 : M_3 = 0$$

$$x_3 = 2 : M_3 = -2 \text{ Mpm}$$

٣ - رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-107) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-107

مثال 59 :

المطلوب : إيجاد قيم القطع للجائز الممثل في الشكل (2-108) .

الحل :

١ - حساب ردود افعال المساند

يعطي تطبيق شروط التوازن العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot l - P \cdot \frac{l}{3} = 0 : B_v = \frac{1}{3} P$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v - P = 0 ; A_v = \frac{2}{3} P$$

٢ - إيجاد معادلات قيم القطع

المجال I ($0 \leq x_1 \leq 2l/3$) :

بتطبيق شروط التوازن على القطع الایسر السفلي (شكل 2-108 c) يتج :

$$\Sigma H = 0 : Q_1 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : N_1 = -A_v = -\frac{2}{3} P$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_1 = -A_H x_1 = 0$$

المجال II ($2l/3 \leq x_2 \leq l$) :

بتطبيق شروط التوازن على القطع السفلي (شكل 2-108 d) يتج :

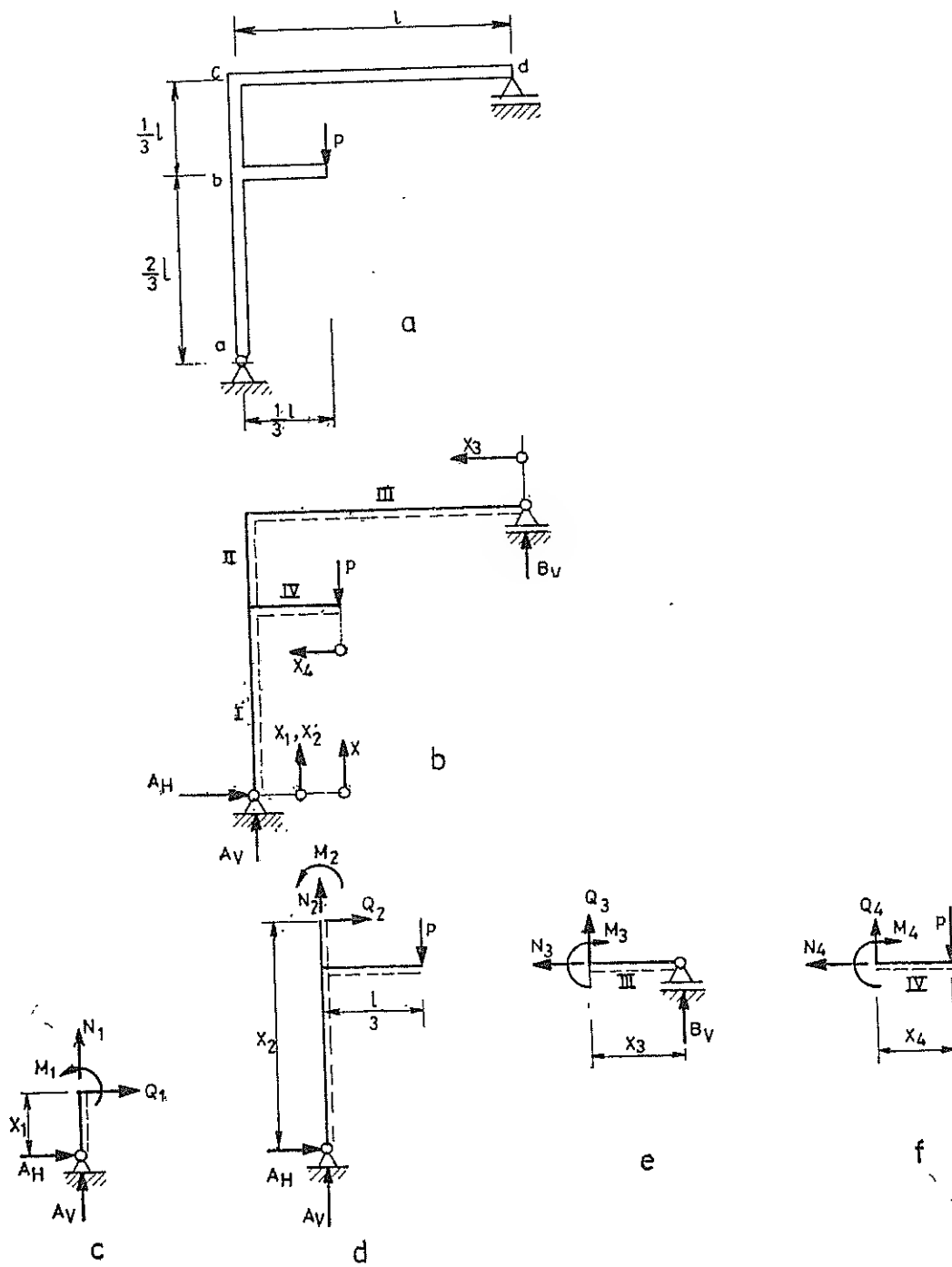
$$\Sigma H = 0 : Q_2 = -A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : N_2 = P - A_v = \frac{1}{3} P$$

$$\Sigma M_{x_3} = 0 : M_2 = P \cdot \frac{l}{3} - A_H \cdot x_2 = P \cdot \frac{l}{3}$$

المجال III ($0 \leq x_3 \leq l$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الایمن (شكل 2-108 e) المعادلات التالية :



شكل 2-108

$$\Sigma H = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_3 = -B_v = -\frac{1}{3}P$$

$$\Sigma M_{x_3} = 0 : M_3 = B_v \cdot x_3 = \frac{1}{3}P x_3$$

$$x_3 = 0 : M_3 = 0$$

$$x_3 = l : M_3 = \frac{1}{3}Pl$$

المجال IV ($0 \leq x_4 \leq l/3$) :

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل f 2-108) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N_4 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_4 = +P$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_4 = -P x_4$$

$$x_4 = 0 : M_4 = -P \cdot 0$$

$$x_4 = \frac{1}{3}l : M_4 = -\frac{1}{3}Pl$$

٣ - رسم مخططات قيم القطع .

لقد تم في الشكل (2-109) رسم مخططات قيم القطع .

مثال 60 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع في الجائز الممثل في الشكل (2-110) .

الحل :

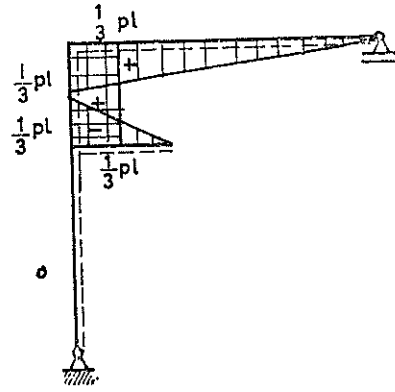
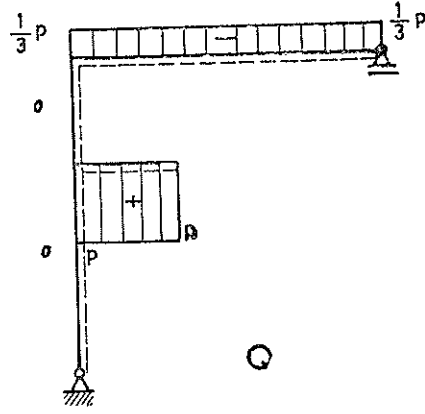
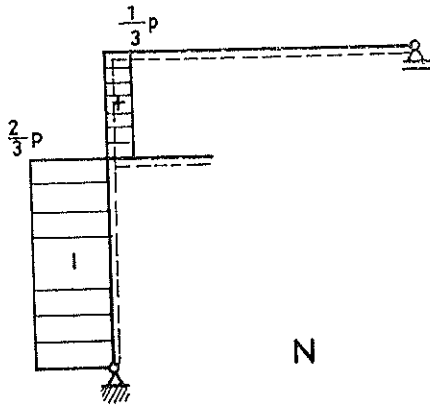
١ - حساب ردود افعال المساند :

يتم حساب ردود افعال المساند بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل :

$$\Sigma H = 0 : A_H + 6 = 0 : A_H = -6 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot 10 - 6 \cdot 2 = 0 : B_v = 1,2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + B_v = 0 ; A_v = -B_v = -1,2 \text{ Mp}$$



شكل 2-109

التدقيق :

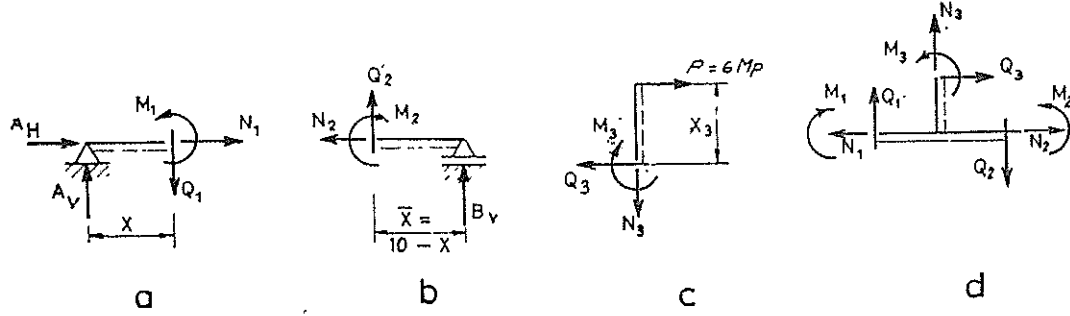
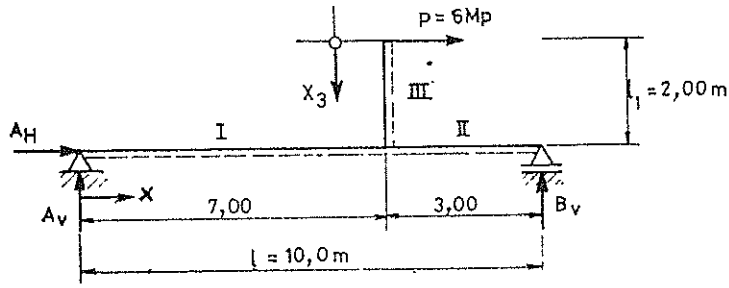
$$\sum H_c = 0 : A_v \cdot 7 - B_v \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 0$$

من النتائج يتبين أن :

- A_H الفعلية هي بعكس الاتجاه المرسوم في الشكل (2-110) وذلك لكون النتيجة سالبة .
- A_v الفعلية هي بعكس الاتجاه المرسوم في الشكل (2-110) وذلك لكون النتيجة سالبة .
- B_v الفعلية هي بالاتجاه المرسوم في الشكل (2-110) وذلك لكون النتيجة موجبة .

٢ - حساب قيم القطع (M , Q , N) :

تثبيت الاحداثيات الموجبة : تختار المنطقة المخططة في الجزء الاقوي تحت محور القضيبي وفي الجزء الشاقولي على يمين القضيبي . أما محاور x فتثبت في الجزء الاقوي ابتداء من المسند الثابت متجهة نحو اليمين وفي الجزء الشاقولي تثبت في نهايته العليا متجهة نحو الاسفل .



شكل 2-110

تحديد المجالات : يحتوي الجائز على ثلاثة مجالات .

المجال I ($0 \leq x \leq 7$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل a 2-110) ينتج :

$$\sum H = 0 : N_1 = -A_H = + 6 \text{ Mp}$$

$$\sum V = 0 : Q_1 = + A_v = - 1,2 \text{ Mp}$$

$$\sum M_x = 0 : M_1 = A_v \cdot x = - 1,2x \text{ Mpm}$$

$$x = 0 : M_1 = 0$$

$$x = 7 : M_1 = - 8,4 \text{ Mpm}$$

التدقيق :

$$\frac{dM}{dx} = - 1,2 = Q$$

المجال II ($7 \leq x \leq 10$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل b 2-110) المعادلات التالية :

$$\sum H = 0 : N_2 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_2 = -B = -1,2 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_2 = B \cdot \bar{x} = 1,2 \bar{x} = 1,2 (10 - x)$$

$$x = 7 ; M_2 = 3,6 \text{ Mpm}$$

$$x = 10 : M_2 = 0$$

التدقيق :

$$\frac{dM}{dx} = -1,2 = Q$$

المجال III ($0 \leq x_3 \leq 2$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الاعلى (شكل c 2.110) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : Q_3 = + 6 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : N_3 = 0$$

$$\Sigma M_{x_3} = 0 : M_3 = -6 \cdot x_3$$

$$x_3 = 0 ; M_3 = 0$$

$$x_3 = 2 ; M_3 = - 12 \text{ Mpm}$$

التدقيق :

$$\frac{dM_3}{dx} = - \frac{dM_3}{dx_3} = + 6$$

باقتطاع المقعدة الصلبة (شكل d 2-110) وتطبيق شروط التوازن عليها ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N_1 - Q_3 - N_2 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : Q_1 + N_3 - Q_2 = 0$$

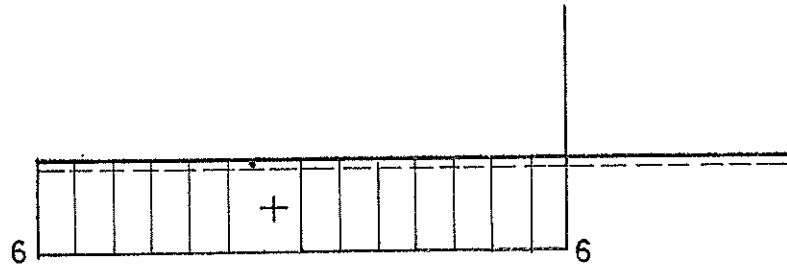
$$\Sigma M_c = 0 : M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

بتعويض قيم القطع المحسوبة يرى ان المعادلات السابقة محققة وهذا يؤكد صحة النتائج .

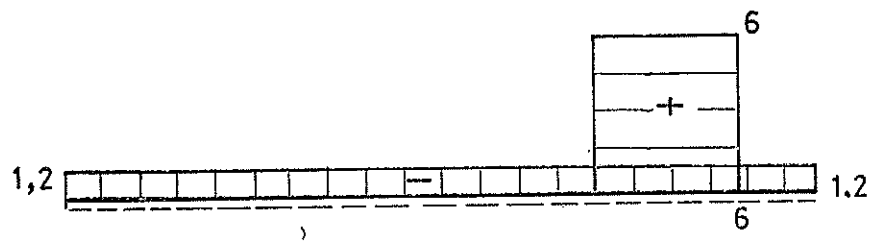
٣ - رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-111) تمثيل مخططات قيم القطع .

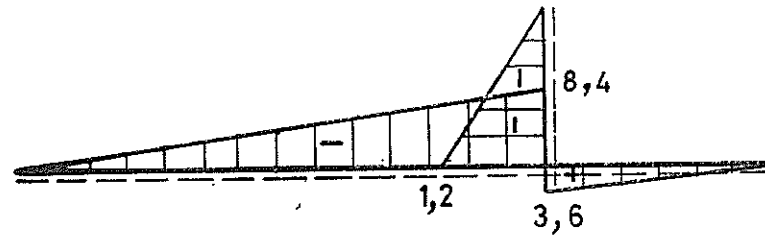
N



Q



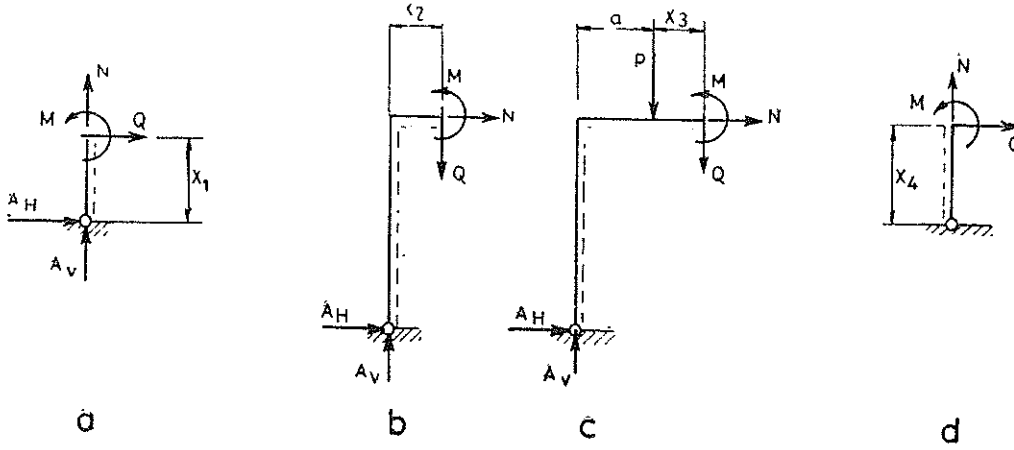
M



شكل 2-111

مثال 61 :

المطلوب : ايجاد قيم القطع للجائز الاطاري ثلاثي المفصل الممثل في الشكل (2-112) .



شكل 2-112

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم حساب ردود أفعال المساند . هكذا :

$$\sum H = 0 : A_H - B_H = 0$$

$$\sum M_A = 0 : B_V \cdot l - P \cdot a = 0$$

$$\sum V = 0 : A_V + B_V - P = 0$$

$$M_{gr} = 0 : B_V \cdot \frac{l}{2} - B_H \cdot h = 0$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$A_V = P \frac{b}{l} ; A_H = B_H = P \frac{a}{2h} ; B_V = P \frac{a}{l}$$

لتدقيق النتيجة يمكن استخدام شرط إنعدام العزوم حول النقطة g :

$$\sum M_g = 0 : B_V \cdot \frac{l}{2} - A_V \cdot \frac{l}{2} + A_H \cdot h - B_H \cdot h + P \left(\frac{l}{2} - a \right) = 0$$

٢ - حساب قيم القطع

المجال I ($0 \leq x_1 \leq h$) :

بتطبيق شروط التوازن على القطع السفلي الأيسر (شكل 2-112 a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H + Q = 0 : Q = -P \frac{a}{2h} = \text{const.}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + N = 0 : N = -P \frac{b}{l} = \text{const.}$$

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : A_H \cdot x_1 + M = 0 : M = -P \frac{a}{2h} x_1$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف خطاً مستقيماً ميله $-P \frac{a}{2h}$ وغير من مركز الاحداثيات .
المجال II $(0 \leq x_2 \leq a)$:

يمطي تطبيق شروط التوازن على القطع الایسر (شكل 2-112 b) المعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : N + A_H = 0 : N = -P \frac{a}{2h} = \text{const.}$$

$$\Sigma V = 0 : Q - A_v = 0 : Q = P \frac{b}{l} = \text{const.}$$

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M + A_H \cdot h - A_v \cdot x_2 = 0 : M = P \frac{b}{l} x_2 - P \frac{a}{2}$$

تمثل معادلة عزم الانعطاف خطاً مستقيماً ميله $P \frac{b}{l}$ ولا يمر من مركز الاحداثيات .
المجال III $(0 \leq x_3 \leq b)$:

بتطبيق شروط التوازن على القطع الایسر (شكل 2-112 c) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : N + A_H = 0 : N = -P \frac{a}{h} = \text{const.}$$

$$\Sigma V = 0 : Q + P - A_v = 0 : Q = \frac{P(b-l)}{l} = \text{const.}$$

$$\Sigma M_{x_3} = 0 : M + P \cdot x_3 + A_H \cdot h - A_v \cdot (a + x_3) = 0$$

$$M = P \left(\frac{b}{l} - \frac{a}{2} \right) + P \left(\frac{b}{l} - 1 \right) x_3$$

تمثل هذه المعادلة خطاً مستقيماً ميله $P(-1 + b/l)$ ولا يمر من مركز الاحداثيات .

لا يحدد المفصل في هذه الحالة مجالا جديداً . (وذلك لوقوع القضيبين المتلاقين فيه على امتقامة واحدة)

المجال IV $(0 \leq x_4 \leq h)$:

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الأيمن السفلي (شكل 2-112 d) العلاقات التالية :

$$\Sigma H = 0 : Q - B_H = 0 : Q = P \frac{a}{2h} = \text{const}$$

$$\Sigma V = 0 : N + B_V = 0 : N = -P \frac{a}{l} = \text{const}$$

$$\Sigma M_{x_4} = 0 : M + B_H \cdot x_4 = 0 : M = -P \frac{a}{2h} x_4$$

تمثل العلاقة الأخيرة خطأً مستقيماً ميله $-P \frac{a}{2h}$ ويعبر من مركز الاحداثيات .

٣ - رسم مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-113) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 62 :

إطار ثلاثي المفصل (شكل 2-114) .

المطلوب : حساب قيم القطع ورسم مخططاتها .

الحل :

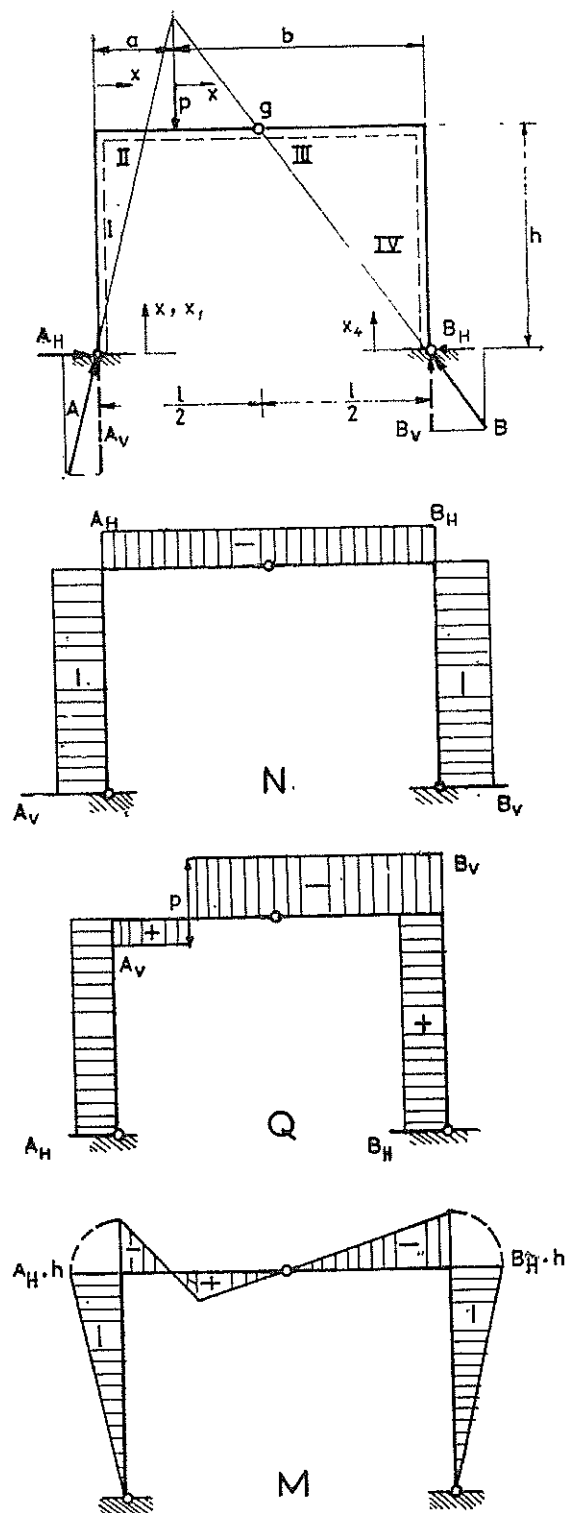
١ - ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم حساب ردود أفعال المساند :

$$\Sigma M_a = 0 : B_v \cdot 6 - 4 = 0 : B_v = \frac{2}{3} M_p$$

$$\Sigma V = 0 : A_v - B_v = 0 : A_v = \frac{2}{3} M_p$$

$$M_{gl} = 0 : A_v \cdot 3,0 - A_H \cdot 4,0 = 0 : A_H = \frac{1}{2} M_p$$



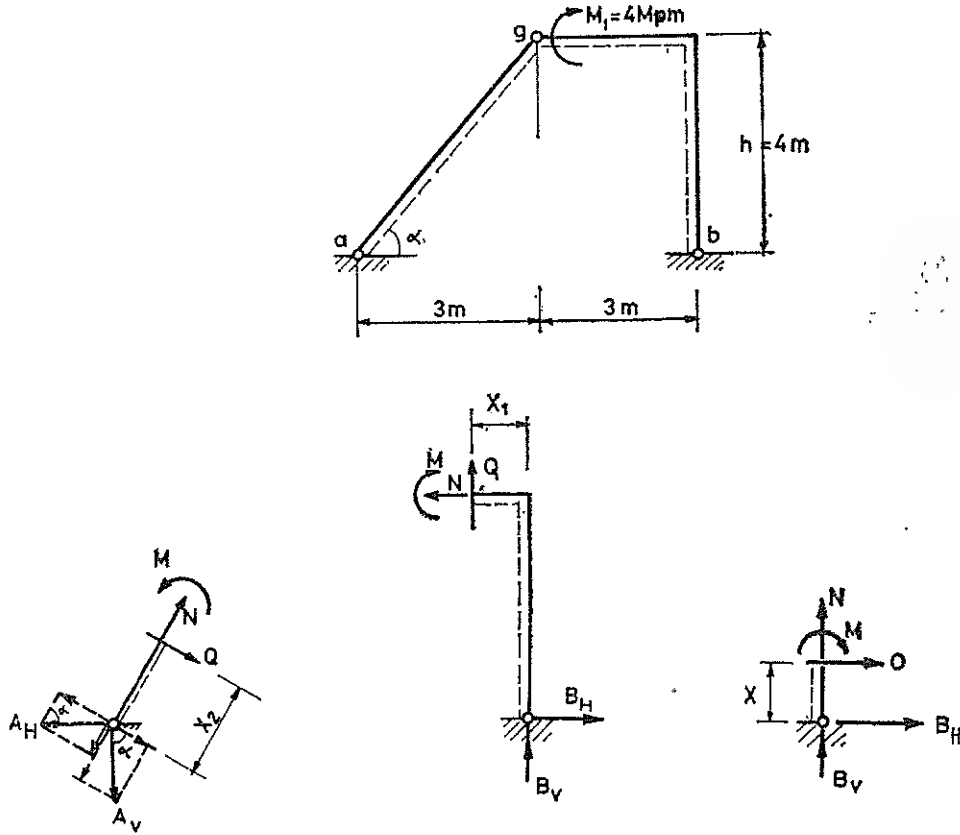
شکل 2-113

$$\Sigma H = 0 : B_H - A_H = 0 : B_H = \frac{1}{2} M_p$$

التدقيق :

لتدقيق قيم ردود افعال المساند يطبق شرط توازن العزوم بالنسبة لنقطة التماس g :

$$\Sigma M_g = 0 : B_v \cdot 3,0 + A_v \cdot 3,0 + B_H \cdot 4,0 - A_H \cdot 4,0 - 4 = 0$$



شكل 2.114

٢ - حساب قيم القطع :

يتألف الجائز الاطاري (شكل 2-114) من ثلاثة مجالات .

المجال I ($0 \leq x_1 \leq 5 \text{ m}$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر (شكل 2-114) ينتج :

$$\sum M_{x_1} = 0 : M + A_v \cos \alpha - A_H \sin \alpha \cdot x_1 = 0$$

$$M = (A_v \cos \alpha - A_H \sin \alpha) x_1 = 0$$

(القضيب متمفصل من كلا طرفيه ولا تؤثر داخله حمولات خارجية ، لذا لا يحتوي إلا قوة
ناظمية ، ويمكن هنا تسميته مسنداً نويسياً) .

$$\sum P_{zv} = 0 : Q + A_v \cos \alpha - A_H \sin \alpha = 0$$

$$Q = A_H \sin \alpha - A_v \cos \alpha = 0$$

$$\sum P_{xv} = 0 : N - A_v \sin \alpha - A_H \cos \alpha = 0$$

$$N = A_v \sin \alpha + A_H \cos \alpha = + \frac{5}{6} M_p = \text{const.}$$

المجال II ($0 \leq x_2 \leq 3m$) :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايمن (شكل 2-114) ينتج :

$$\sum H = 0 : N - B_H = 0 : N = \frac{1}{2} M_p = \text{const}$$

$$\sum V = 0 : Q + B_v = 0 : Q = - \frac{2}{3} M_p = \text{const} .$$

$$\sum M_{x_2} = 0 : M - B_v \cdot x_2 - B_H \cdot 4 = 0 : M = 2 + \frac{2}{3} x_2$$

تمثل العلاقة الاخيرة معادلة خط مستقيم ميله 2/3 ولا يمر من مركز الاحداثيات .

المجال II ($0 \leq x_3 \leq 4m$) :

يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-114) المعادلات التالية :

$$\sum H = 0 : Q + B_H = 0 : Q = - \frac{1}{2} M_p = \text{const}$$

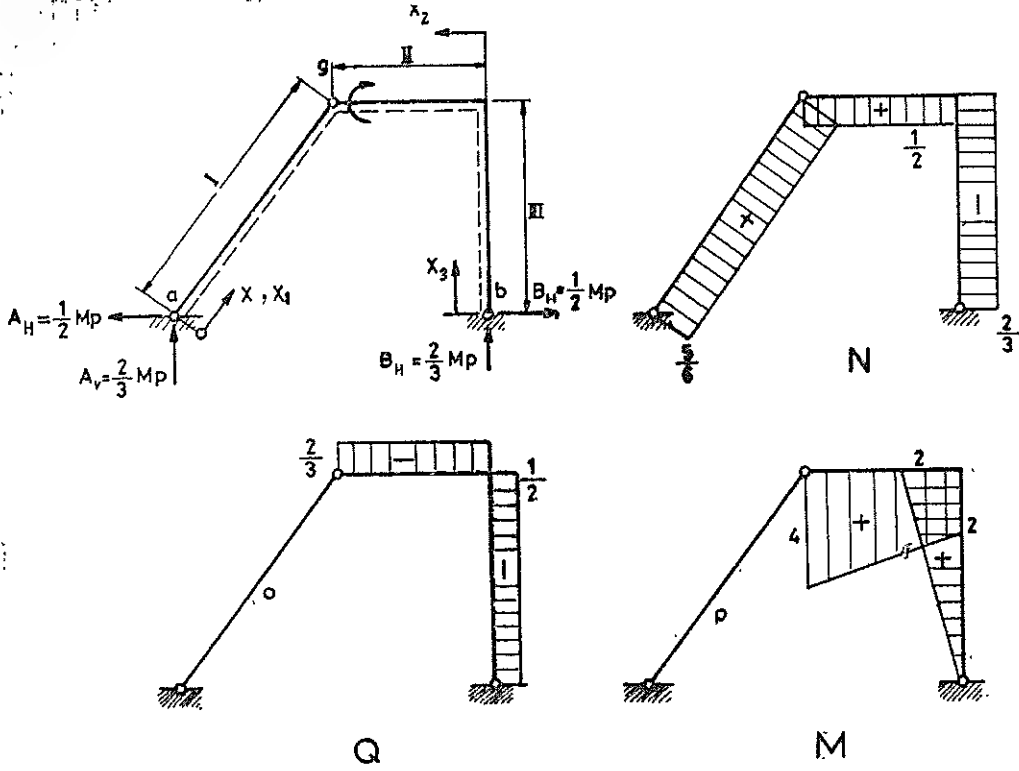
$$\sum V = 0 : N + B_v = 0 : N = - \frac{2}{3} M_p = \text{const}$$

$$\sum M_{x_3} = 0 : M - B_H \cdot x_3 = 0 : M = \frac{1}{2} x_3$$

تمثل العلاقة الأخيرة معادلة خط مستقيم ميله $1/2$ ويعبر من مركز الاحداثيات .

٣ - رسم مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-115) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-115

مثال 63 :

جائر إطاري بسيط (شكل 2-116) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود افعال المساند .

تبلغ ردود افعال المساند القيم التالية :

$$A_H = 0$$

$$A_V = \frac{2}{a} \left[P \cdot a + p_0 \frac{a^2}{2} + q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{4} a \right] = 2P + p_0 a + \frac{3}{4} q_0 a$$

$$B_V = \frac{2}{a} \left[-P \frac{a}{2} - q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \right] = -P - q_0 \frac{a}{4}$$

٢ - قيم القطع:

لا تتشكل في الجائز قوة ناظرية إلا في الاجزاء الشاقولية وقيمتها هناك تبلغ :

$$N = - \left(A_V - q_0 \frac{a}{2} \right) = - \left(2P + p_0 a + q_0 \frac{a}{4} \right)$$

أو كذلك :

$$N = -B = P + q_0 \frac{a}{4}$$

تأخذ القوة العرضية في الجزء الافقي العلوي من الجائز شكلاً خطياً اما قيمتها فتبلغ عند النهايات :

$$Q_3 = A_V - P - q_0 \frac{a}{2} = P + p_0 a + q_0 \frac{a}{4}$$

و

$$Q_4 = P + q_0 \frac{a}{4}$$

تأخذ القوة العرضية في الجزء الافقي السفلي شكلاً خطياً أما قيمتها عند النهاية اليسرى فتبلغ :

$$Q_2 = - \left(2P + p_0 a + q_0 \frac{a}{4} \right)$$

وعند النهاية اليمنى فتأخذ القيمة التالية :

$$Q_1 = -A_V = - \left(2P + p_0 a + \frac{3}{4} q_0 a \right)$$

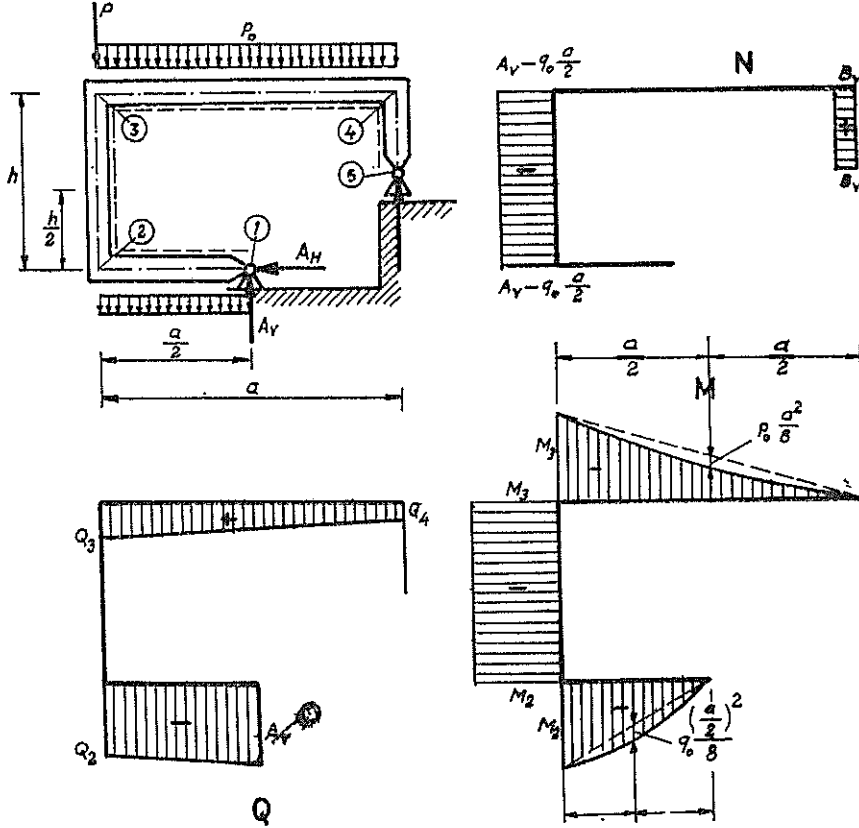
أما في الاجزاء الشاقولية فلا تتشكل فيها قوى عرضية .

تبلغ قيم عزم الانعطاف عند النقاط 2 , 3 , 4 القيم التالية :

$$M_3 = -A_V \frac{a}{2} + q_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = - \left(P a + q_0 \frac{a^2}{2} + q_0 \frac{a^2}{4} \right)$$

$$M_3 = M_2$$

$$M_4 = 0$$



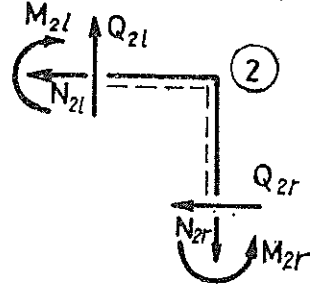
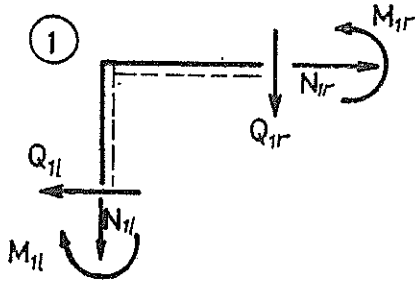
شكل 2-116

٣ - رسم مخططات قيم القطع :

لقد تم في الشكل (2-116) تمثيل مخططات قيم القطع .

مثال 64 :

الاطار ثلاثي المفصل (شكل 2-118) .



شكل 2-117

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود افعال المساند وقوى المفاصل :

$$A_v = \frac{1}{7,0} (R \cdot 2,0 - W \cdot 1,0) = 7,0 \text{ Mp}$$

$$B_v = \frac{1}{7,0} (R \cdot 5,0 + W \cdot 1,0) = 21,0 \text{ Mp}$$

$$A_H = \frac{1}{5,0} (-A_v \cdot 3,0 + W \cdot 4,0) = 1,4 \text{ Mp}$$

$$B_H = \frac{1}{5,0} (B_v \cdot 4,0 - R \cdot 2,0) = 5,6 \text{ Mp}$$

$$G_H = W - A_H = B_H = 5,6 \text{ Mp}$$

$$G_v = A_v = R - B_v = 7,0 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع

تتوزع القوى الناعمية في كافة قضبان الجائز الاطاري توزيعاً منتظماً (توزيعاً ثابتاً) وكلها عبارة عن قوى ضاغطة . اما القوسوة العرضية فتتوزع في القضبان الافقية للجائز بشكل منتظم (ثابت) .

على بعد

$$x_0 = \frac{G_H}{g_0} = 1,0 \text{ m}$$

من المفصل الرأسي تغير القوة العرضية اشارتها .

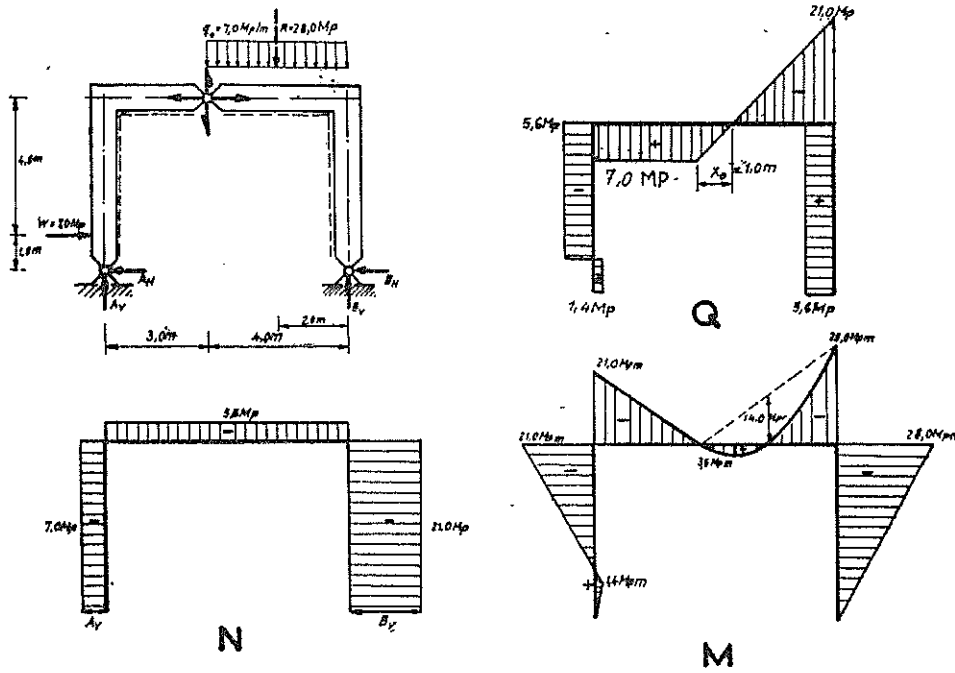
تبلغ عزوم الانعطاف في النقاط 1 , 2 , 3 القيم التالية :

$$M_1 = A_H \cdot 5,0 - W \cdot 4,0 = - 21,0 \text{ Mpm}$$

$$M_2 = - B_H \cdot 5,0 = - 28,0 \text{ Mpm}$$

$$M_3 = A_H \cdot 1,0 = - 1,4 \text{ Mpm}$$

يلاحظ من مخططات قيم القطع الممثلة في الشكل (2.117) ان القوة النازمية في القضيب الافقي وعلى مقربة من العقدة الصلبة تساوي القوة العرضية في القضيب الشاقولي كما وان القوة العرضية للقضيب الافقي على مقربة من العقدة الصلبة تساوي القوة النازمية للقضيب الشاقولي . اما عزم الانعطاف في نقطة العقدة الصلبة فله نفس القيمة عند القضيب الافقي والقضيب الشاقولي (شكل 2.117) .



شكل 2-117

مثال 65 :

جائز اطاري منلق (شكل 2-119) .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

١ - ردود افعال المساند وقوى المفاصل :

تندعم ردود افعال المساند بسبب تشكيل القوى الخارجية المؤثرة فيما بينها مجموعة متوازنة .
بتطبيق شروط التوازن على اجزاء الاطار I , II يتم الحصول من المعادلات الستة على ستة
مركبات لقوى المفاصل G_3, G_2, G_1 .

من اجل الجزء I يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$G_{1H} \cdot 2,0 + G_{1V} \cdot 3,0 - P_1 \cdot 1,0 = 0$$

$$G_{1H} + G_{2H} - P_1 = 0$$

$$-G_{1V} + G_{2V} = 0$$

ومن اجل الجزء II يتم الحصول على العلاقات الالية :

$$G_{1V} \cdot 5,0 - G_{1H} \cdot 2,0 - P_2 \cdot 1,0 = 0$$

$$G_{1H} + P_2 - G_{3H} = 0$$

$$G_{1V} - G_{3V} = 0$$

بحل المعادلات يتم الحصول على القيم التالية :

$$G_{1H} = 0,5 \text{ Mp}$$

$$G_{1V} = G_{2V} = G_{3V} = 1,0 \text{ Mp}$$

$$G_{2H} = 3,5 \text{ Mp}$$

$$G_{3H} = 4,5 \text{ Mp}$$

للتدقيق يمكن تطبيق شروط التوازن الثلاثة على الجزء III .

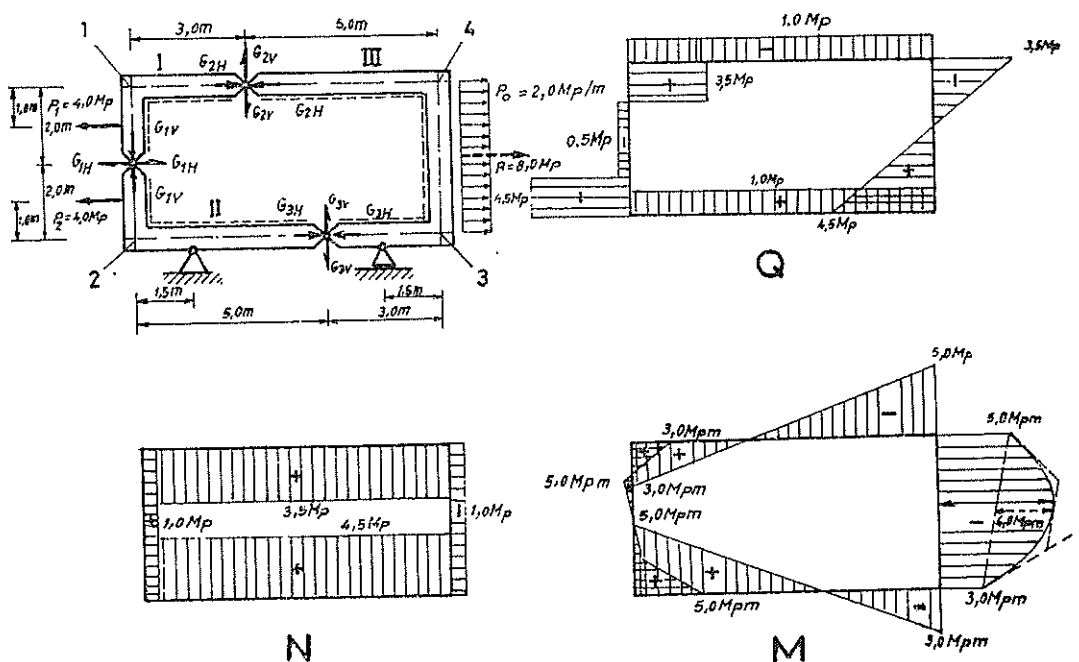
٢ - قيم القطع :

القوة الناعمية (القوة المحورية ، القوة الطولية) ثابتة في اجزاء الاطار الافقية والناقولية .

تتوزع القوة العرضية في المجال الذي تؤثر فيه الحملية الخطية فقط بشكل خطي ، اما فيما تبقى من المجالات فتتوزع توزيعاً ثابتاً .

يأبجد قيم عزوم الانعطاف في النقاط 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 يتمين توزيع العزم في الاطار المغلق .

لقد تم في الشكل (2-119) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-119

مشال 66 :

جائز اطاري بشداد (اطار بشداد) (شكل 2-120).

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند

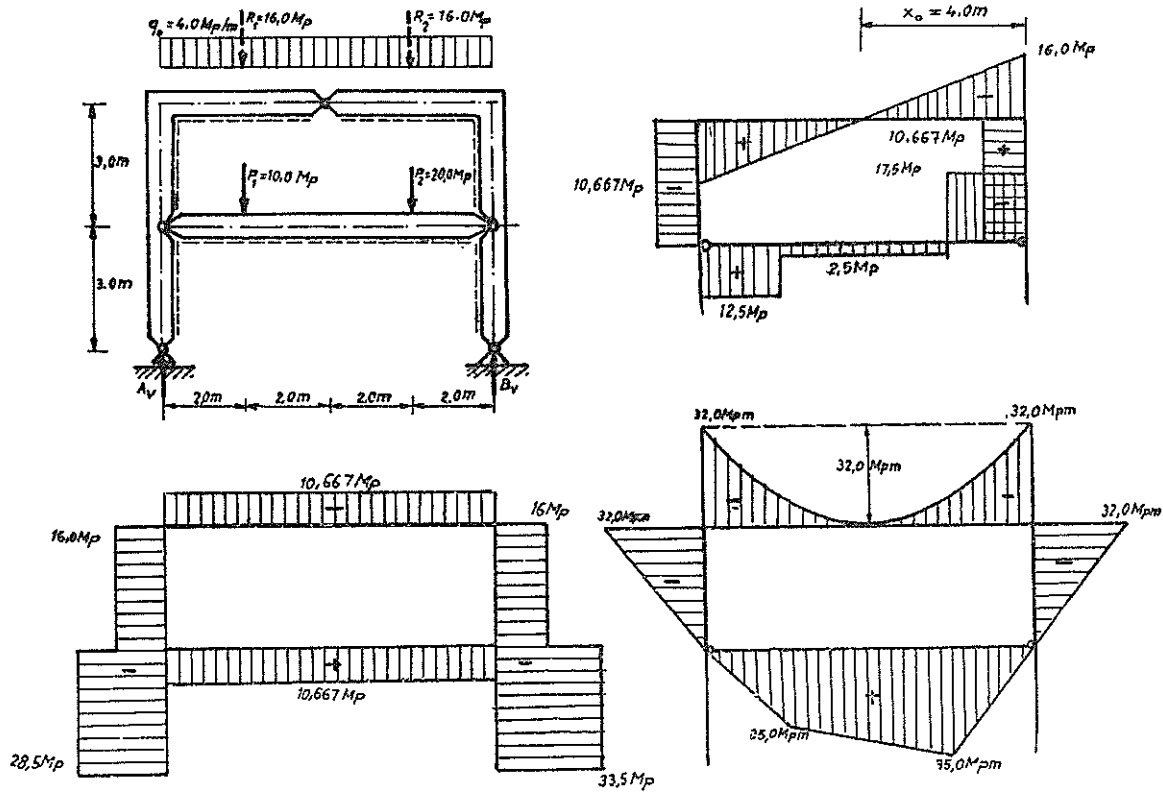
بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على قيم ردود أفعال المساند :

$$A_v = 28,5 \text{ Mp} ; G_{1H} = 10,667 \text{ Mp} ; G_{2H} = 10,667 \text{ Mp} ; G_{3H} = 10,667 \text{ Mp}$$

$$B_v = 33,5 \text{ Mp} ; G_{1v} = 12,5 \text{ Mp} ; G_{2v} = 17,5 \text{ Mp} ; G_{3v} = 0,0 \text{ Mp}$$

٢ - قيم القطع

بالاستعانة برود افعال المساند وقوى المفاصل تبين مخططات قيم القطع (شكل 2-120) .



شكل 2-120

٢ - ٩ الجيزان المختلطة (جيزان قضيبية ذات اشكال شبكية)

يعطي الشكل (2-121a) مثالا لهذه الجيزان وهي عبارة عن جائز عادي ab تربط به قضبان مفصلية من النوع الذي يستعمل في الجيزان الشبكية (الشبيكيات) وهي fg , fc , af , gh , ge والغرض من هذه القضبان هو تقوية الجائز ab عن طريق تقليل القوى الداخلية وعزوم الانعطاف فيها كما سيتضح من حل هذا المثال .

مثال 67 :

الجائز المختلط الممثل في الشكل (2-121a) .

المطلوب : إيجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحل :

كاد الجائز المبين في الشكل (2-121a) أن يكون غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة الأولى لو لا وجود المفصل الداخلي فيه عند النقطة d . ولكنه بعد وجود هذا المفصل أصبح مقرر ستاتيكيًا . ان رد الفعل عند كل من المسندين الموجودين في a , b شاقولي ولا يتأثر بوجود الأجزاء الشبكية والواقع أن هذا الجائز مقرر ستاتيكيًا من الخارج وقيمة كل من ردي الفعل هي 9 Mp شاقولياً إلى الأعلى .

إذا اعتبر الآن قطع مثل s-s يمر بالمفصل الداخلي عند d ويفصل الجائز إلى جزئين ، ودرس توازن الجزء الأيسر مثلاً لوجد ان القوى الخارجية المؤثرة عليه هي :

١ - حمولة منتظمة تؤثر بين d,a وشدها 2 Mp/m (٢ ميغابوند على المتر) .

٢ - رد فعل شاقولي إلى الأعلى عند a مقداره 9 Mp .

٣ - قوة شد في القضيب المقطوع fg بحمولة القيمة وتعمل على الخط المستقيم fg (ينطبق حاملها على الخط المستقيم fg) .

٤ - قيم القطع (مؤثرات القوى الداخلية) عند القطع d وهي بحمولة وتتكون من قوة ناشئة وقوة عرضية وليس فيها عزم انعطاف لوجود المفصل الداخلي .

وعلى ذلك فعدد المجاهيل ثلاثة . ولهذا كان الجائز مقرر ستاتيكيًا ولو لا وجود المفصل الداخلي عند d ل زاد مجهول رابع هو عزم الانعطاف هناك ولاصبح الجائز كما ذكر غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة الأولى .

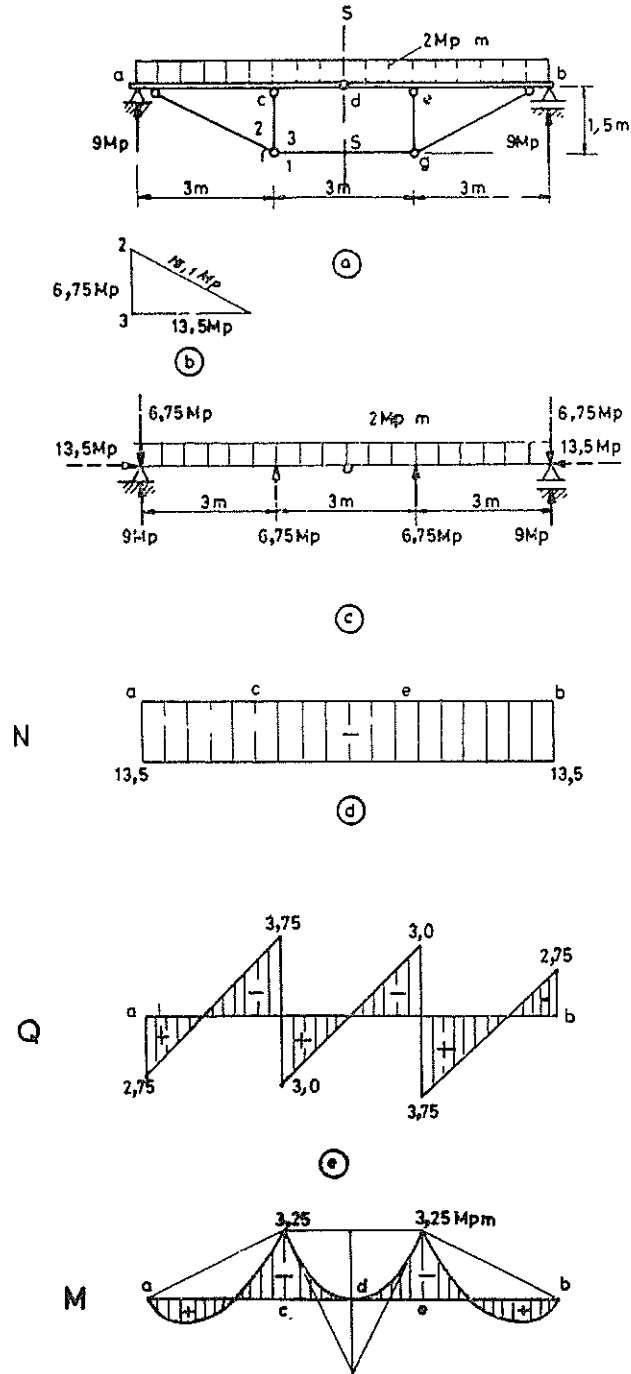
لايجاد قيمة قوة الشد في القضيب fg يؤخذ عزم القوى على جزء الجائز الواقع على يسار القطع s-s ، حول النقطة (بالنسبة للنقطة) d فيرى أن :

$$S = 0 - 1,5 (2,25) - 4 (4,5) = -9$$

ومنها ينتج :

$$S = 13,5 \text{ Mp}$$

وبعد معرفة القوة S في القضيب fg يسهل تحليلها عند f باتجاه القضيبين fa و fc بالطريقة العادية كما في الشكل (2-121 b) لايجاد القوى في هذين القضيبين .



شكل 2-121

ولتسهيل حل الجائز ab اعتبرت بعد ذلك القوى المؤثرة عليه من القضبان المفصليّة عند a , c , e , b كما لو كانت قوى خارجيّة .

بمد ذلك تم رسم الشكل (2-121c) ليبين الجائز ab وجميع الحمولات والقوى الخارجية المؤثرة عليه . ومنه تم إيجاد مخطط القوى الناعمية (شكل 2-121 d) ومخطط القوى العرضية (شكل 2-121 e) ومخطط عزم الانعطاف (شكل 2-121 f) .

ويستطاع الآن الرؤية إلى أي حد نقصت قيم القوى العرضية وعزوم الانعطاف في الجائز نتيجة لوجود الأجزاء الشبكية فيه . ولو لا هذه الأجزاء (والاستغناء عن المفصل الداخلي في d) لبلغت عزوم الانعطاف عند d قيمة عظمية هي :

$$\frac{q l^2}{8} = \frac{2.9^2}{8} = 20,25 \text{ Mpm}$$

مقابل 2,25 Mpm كقيمة عظمية في الجائز الحالي . وليس من الضروري دائماً أن يحتوي الجائز على مفصل داخلي عند d ، ويكفي معرفة شرط إضافي كقيمة عزم الانعطاف عند أي قطع في الجائز مثلاً لكي تصبح المسألة مقررة متابكياً ، أو مقدار القوة الناعمية أو القوة العرضية أو قيمة القوة الداخلية في أحد قضبان التركيب الشبكي المرافق .

مثال 68 :

الجائز المختلط الممثل في الشكل (2-122) .

المعطى : q ، l ، $P=12 q l$.

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند A , B وقوة المفصل وكذلك قوى القضبان 1 , 2 , 3 , 4 , 5 .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند

ليس للبناء الداخلي للجائز المختلط أهمية على حساب ردود أفعال المساند . فمن الممكن اعتباره ككل جسماً صلباً (شكل 2-122 b) يعطي تطبيق شروط التوازن العلاقات التالية :

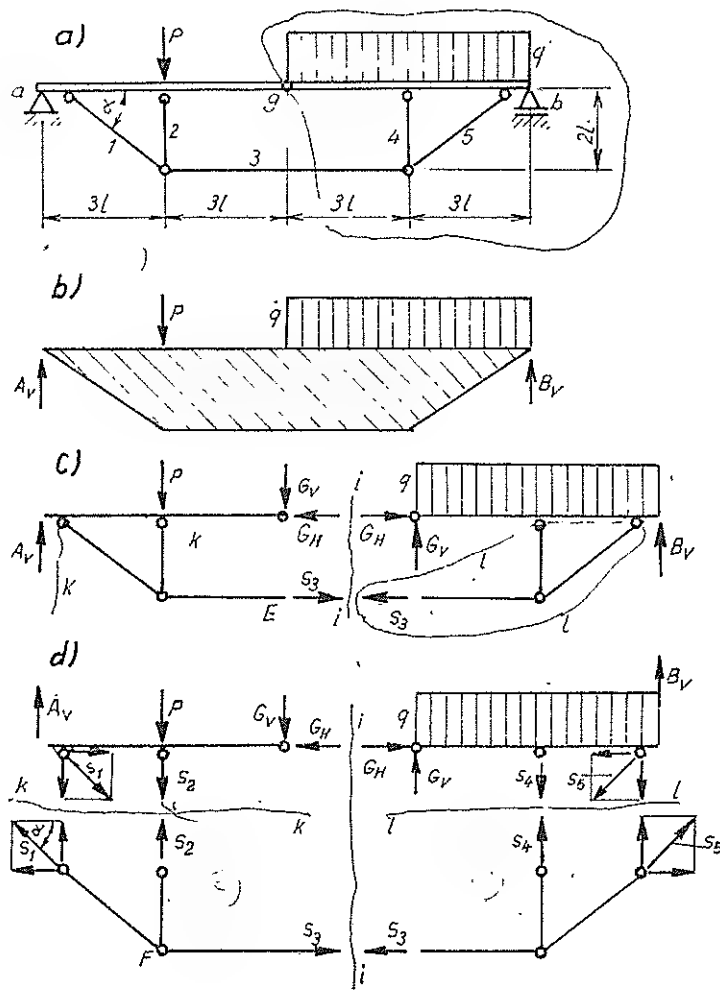
$$\sum H = 0 : A_H = 0$$

$$\sum M_a = 0 : 3 P l - 6 q l^2 + 12 B_v \cdot l = 0$$

$$\sum V = 0 : A_v - P - 6 q l + B_v = 0$$

بعد حل مجموعة المعادلات ، يتم تعيين ردود أفعال المساند المطلوبة :

$$A_H = 0 ; A_v = \frac{7}{8} P ; B_v = \frac{5}{8} P$$



شكل 2-122

٣ - قوة المفصل

باجراء القطع $i-i$ (شكل 2-122 a,c) تحول قوى المفصل الداخلية الى قوى خارجية (بذلك تجعل القوى الداخلية مرئية) .

في المفصل g ينعدم العزم M وبذلك لا يحوى إلا قوتين ، قوة شاقولية وقوة افقية . أما القضيب الاقوي السفلي المقطوع بالقطع $i-i$ فلا يحوى إلا قوة واحدة (هي القوة الناعمية) وذلك لأنه ينتهي في نهايته بمفاصل هذا من جهة ومن جهة اخرى لعدم تأثير أية حمولات خارجية داخل مجال القضيب (قضيب نمسي ، قضيب شبكي) .

يفترض في البداية أن قوة القضيب المذكور هي قوة شادة . يعطي تطبيق شروط التوازن على

الجزء المقطوع الايمن أو الايسر من الشكل (2-122 c) نفس النتيجة . من اجل الجزء الأيسر يصبح تطبيق شروط التوازن ، هكذا :

$$\sum V = 0 : A_v - P - G_v = 0$$

$$\sum H = 0 : S_3 - G_H = 0$$

$$\sum M_e = 0 : -6 A_v \cdot l + 3P \cdot l + 2 G_H \cdot l = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم الحصول على القيم المطلوبة :

$$G_H = \frac{9}{8} P ; G_v = -\frac{1}{8} P ; S_3 = \frac{9}{8} P$$

٣ - قوى القضبان

باجراء قطوع أخرى أمثال k-k و l-l علاوة على القطوع السابقة ، مجزىء الجائز المختلط إلى أربعة أجزاء منفصلة عن بعض انفصالا تاماً (شكك 2-122d) لايجاد S_2, S_{1v}, S_{1H} يمكن أخذ الجزء المقطوع الايسر . كما يمكن ايضاً للحصول على هذه القوى تطبيق شروط التوازن على العقدة المفصالية F :

$$\sum V = 0 : S_{1v} + S_2 = 0$$

$$\sum H = 0 : -S_{1H} + S_3 = 0$$

العلاقة الهندسية :

$$\tan \alpha = \frac{2l}{3l} = \frac{S_{1v}}{S_{1H}}$$

(يتم الحصول على هذه العلاقة من تشابه مضلع القوى S_{1H}, S_{1v}, S_1 الممثل في الشكل 2:122 d والمثلث المتكون من الجائز الرئيسي والقضبان 1 , 2) .

بعد حل مجموعة المعادلات ينتج :

$$S_{1H} = \frac{9}{8} P ; S_{1v} = \frac{3}{4} P ; S_2 = -\frac{3}{4} P$$

بتحليل القوة S_3 في الجزء السفلي الايمن من الشكل (2-122 d) بطريقة مشابهة ينتج :

$$S_4 = S_2 = -\frac{3}{4}P ; S_{5H} = S_{1H} = \frac{9}{8}P ; S_{5v} = S_{1v} = \frac{3}{4}P$$

٢ - ١٠ الجيزان المنحنية

يختص هذا البحث بدراسة الجيزان التي يكون محورها الاوسط منحنيًا وتؤثر عليها حمولات تقع في مستوي هذا المحور المنحني . وستقتصر الدراسة هنا على الانشاءات المقررة ستاتيكيًا .

مثال 69 :

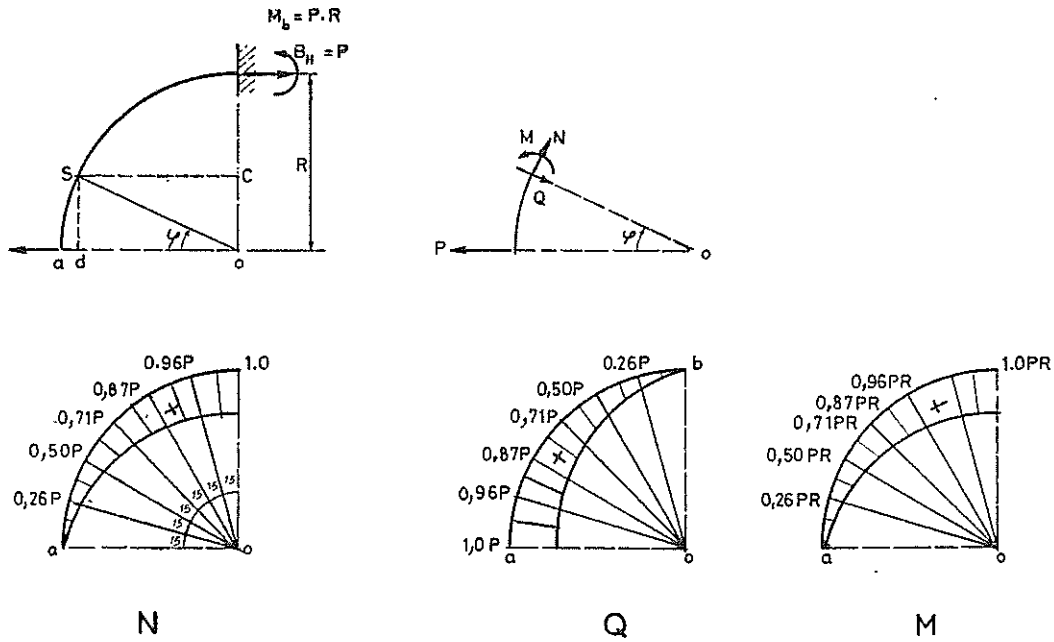
جائز بارز (ظفر) بطول ربع دائرة وموثوق عند الطرف b وتؤثر عليه عند الطرف a حمولة وحيدة (حمولة مركزة) باتجاه مركز الدائرة 0 (شكل 2-123) .

المعطى: قيمة الحمولة P ، نصف قطر الدائرة R .

المطلوب : إيجاد قيم القطع .

الحل :

باعتبار القطع s الذي تحدده الزاوية φ وتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع الايسر ينتج :



شكل 2-123

$$\sum P_N = 0 \quad : \quad N = P \sin \phi \quad (1)$$

$$\sum P_Q = 0 \quad : \quad Q = P \cos \phi \quad (2)$$

$$\sum M_S = 0 \quad : \quad M = P R \sin \phi \quad (3)$$

من الممكن ان يتم رسم مخططات قيم القطع بالطريقة المبينة في الشكل (2.123) وذلك بتقسيم محيط الدائرة إلى أقسام على أبعاد متساوية وإيجاد قيم القطع عند كل قسم بتعويض قيمة الزاوية ϕ في العلاقات (1) و (2) و (3) ثم تؤخذ الاحداثيات في اتجاه المركز عمودياً على المحور . وفي الشكل (2-123) قسم محيط ربع الدائرة إلى ستة أقسام بحيث أصبحت قيم الزاوية ϕ على التوالي 0° و 15° و 30° و 45° و 60° و 75° و 90° ومن المعلوم أن مخطط عزم الانعطاف في هذه الحالة يشبه شكل القوى الناعمية للتشابه الواضح بين العلاقتين (1) و (3) .

مثال 70 :

تقع الجملة الحاملة الممثلة في الشكل (2-124) تحت تأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q .

المعطى : R و q .

المطلوب : إيجاد قيم القطع .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الشكل (2-124) ينتج :

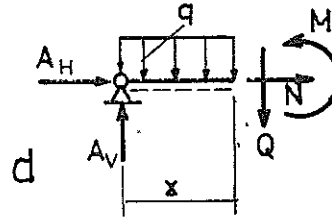
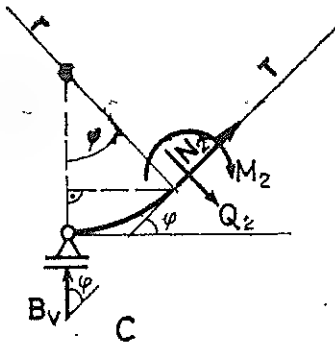
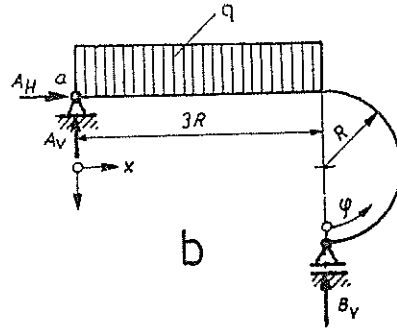
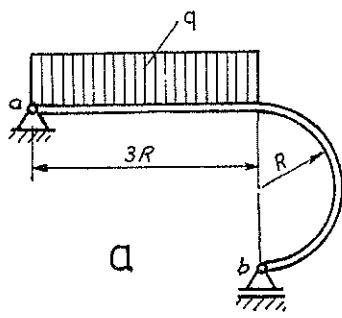
$$\sum H = 0 \quad : \quad A_H = 0$$

$$\sum M_a = 0 \quad : \quad B_v \cdot 3 R - q \cdot \frac{3 R^2}{2} = 0 \quad : \quad B_v = \frac{3}{2} R q$$

$$\sum V = 0 \quad : \quad A_v + B_v - q \cdot 3 R = 0 \quad : \quad A_v = \frac{3}{2} R q$$

٢ - قيم القطع (ردود أفعال القطع)

يتألف الجائز من مجالين .



شكل 2-124

المجال I ($0 \leq x \leq 3R$):

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-124d) ينتج:

$$\sum H = 0 : N_1 = 0$$

$$\sum V = 0 : Q_1 = A_V - q x = \frac{3}{2} q R - q x$$

$$x = 0 : Q_1 = \frac{3}{2} q R$$

$$x = 3R : Q_1 = - \frac{3}{2} q R$$

$$\sum M_x = 0 : M_1 = A_V \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} q R x - q \frac{x^2}{2}$$

تمثل هذه المعادلة قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية .

$$x = 0 : M_1 = 0$$

$$x = 3R/2 : M_1 = \frac{3}{9} q R^2$$

$$x = 3R : M_1 = 0$$

المجال II ($0 \leq \varphi \leq \pi$) :

بتطبيق شروط التوازن على القطع اليمين (شكل c 2.124) ينتج :

$$\Sigma P_T = 0 : N_2 = - B_v \sin \alpha = - \frac{3}{2} R q \sin \alpha$$

(شرط توازن القوى بالاتجاه المماسي) .

$$\alpha = 0 : N_2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : N_2 = - \frac{3}{2} R q$$

$$\alpha = \pi : N_2 = 0$$

$$\Sigma P_r = 0 : Q_2 = B_v \cos \alpha = \frac{3}{2} R q \cos \alpha$$

(شرط توازن القوى بالاتجاه القطري) .

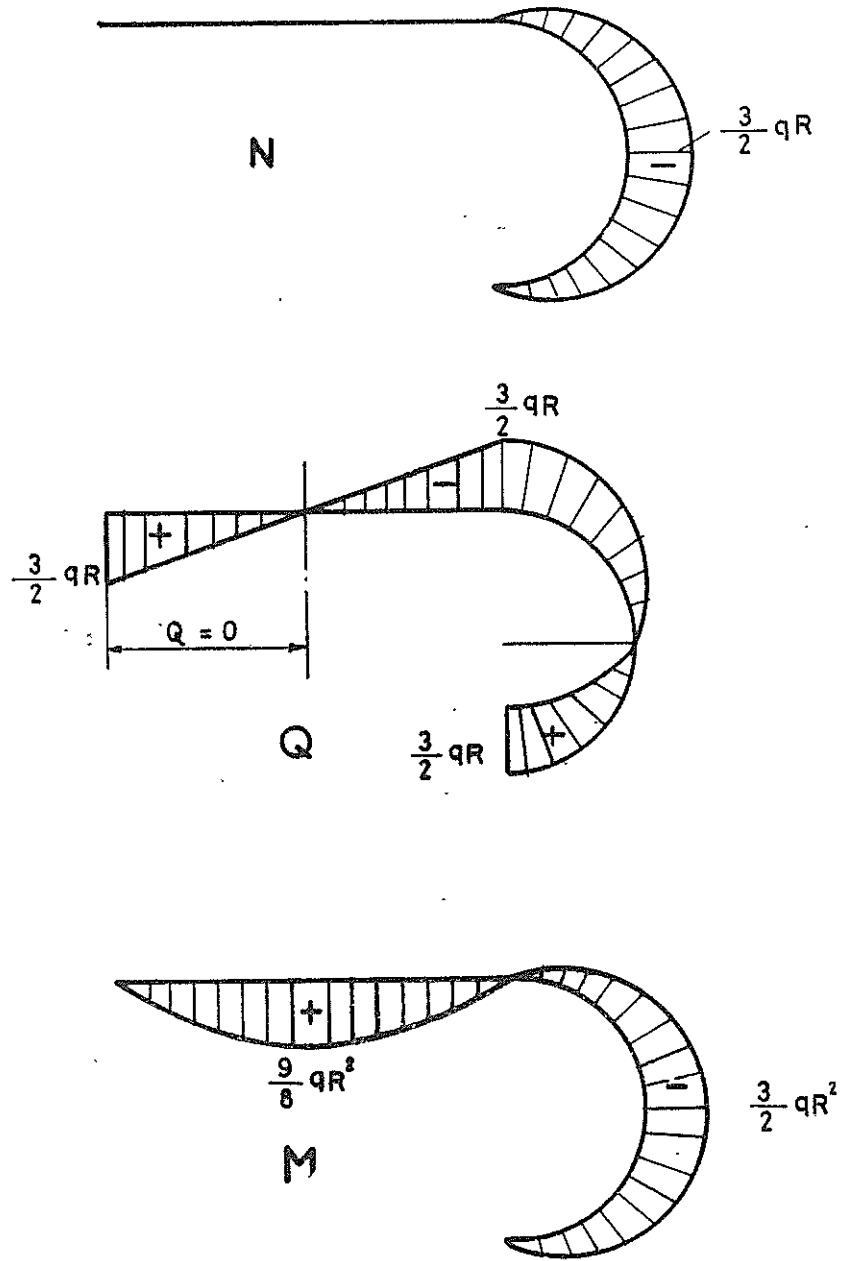
$$\alpha = 0 : Q_2 = \frac{3}{2} R q$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : Q_2 = 0$$

$$\alpha = \pi : Q_2 = - \frac{3}{2} R q$$

$$\Sigma M_\varphi = 0 : M_2 = - B_v R \sin \alpha = - \frac{3}{2} R^2 q \sin \alpha$$

$$\alpha = 0 : M_2 = 0$$



شكل 2-124 e

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : M_2 = -\frac{3}{2} R^2 q$$

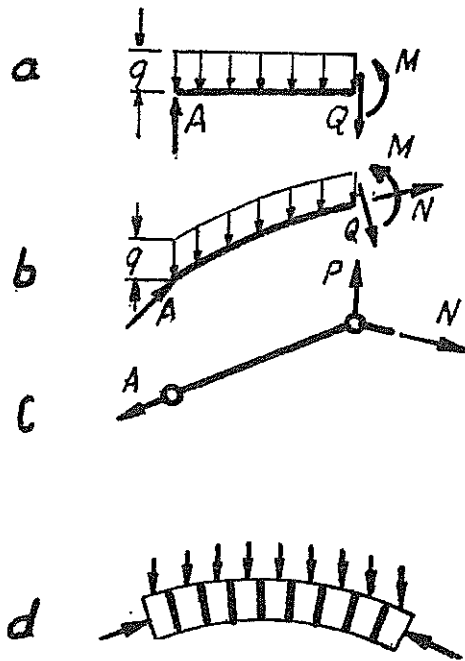
$$\alpha = \pi : M_2 = 0$$

لقد تم في الشكل (2-124 e) تمثيل مخططات قيم القطع .

٢ - ١١ - ١ كيفية تحمل القوس

يتم في الجيزان القضيية المستقيمة نقل الحمولات الناعمية على محورها الاوسط عن طريق (بواسطة) عزوم الانعطاف والقوى العرضية (شكل 2-125 a) . لكن نقل حمولات مشابهة في القوس يتم عن طريق (بواسطة) عزوم الانعطاف والقوى العرضية وكذلك القوى الناعمية (شكل 2-125 b) . يمثل الجائز ثلاثي المفصل ، الذي مثل منسه في الشكل (2-125 c) الجزء المقطوع الايسر فقط ، حالة حدية للاقواس حيث يمكن اعتباره قوساً ثلاثي المفصل بأوتار مستقيمة فهو يشترك مع القوس بصفة كونه جائزاً مستوياً .

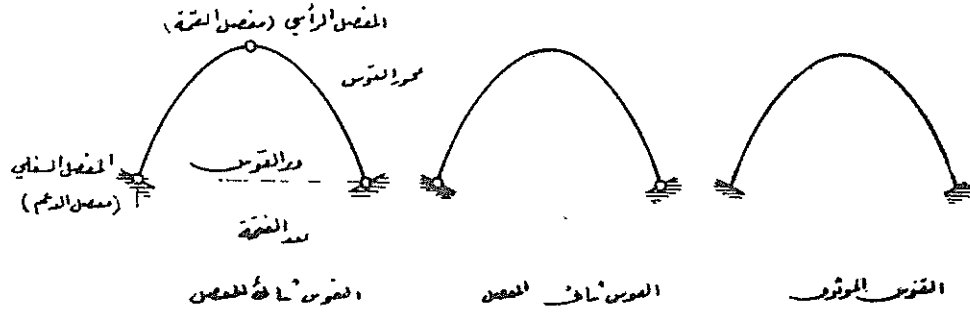
يوضح الشكل (2-125 d) فمالية تحمل الحمولات عن طريق القوى الناعمية N ، فالتقوس البسيط للحجارة فوق فتحة النافذة يساعد على تحملها لحوالات كبيرة تؤثر فوقها .



شكل 2-125

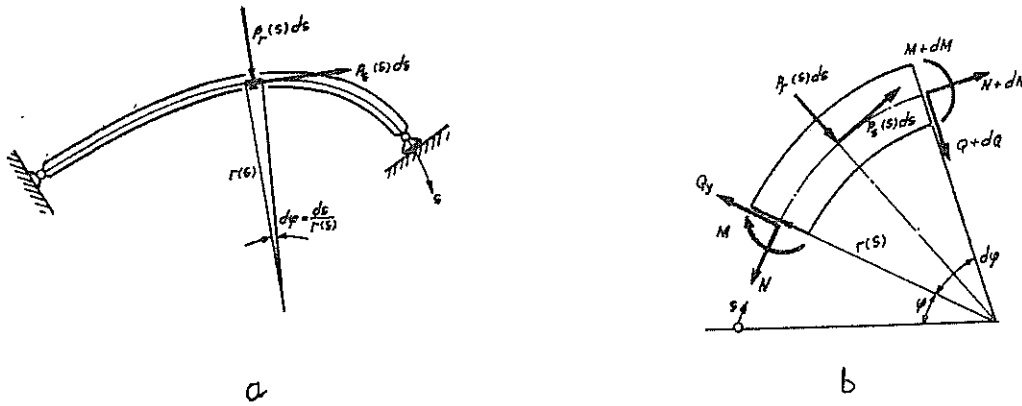
أما الاقواس فهي انشاءات محورها الاوسط منحنى كما ان مساندها تحتوي في حالة التجميع الشاقولي على ردود فعل شاقولية و ردود فعل افقية .

يوضح الشكل (2-126) ثلاثة أنواع للقوس هما القوس ثلاثي المفصل (وهو مقرر مستاتيكيًا) والقوس ثنائي المفصل (وهو غير مقرر مستاتيكيًا من الدرجة الأولى) والقوس الموثوق (وهو غير مقرر مستاتيكيًا من الدرجة الثالثة) .



شكل 2-126

فيما يلي مستقتصر الدراسة على جيزان محورها الاوسط هو عبارة عن خط منحنى مستوي (شكل 2-127a) . يتحدد تحميل المحور الاوسط للقضيب من خلال القوى الخطية $q_r(s)$ و $q_s(s)$ كما يتحدد نصف قطر انحناء محور القضيب بواسطة $r(s)$.



شكل 2-127

٢ - ١١ - ٢ العلاقات التفاضلية للجيزان المنحنية

باعتبار العنصر التفاضلي المقطع من القوس (شكل 2-127 b) والذي يبلغ طوله $ds = r d\phi$

والذي يتعرض لضغط خارجي يؤثر ناظماً على المحور الاوسط شدته q_r وإلى حركات تؤثر تماسية على منحنى المحور الاوسط شدتها q_s وباعتبار ان قيم القطع عند a هي :

$$N(s) , Q(s) , M(s)$$

وعند b هي :

$$N(s + ds) = N(s) + dN(s)$$

$$Q(s + ds) = Q(s) + dQ(s)$$

$$M(s + ds) = M(s) + dM(s)$$

(يرمز للاحداثي الذي ينطبق على محور القضيب بالرمز s وإلى الزاوية التي تحدد مكان القطع بالرمز φ) وبالاقتراض ان انحناء القوس صغير (طفيف) ، أي أن :

$$h \ll r$$

فان تطبيق شروط التوازن يعطي العلاقات التالية :

١ - شرط توازن القوى باتجاه القوة $N(s+ds)$ (القوة النازمية الموجودة على النهاية اليمنى من محور العنصر) :

$$N(s) + dN(s) - N(s) \cos d\varphi - Q(s) \sin d\varphi +$$

$$+ q_s(s) ds \cos \frac{d\varphi}{2} + q_r(s) ds \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

٢ - شرط توازن القوى باتجاه القوة $Q(s+ds)$ (القوة العرضية الموجودة على النهاية اليمنى من محور العنصر) :

$$Q(s) + dQ(s) + N(s) \sin d\varphi - Q(s) \cos d\varphi - q_s(s) ds \sin \frac{d\varphi}{2}$$

$$+ q_r(s) ds \cos \frac{d\varphi}{2} = 0$$

٣ - شرط توازن العزوم حول نقطة الحافة اليمنى $s+ds$ (نقطة الحافة اليمنى من محور القضيب) :

$$\begin{aligned}
M(s) + dM(s) - M(s) + [-Q(s) \cos d\varphi + N(s) \sin d\varphi] r(s) \sin d\varphi \\
+ [-Q(s) \sin d\varphi - N(s) \cos d\varphi] r(s) (1 - \cos d\varphi) \\
+ \left[-q_s(s) ds \sin \frac{d\varphi}{2} + q_r(s) ds \cos \frac{d\varphi}{2} \right] r(s) \sin \frac{d\varphi}{2} \\
+ \left[q_s(s) dx \cos \frac{d\varphi}{2} + q_r(s) ds \sin \frac{d\varphi}{2} \right] r(s) \left(1 - \cos \frac{d\varphi}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

في حالة $d\varphi \rightarrow 0$ فإن

$$\sin d\varphi \approx d\varphi ; \quad \cos d\varphi \approx 1 ; \quad \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2} ; \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

بالاستعانة بهذه العلاقات وبالعلاقة التالية :

$$d\varphi = \frac{ds}{r(s)}$$

وبعد إهمال الحدود الصغيرة من المرتبة الثانية فإن شروط التوازن تأخذ الشكل التالي :

$$dN(s) - Q(s) d\varphi + q_s(s) ds = 0$$

$$dQ(s) + N(s) d\varphi + q_r(s) ds = 0$$

$$dM(s) - Q(s) ds = 0$$

من الواضح ان المعادلة الاخيرة تصلح للجيزان سواء اكانت منحنية ام مستقيمة . من اجل الحالة الحدية $ds \rightarrow 0$ فإن حامل $dN(s)$ ينطبق على حامل $N(s) + dN(s)$. في الجيزان المنحنية ايضاً لاتعطي القوة الناعمية اي نصيب الى شرط توازن العزوم .

يمكن كتابة معادلات التوازن كمعادلات تفاضلية على شكلين ، فمرة تقسم العلاقات الاخيرة على $d\varphi$ وفي المرة الاخرى تقسم على ds ففي الاولى ينتج :

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dN(s)}{d\varphi} - Q(s) + q_s(s) \cdot r(s) &= 0 \\
\frac{dQ(s)}{d\varphi} + N(s) + q_r(s) \cdot r(s) &= 0 \\
\frac{dM(s)}{d\varphi} - Q(s) \cdot r(s) &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

أما في المرة الثانية فينتج :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN(s)}{ds} - \frac{Q(s)}{r(s)} + q_s(s) &= 0 \\ \frac{dQ(s)}{ds} + \frac{N(s)}{r(s)} + q_r(s) &= 0 \\ \frac{dM(s)}{ds} - Q(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

حالة خاصة :

من أجل الجيزان المنحنية الدائرية الشكل فإن

$$r = \text{const.} ; \quad ds = r d\varphi$$

وبذلك ، وبعد استخدام الاختصار التالي :

$$\frac{d}{d\varphi} (\quad) = (\quad)^{\circ} \quad (2.13)$$

فإن العلاقات التفاضلية تأخذ الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \dot{N} - Q + q_s \cdot r &= 0 \\ \dot{Q} + N + q_r \cdot r &= 0 \\ \dot{M} - Q \cdot r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

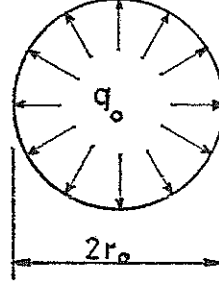
باجراء بعض التحويلات فإن المعادلات تصبح كما يلي :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{N} + N + r \cdot \dot{q}_s + r \cdot q_r &= 0 \\ Q &= \dot{N} + q_s \cdot r \\ M &= N \cdot r + r^2 \int q_s d\varphi + C \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

مثال 71 :

يقع قوس على شكل حلقة دائرية مغلقة تحت تأثير ضغط داخلي ثابت الشدة $q_r = q_0$ (شكل 2-128).

- المعطى : نصف قطر الدائرة r_0 وشدة الجوة $q_r = q_0$.
المطلوب : حساب قيم القطع .



شكل 2-128

الحل :

$$q_s = 0 ; q_r = q_0 ; r = r_0$$

بتبديل هذه القيم في المعادلات (2-14) ينتج :

$$\frac{dN}{d\varphi} - Q = 0$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N + q_0 r_0 = 0$$

$$\frac{dM}{d\varphi} - Q r_0 = 0$$

بسبب التناظر الدوراني للشكل الهندسي وللحمولة ، فإن القوة العرضية تنعدم في كل نقطة من نقاط الحلقة ، أي أن $Q = 0$. بالتعويض في المعادلة الثانية من مجموعة المعادلات السابقة ينتج :

$$N = - q_0 r_0 = \text{const.}$$

ومن المعادلة الثالثة يتم الحصول على النتيجة التالية :

$$M = C_1 = \text{const.}$$

بدراسة الجملة ، كجائز غير مقرر ستاتيكيًا من الناحية الداخلية ، بطريقة قيم القطع (منهاج السنة الثانية) يتبين أن :

$$C_1 = 0 \quad : \quad M = 0$$

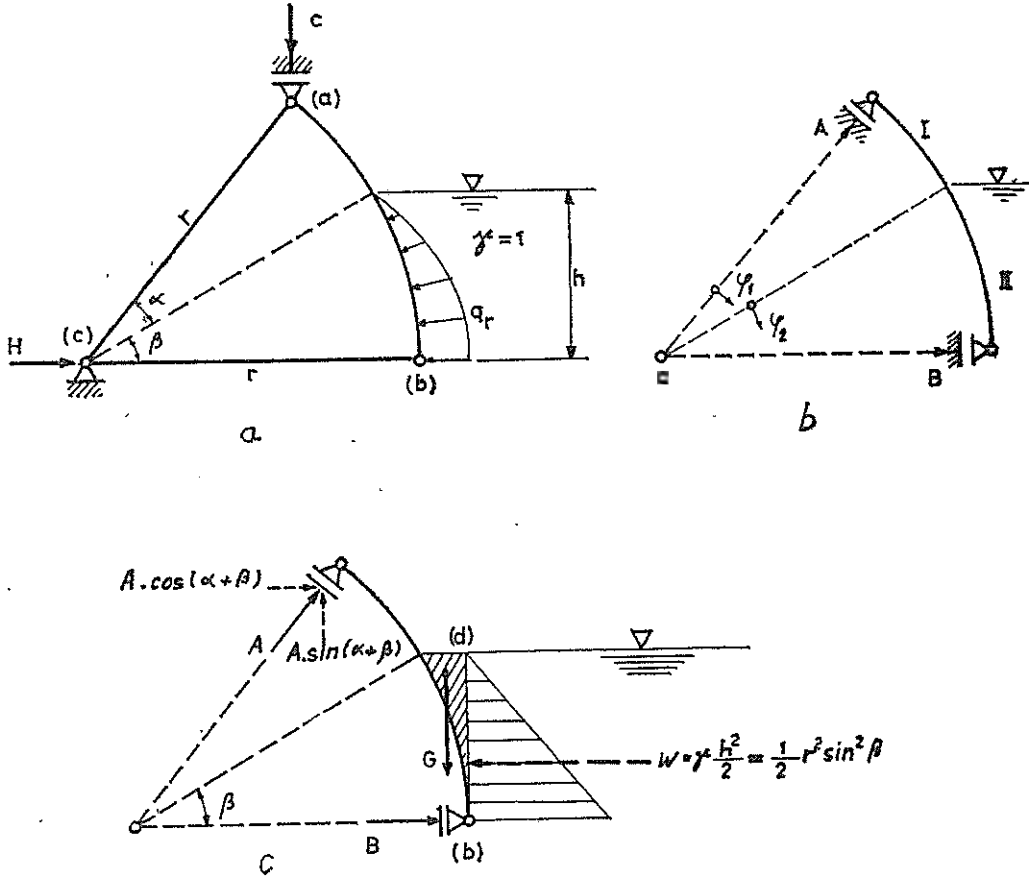
أي أن:

$$Q = M = 0 \quad ; \quad N = -q_0 r_0$$

تسمى هذه المعادلة بعلاقة الرجل (Kesselformel) وذلك لسلوك الرجل الاسطواناني الدائري الشكل في حالة الضغط الداخلي المنتظم ($q_0 < 0$) نفس حالة الاجهاد (وذلك بنظر النظر عن الاضطرابات التي تنشأ عند نقاط الاتصال بين الرجل وقعره).

مثال 72 :

يقع سد واقى على شكل قطاع دائري (Segmentschütz) تحت تأثير ضغط الماء (شكل 2-129). المعطى : ابعاد الجملة والحمولة .



شكل 2-129

المطلوب : حساب ورسم مخططات قيم القطع .

الحل :

بتطبيق شرط توازن العزوم حول النقطة c ينتج :

$$\sum M_c = 0 \quad : \quad C = 0$$

١ - قيم القطع :

١ - ١ قيم القطع في المجال I ($0 \leq \varphi_1 \leq \alpha$) :

سوف تنسب قيم القطع والحمولة على طول 1 m من السد الواقى .

١ - ١ - ١ الحمولة

$$q_r = q_s = 0$$

١ - ١ - ٢ القوى الناعمية :

بتبديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$\ddot{N} + N = 0$$

هذه هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية . يمثل حلها بالشكل التالي :

$$N = C_1 \cos \varphi_1 + C_2 \sin \varphi_1$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_1 = 0 \quad : \quad N = 0 \quad ; \quad C_1 = 0$$

١ - ١ - ٣ القوى العرضية

بتبديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$Q = \dot{N}$$

$$Q = C_2 \cos \varphi_1$$

شروط الاطراف :

$$\dot{\varphi}_1 = 0 : Q = A : \dot{C}_2 = A$$

بالتبديل في العلاقات السابقة يتم الحصول على القوة الناعمة والعرضية :

$$Q = A \cdot \cos \varphi_1 ; N = A \cdot \sin \varphi_1 \quad \text{Mpm/m}$$

١ - ١ - ٤ عزم الانعطاف

$$M = N \cdot r + C_3 = A \cdot r \cdot \sin \varphi_1 + C_3$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_1 = 0 : M = 0 ; C_3 = 0$$

بالتبديل في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على معادلة عزم الانعطاف :

$$M = A \cdot r \cdot \sin \varphi_1 \quad \text{Mpm/m}$$

١ - ١ - ٥ شروط التحول للمجال II :

$$\varphi_1 = \alpha : N = A \cdot \sin \alpha$$

$$Q = A \cdot \cos \alpha$$

$$M = A \cdot r \cdot \sin \alpha$$

١ - ٢ قيم التقطع في المجال II

١ - ٢ - ١ المحولة :

$$q_s = 0$$

$$q_r = \gamma [h - r \cdot \sin (\beta - \varphi_2)]$$

بالاستعانة بالعلاقة :

$$h = r \cdot \sin \beta$$

فان العلاقة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$q_r = \gamma [r. \sin \beta - r \sin \beta . \cos \varphi_2 + r. \cos \beta . \sin \varphi_2]$$

ببديل الوزن النوعي للماء :

$$\gamma = 1 \text{ Mp/m}^3$$

تتحول العلاقة الاخيرة لتأخذ الشكل التالي :

$$q_r = r. \sin \beta - r. \sin \beta . \cos \varphi_2 + r. \cos \beta . \sin \varphi_2$$

١ - ٢ - ٣ القوة الناعمية

ببديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$\ddot{N} + N = r^2. \sin \beta + r^2 \sin \beta . \cos \varphi_2 - r^2 \cos \beta . \sin \varphi_2$$

معادلة تفاضلية خطية لا متجانسة من المرتبة الثانية .

الحل المتجانس :

$$N_h = C_4 . \cos \varphi_2 + C_5 . \sin \varphi_2$$

الحل الخاص :

$$N_p = - r^2 \sin \beta + \frac{r^2}{2} \sin \beta \varphi_2 . \sin \varphi_2 + \frac{r^2}{2} \cos \beta . \varphi_2 . \cos \varphi_2$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_2 = 0 : N = A . \sin \alpha$$

$$A . \sin \alpha = C_4 - r^2 . \sin \beta$$

$$C_4 = A . \sin \alpha + r^2 . \sin \beta$$

١ - ٢ - ٣ القوة العرضية

ببديل شدة الحمولة في العلاقة (2-15) ينتج :

$$Q = \dot{N}$$

ببديل C_4 في علاقة القوة الناعمية يصبح حل المعادلة التفاضلية ، هكذا :

$$Q_h = - (A \cdot \sin \alpha + r^2 \sin \beta) \sin \varphi_2 + C_5 \cos \varphi_2$$

$$Q_p = \frac{r^2}{2} \sin \beta (\sin \varphi_2 + \varphi_2 \cos \varphi_2) + \frac{r^2}{2} \cos \beta (\cos \varphi_2 - \varphi_2 \sin \varphi_2)$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_2 = 0 : Q = A \cdot \cos \alpha$$

$$A \cdot \cos \alpha = C_5 + \frac{r^2}{2} \cos \beta$$

$$C_5 = A \cdot \cos \alpha - \frac{r^2}{2} \cos \beta$$

١ - ٢ - ٤ تبديل الثوابت C_5 و C_4

٧ - القوة الناطمية :

$$N = (A \cdot \sin \alpha + r^2 \sin \beta) \cos \varphi_2 + (A \cos \alpha - \frac{r^2}{2} \cos \beta) \sin \varphi_2 - \\ - r^2 \sin \beta + \frac{r^2}{2} \sin \beta \cdot \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 + \frac{r^2}{2} \cos \beta \cdot \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \quad \text{Mp/m}$$

ب - القوة العرضية :

$$Q = - (A \cdot \sin \alpha + r^2 \sin \beta) \sin \varphi_2 + (A \cos \alpha - \frac{r^2}{2} \cos \beta) \cos \varphi_2 + \\ + \frac{r^2}{2} \sin \beta (\sin \varphi_2 + \varphi_2 \cos \varphi_2) + \frac{r^2}{2} \cos \beta (\cos \varphi_2 - \varphi_2 \sin \varphi_2) \quad \text{Mp/m}$$

١ - ٢ - ٥ عزم الانعطاف

$$M = N \cdot r + C_6$$

شروط الاطراف :

$$\varphi_2 = 0 : M_2 = A \cdot r \cdot \sin \alpha$$

$$A \cdot r \cdot \sin \alpha = A \cdot r \cdot \sin \alpha + r^3 \sin \beta - r^3 \sin \beta + C_6 : C_6 = 0$$

ومنه يتم الحصول على معادلة عزيم الانعطاف :

$$M = N \cdot r = \dots$$

١ - ٣ تعيين A

شروط الأطراف :

$$\varphi_2 = \beta : N = 0$$

بالتبديل في معادلة N الموجودة في الفقرة ١ - ٢ - ٤ آ ينتج :

$$0 = A (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) + \frac{r^2}{2} \sin \beta \cos \beta -$$

$$- r^2 \sin \beta + \frac{r^2}{2} \cdot \beta (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)$$

$$= A \cdot \sin (\alpha + \beta) + \frac{r^2}{2} \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot r^2 \sin \beta + \frac{r^2}{2} \beta$$

من هذه العلاقة يتم تعيين A :

$$A = \frac{1}{\sin (\alpha + \beta)} \left[r^2 \cdot \sin \beta \left(1 - \frac{\cos \beta}{2} \right) - \frac{r^2}{2} \beta \right] \quad \frac{M_p}{m}$$

بتبديل قيمة A في علاقات الفقرة ١ - ٢ - ٤ آ و B يتم الحصول على قيم القطع النهائية .

١ - ٤ التدقيق الحسابي

القطع (b) (d) (شكل c 2-129) :

بتطبيق شروط التوازن ينتج :

$$\Sigma V = 0 : A \cdot \sin (\alpha + \beta) = G$$

حيث أن G هو وزن الماء ويبلغ :

$$G = r^2 \cdot \sin \beta \left(1 - \frac{1}{2} \cos \beta \right) - \frac{r^2}{2} \beta$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

(انظر نفس العلاقة المحسوبة سابقاً)

$$A = \dots$$

$$\Sigma H = 0 : B = W - A \cos (\alpha + \beta)$$

$$B = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \beta - A \cos (\alpha + \beta)$$

$$\varphi_2 = \beta : Q = - B$$

$$\begin{aligned} Q(\beta) = & - A \sin \alpha \cdot \sin \beta + A \cos \alpha \cdot \cos \beta - \\ & - r^2 \sin^2 \beta - \frac{r^2}{2} \cos^2 \beta + \frac{r^2}{2} \cos^2 \beta + \\ & + \frac{r^2}{2} \sin^2 \beta + \frac{r^2}{2} \sin \beta \cdot \beta \cdot \cos \beta - \\ & - \frac{r^2}{2} \beta \cos \beta \sin \beta \end{aligned}$$

$$Q(\beta) = A \cos (\alpha + \beta) - \frac{r^2}{2} \sin^2 \beta = - B$$

١-٥ مخططات قيم القطع

لقد تم في الشكل (2-131) تمثيل مخططات قيم القطع .

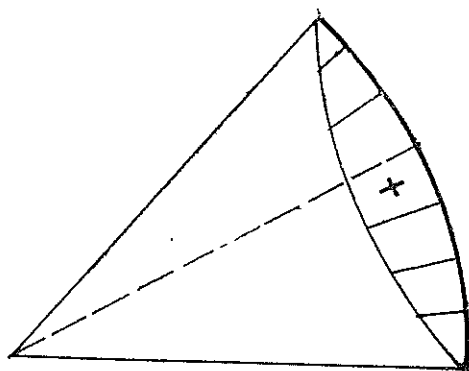
مثال 73 :

يقع قوس ثلاثي المفصل تحت تأثير قوة وحيدة F تؤثر في قمته (شكل 2-132) .
المطلوب : حساب ورسم مخططات قيم القطع .

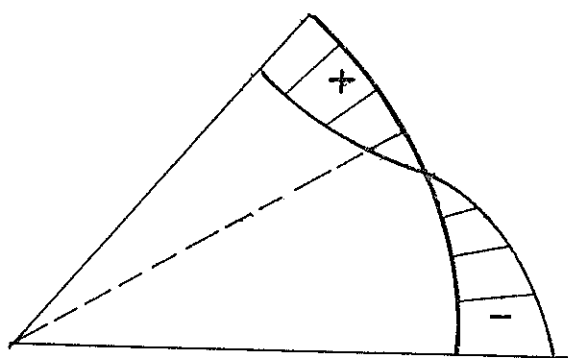
الحل :

يتألف القوس الممثل في الشكل (2-132) من مجالين . لاسباب التناظر (الهندسي والجولي)
يمكن الاكتفاء بدراسة مجال واحد منه : على ميسيل المثال الایسر .

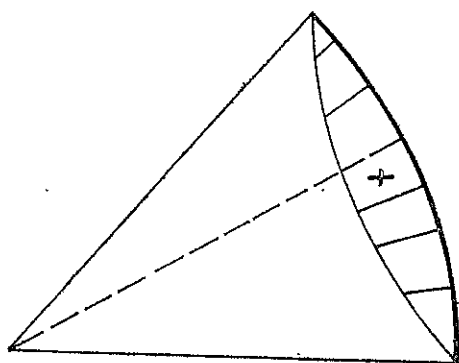
$$q_\theta = q_r = 0 \quad ; \quad r = r_0 = \text{const.}$$



N

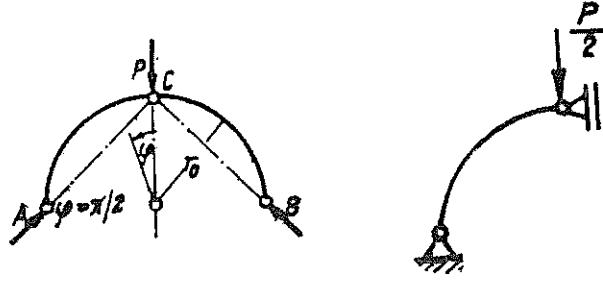


Q



M

شکل 2-131



شكل 2-132

بالاستعانة بالقيم السابقة فان العلاقات التفاضلية (2-14) تصبح بالشكل التالي :

$$\frac{dN}{d\varphi} - Q = 0$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N = 0 \quad (2-16)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} - r_0 Q = 0$$

من العلاقة الاولى يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{dN}{d\varphi} = Q$$

وبتبديلها في العلاقة الثانية ينتج :

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = 0$$

هذه العلاقة هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية (وتحل باستخدام الاختصار $N = e^{\lambda\varphi}$ وبذلك ينتج ان $\lambda_{1,2} = \pm i$) وبذلك فان حلها يكتب بالشكل التالي :

$$N = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi \quad (2.16a)$$

يعطي التبديل في المعادلة الاولى ، من مجموعة المعادلات الاولى (2-16)، النتيجة التالية :

$$Q = \frac{dN}{d\varphi} = - C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi \quad (2.16b)$$

بالتبديل في المعادلة الثالثة من مجموعة المعادلات نفسها (2-16) ينتج :

$$\frac{dM}{d\varphi} = r_0 Q = -r_0 C_1 \sin \varphi + r_0 C_2 \cos \varphi \quad (2-16 c)$$

بكاملة هذه العلاقة يتم الحصول على معادلة العزم المطلوبة :

$$M = M_0 + r_0 C_1 \cos \beta + r_0 C_2 \sin \varphi$$

بتحقيق معادلات قيم القطع لشروط الاطراف (الستاتيكية) التالية :

$$M (\varphi = 0) = M (\varphi = \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$N (\varphi = \frac{\pi}{2}) = - \frac{P}{2} \quad (\text{تناظر})$$

يتم الحصول على ثوابت التكامل C_1 , C_2 , M_0 :

$$C_1 = C_2 = - \frac{P}{2} \quad ; \quad M_0 = r_0 \frac{P}{2}$$

وبذلك تصبح علاقات قيم القطع النهائية بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P r_0}{2} [1 - \sin \varphi - \cos \varphi] \\ Q &= \frac{P}{2} [\sin \varphi - \cos \varphi] \\ N &= - \frac{P}{2} [\sin \varphi + \cos \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (2-16 d)$$

من اجل $\varphi = \pi/4$ تنعدم القوة العرضية Q وهناك يأخذ عزم الانعطاف قيمة عظمى :

$$\max M = - \frac{P r_0}{2} (\sqrt{2} - 1) \approx 0,2 P r_0$$

يمكن الحصول على اشارة ومكان القيمة العظمى لعزم الانعطاف بصورة ايضاحية غير مباشرة هكذا : ينبغي ان يمر حامل قوة رد فعل المسند ، كما هو موضح في الشكل (2-132) من

النقطة c . ان المضلع المتشكل من المستقيمت ABC هو خط الاستناد : عزم الانعطاف يحاول عطف القوس الجزئي الى الاعلى وتقع قيمته العظمى في الوسط .

مثال 74 :

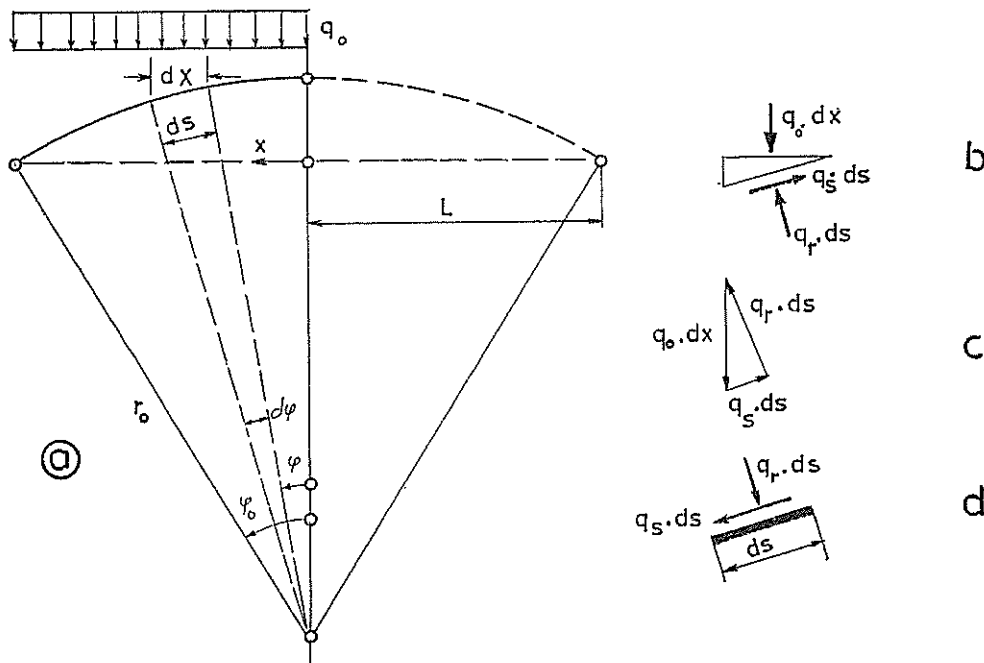
يقع القوس ثلاثي المفصل (شكل 2-135) تحت تأثير حمولة شاقولية q_0 موزعة بانتظام على طول المحور x (على سبيل المثال الوزن الذاتي على واحدة الطول لجسر) .
المطلوب : حساب ورسم مخططات قيم القطع .

الحل :

للتمكن من استخدام العلاقات التفاضلية (2-14) ينبغي تعيين الحولات القطرية والحولات المماسية.
بتحقيق التوازن على المثلث الصغير الممثل في الشكل (2-134 b) وباعتبار الشكل (2.134 c) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$q_0 dx \cos \varphi = q_r ds$$

$$q_0 dx \sin \varphi = q_s ds$$



شكل 2-134

باستخدام العلاقات التالية :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$$

تصبح علاقات التحميل (العلاقات الاولى) هكذا :

$$\left. \begin{aligned} q_r &= q_0 \cos^2 \varphi \\ q_s &= q_0 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.17.a)$$

بذلك فان الجولات التي تؤثر على القوس هي القوى q_s, q_r . اما اشارتها فمعطاة في الشكل (2-134 d) .

من اجل القوس الدائري الذي يبلغ نصف قطره $r=r_0=\text{const}$ وفي حالة تأثير الجولات الممثلة في العلاقة (2-17 a) فان حل العلاقات التفاضلية ليس بالامر الصعب .

ان الحل العام لهذه المعادلات (وهو يتألف من الحل المتجانس مضافا اليه الحل الخاص للمعادلات) هو :

$$N = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi - q_0 r_0 \sin^2 \varphi$$

$$Q = -C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - q_0 r_0 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$M = M_0 + r_0 C_1 \cos \varphi + r_0 C_2 \sin \varphi - \frac{q_0 r_0^2}{2} \sin^2 \varphi$$

شروط الاطراف :

$$Q(\varphi=0)=0 \quad (\text{تناظر})$$

$$M(\varphi=0) = M(\varphi_0) = 0$$

بتحقيق معادلات قيم القطع لشروط الاطراف المذكورة يتم الحصول على ثوابت التكامل :

$$C_2 = 0 \quad ; \quad r_0 C_1 = M_0 = \frac{q_0 r_0^2}{2} (1 + \cos \varphi_0)$$

بتبديلها في معادلات قيم القطع السابقة يتم الحصول على المعادلات النهائية لقيم القطع :

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{q_0 r_0^2}{2} (1 - \cos \varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \\ Q &= -\frac{q_0 r_0}{2} \sin \varphi (1 + \cos \varphi_0 - 2 \cos \varphi) \\ N &= -\frac{q_0 r_0}{2} [\cos \varphi (1 + \cos \varphi_0) + 2 \sin^2 \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (2-17 b)$$

بجعل القوة العرضية تساوي الصفر ($Q=0$) تنتج العلاقة التالية :

$$\sin \varphi (1 + \cos \varphi_0 - 2 \cos \varphi) = 0$$

تتحقق هذه العلاقة ، إما في حالة كون :

$$\sin \varphi = 0 \quad : \quad \varphi = 0, \pi, \dots, n\pi$$

أو في حالة كون :

$$1 + \cos \varphi_0 - 2 \cos \varphi = 0 \quad : \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi_0)$$

يشير الحل الاول الى ان $\varphi=0$ وهذا واضح بسبب التناظر (حيث تنعدم القوة العرضية في نقطة التناظر) $Q(\varphi=0)=0$ وبسبب وجود المفصل ينعدم العزم هناك ايضاً. اما الحلول الثانية فلا قيمة لها من الناحية العملية . وبذلك يكون المكان الذي تنعدم فيه القوة العرضية هو المكان الذي يتحقق فيه الشرط $\cos \varphi = 1/2 (1 + \cos \varphi_0)$ فقط . بتبديل هذه العلاقة في معادلة العزم يتم الحصول على قيمة العزم الاعظمية :

$$\max M = -\frac{q_0 r_0^2}{8} (1 - \cos \varphi_0)^2$$

تبدأ القوة الناعظمية الضاغطة بالقيمة :

$$\frac{q_0 r_0}{2} (1 + \cos \varphi_0)$$

وذلك من اجل $\varphi=0$. الى ان تبلغ القيمة :

$$\frac{q_0 r_0}{2} (1 + \cos \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)$$

من أجل

$$\varphi = \varphi_0$$

يبقى العزم في الأقواس الدائرية ذات الانحناء الطفيف (البسيط) صغيراً . بواسطة العلاقة :

$$1 - \cos \varphi_0 \approx \frac{\rho_0^2}{2} ; \quad r_0 \varphi_0 \approx L$$

فإن عزم الانعطاف الأعظمي يبلغ :

$$\max M = - \frac{q_0 L^2}{32} \varphi_0^2$$

لكن هذه العلاقة لاتصلح من أجل $\varphi_0 = 0$ وذلك لأن $N \sim q_0 L / \varphi_0$ تنطلق من أجل $\varphi_0 \rightarrow 0$ فوق كل الحدود (فالجائز القضبي المستقيم لا يمكن أن يستند بواسطة قوى ناظرية) . من أجل القوس ثلاثي المفصل نصف الدائري ($\varphi_0 = \pi/2$) فإن قيمة $\max M$ في العلاقة (2-17.c) قابلة للمقارنة مع قيمة العزم الأعظمي $q_0 L^2/8$ العائد للجائز القضبي المستقيم المحمل بحمولة موزعة بانتظام ، هذا يعني بشكل وضوح أن القوس الدائري لا يمثل خط امتداد للحمولات الخطية الشاقولية الموزعة بانتظام .

بتوجيه السؤال التالي : ما هو شكل القوس الذي ينعدم فيه العزم بشكل دقيق ، يتم الحصول على نتائج هامة . أن نقطة الانطلاق للحصول على جواب لهذا السؤال موجودة في المعادلات (2.14) و (2-17b) وكذلك في العلاقات $M=Q=0$:

$$\begin{aligned} \dot{N} + q_0 r \sin \varphi \cos \varphi &= 0 \\ N + q_0 r \cos^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.17.d)$$

هاتين المعادلتين هما معادلتان لتمييز كل من $r = r(\varphi)$ و $N = N(\varphi)$ ، فنصف قطر الانحناء r يثبت شكل القوس . يعطي إختزال N من المعادلتين السابقتين ، العلاقة التالية :

$$q_0 \dot{r} \cos^2 \varphi - 2 q_0 r \cos \varphi \sin \varphi - q_0 r \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

ومنها ينتج :

$$\frac{\dot{r}}{r} = 3 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

أو

$$\frac{dr}{r} = 3 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi$$

وبالمسكاملة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\ln r = -3 \ln (\cos \varphi) + \ln R$$

حيث أن R هو نصف القطر عند القمة ، أي عند $\varphi = 0$. إذاً الجواب على السؤال هو أن يكون

$$r = \frac{R}{\cos^3 \varphi}$$

وبشكل فوري يعرض السؤال التالي نفسه : ما هو نوع المنحني $y(x)$ الذي يحقق هذا الشرط (شرط انعدام العزم على طول المحور الاوسط). بسهولة يمكن فوراً وبشكل مفاجيء الاجابة عليه:

ان معادلة هذا المنحني هي :

$$z = \frac{x^2}{2R} + k_1 x + k_2 \quad (2.17 e)$$

وذلك لان العلاقة العامة المعروفة هي التالية :

$$\frac{1}{r} = \frac{z''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = \frac{z''}{(\sqrt{1+\tan^2 \varphi})^3} = z'' \cos^3 \varphi$$

وهي تعطي بسبب ما يلي:

$$z' = \frac{x}{R} + k_1 \quad ; \quad z'' = \frac{1}{R}$$

$$\left[\frac{d()}{d\varphi} = ()' \right] \text{ حيث أن } ()'$$

العلاقة (2-17 e) مباشرة وبذلك يتم التوصل للنتيجة التالية :

ان خط الامتداد (خط الدعم) لاجمولات الشاقلوية المنتظمة التوزيع هو قطع مكافئ من الدرجة الثانية . (بالطبع لا يحتاج القرص الذي هو على شكل قطع مكافئ لان يحوي ، في حالة التحميل المذكورة ، مفصلاً ثالثاً وذلك لانعدام العزم M في كل مكان منه) .

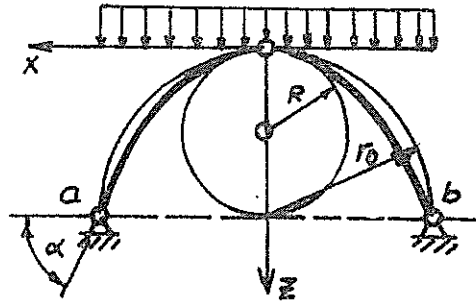
من العلاقة (2-17 d) يتم الحصول على القوة الضاغطة :

$$N = - q_0 \frac{R}{\cos \varphi} \quad (2.17 f)$$

ان قيمة القوة الضاغطة عند القمة هي $q_0 R$ وتزداد هذه القيمة بزيادة الزاوية φ (تزداد على مقربة من القمة ازدياداً بطيئاً) . يمثل الشكل (2-135) قوساً دائرياً ثلاثي المفصل نصف قطره r_0 وتؤثر عليه المحولة الموزعة بانتظام كما يشير الى خط الاستناد العائد لذلك النوع من المحولات . اذا ثبت الاحداثي z في القمة وإنتجه للأسفل بذلك تصبح معادلة قطع مكافئ الاستناد حسب العلاقة (2.17e) بالشكل التالي :

$$z = \frac{x^2}{2R}$$

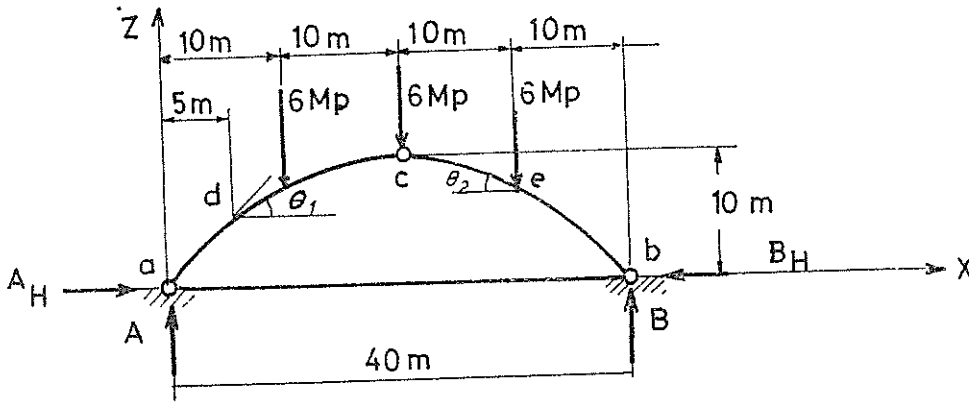
وبذلك فان نصف قطر إنحناء القمة R للقطع المكافئ المار من a و b هو اذاً $r_0/2$. في المكان $x=r_0$ حيث $z'=tg\alpha=2$ فان المركبة الشاقولية لقوة الاستناد في a و b تساوي $q_0 r_0$ كما ان المركبة الافقية تساوي $(1/2)q_0 r_0$ وبذلك تتفق هذه النتائج من نتائج العلاقة (2-17 f) ، حيث تبلغ القوة عند القمة ، حسبها القيمة $q_0 r_0/2$.



شكل 2-135

مثال 75 :

يتعرض القوس ثلاثي المفصل الممثل في الشكل (2-136) لتأثير عدة حملات وحيدة .
يمثل الشكل الهندسي للقوس قطعاً مكافئاً من الدرجة الثانية معادلته $z = x - 0.025 x^2$. طول فتحة الجائز $l = 40$ m وارتفاع قمته حيث يقع المفصل الرأسي هو $R = 10$ m .
المطلوب . إيجاد قيم القطع في النقاط d و e .



شكل 2-136

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند المطلوبة :

$$\sum M_a = 0 : B_v \cdot 40 - 6(30 + 20 + 10) = 0 : B_v = 9 \text{ Mp}$$

$$\sum V = 0 : A_v + B_v - (6 + 6 + 6) = 0 : A_v = 9 \text{ Mp}$$

$$M_{cr} = 0 : B_v \cdot 20 - B_H \cdot 10 - 6 \cdot 10 = 0 : B_H = 12 \text{ Mp}$$

$$\sum H = 0 : A_H - B_H = 0 : A_H = 12 \text{ Mp}$$

(بسبب التناظر يتضح أن $A_v = B_v$ و $A_H = B_H$) .

٢ - قيم القطع

قيم القطع في النقطة d :

ان احداثيات النقطة d هي :

$$z = z_d = 5 - 0,025 \cdot 5^2 = 4,375 \text{ m} ; x = x_d = 5 \text{ m}$$

$$\text{tg } \theta_1 = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{x=5} = 1 - 0,05 \cdot 5 = 0,75$$

$$\sin \theta_1 = 0,6 ; \cos \theta_1 = 0,8$$

باجراء قطع في النقطة d ثم باعتبار الجزء المقطوع الایسر (شكل 2.137a) وتطبيق شروط التوازن عليه ينتج :

$$\Sigma P_N = 0 : N_d = A_v \cdot \sin \theta_1 + A_H \cdot \cos \theta_1$$

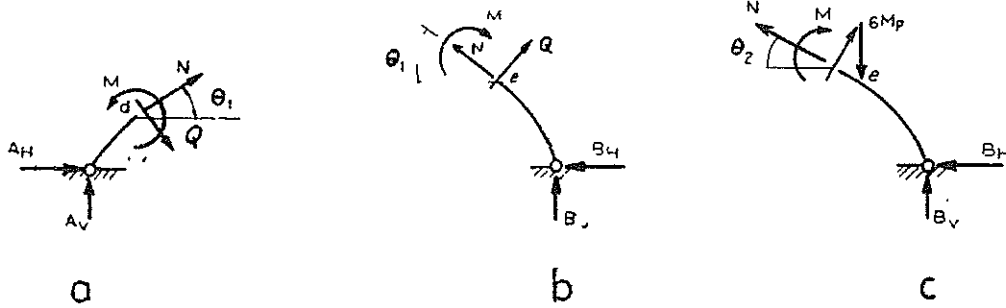
$$N_d = 9 \cdot 0,6 + 12 \cdot 0,8 = 15 \text{ Mp}$$

$$\Sigma P_Q = 0 : Q_d = A_v \cdot \cos \theta_1 - A_H \cdot \sin \theta_1$$

$$Q_d = 9 \cdot 0,8 - 12 \cdot 0,6 = 0$$

$$\Sigma M_d = 0 : M_d + A_H \cdot 4,375 - A_v \cdot 5 = 0$$

$$M_d = -7,5 \text{ Mpm}$$



شكل 1-137

قيم القطع في النقطة e :

إحداثيات النقطة e هي :

$$z = z_e = 30 - 0,025 \cdot 30^3 = 7,5 \text{ m} , x = x_e = 30 \text{ m}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=30} = 1 - 0,05 \cdot 30 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{1}{2} : \sin \theta_2 = 0,446 ; \cos \theta_2 = 0,893$$

لحساب قيم القطع في النقطة e يقطع القوس في النقطة المذكورة ثم يؤخذ الجزء المقطوع الایمن (لكن ايجاد Q و N يتطلب اجراء قطعين أحدهما قبل القوة مباشرة والاخر بعد القوة مباشرة) .

بتطبيق شروط التوازن على القطع الأيمن الممثل في الشكل (2-137 b) يتم الحصول على قيم القطع في النقطة e وذلك قبل نقطة تأثير القوة الوحيدة :

$$\sum P_N = 0 : N_e = - (12 \cdot 0,893 + 9 \cdot 0,446) = - 14,73 \text{ Mp}$$

$$\sum P_Q = 0 : Q_e = 12 \cdot 0,446 + 9 \cdot 0,893 = 2,685 \text{ Mp}$$

$$\sum M_e = 0 : M_e + B_H \cdot 7,5 - B_V \cdot 10 = 0 : M_e = 0$$

وبتطبيق شروط التوازن على القطع الأيمن الممثل في الشكل (2-137 c) يتم الحصول على قيم القطع في النقطة e وذلك بعد نقطة تطبيق القوة الوحيدة :

$$\sum P_N = 0 : N_e = - (12 \cdot 0,893 + 3 \cdot 0,446) = - 12,054 \text{ Mp}$$

$$\sum P_Q = 0 : Q_e = 12 \cdot 0,446 - 3 \cdot 0,893 = 2,673 \text{ Mp}$$

أما عزم الانعطاف فلا تتغير قيمته .

مثال 76 :

يتعرض الجائز الممثل في الشكل (2-138) لتأثير حمولة وحيدة P .

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

١ - ردود أفعال المساند .

تبلغ ردود أفعال المساند القيم التالية :

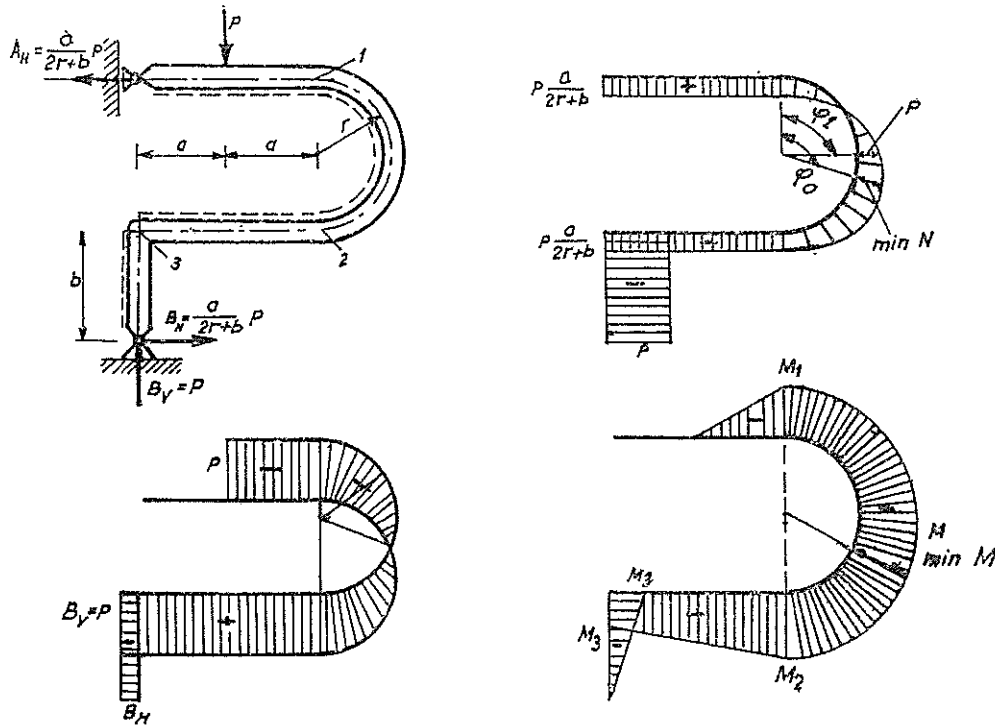
$$A_H = \frac{a}{2r + b} P , \quad B_H = A_H = \frac{a}{2r + b} P , \quad B_V = P$$

٢ - قيم القطع :

في الجزء العلوي من الجائز تساوي القوة الناعمية قيمة رد فعل المسند A_H :

$$N = A_H = \frac{a}{2r + b} P$$

تحتسب قوى القطع $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ وعزم الانعطاف $M(\varphi)$ ضمن الجبال نصف الدائري بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع من الجائز والممثل في الشكل (2-138) .



شكل 2.138

من أجل القوة الناعمية ينتج :

$$N(\varphi) = -P \sin \varphi + A_H \cos \varphi = -\left(\sin \varphi - \frac{a}{2r+b} \cos \varphi\right) P$$

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P ; \quad N(\pi) = -\frac{a}{2r+b} P$$

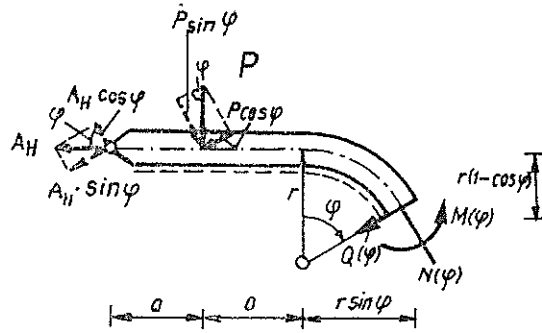
يتم الحصول على المكان φ_0 الذي تأخذ فيه القوة الناعمية قيمتها الاعظمية من العلاقة :

$$N'(\varphi) = -P \left(\cos \varphi + \frac{a}{2r+b} \sin \varphi\right) = 0$$

$$\varphi_0 = -\arctan \frac{2r+b}{a}$$

بواسطة :

$$\sin \varphi_0 = \frac{2r+b}{\sqrt{a^2 + (2r+b)^2}} ; \quad \cos \varphi_0 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + (2r+b)^2}}$$



شكل 2-139

تصبح القوة الناعمية الحدية :

$$N(\varphi_0) = \min N = - \frac{\sqrt{a^2 + (2r+b)^2}}{2r+b} P$$

وفي مجال الجزء الشاقولي فان القوة الناعمية تبلغ :

$$N = - P$$

وبنفس الطريقة يتم الحصول على توزيع القوة العرضية ، حيث تأخذ القوة العرضية على عین القوة P قيمة ثابتة سالبة . وفي الجزء نصف الدائري تصلح العلاقة التالية :

$$Q(\varphi) = - P \cos \varphi - A_H \sin \varphi = - \left(\cos \varphi + \frac{a}{2r+b} \sin \varphi \right) P$$

اما احداثيات القوة العرضية هناك فتبلغ :

$$Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = - \frac{a}{2r+b} P$$

$$Q(\varphi_0) = 0$$

$$Q(\pi) = P$$

من المشتق:

$$Q'(\varphi) = P \left(\sin \varphi - \frac{2}{2r+b} \cos \varphi \right)$$

يمكن إيجاد مكان تشكل القيمة الحدية للقوة العرضية :

$$\varphi_1 = \arctg \frac{a}{2r+b}$$

في نفس المكان تنعدم القوة الناعمية أيضاً . بواسطة العلاقات التالية :

$$\sin \varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (2r+b)^2}} \quad ; \quad \cos \varphi_1 = \frac{2r+b}{\sqrt{a^2 + (2r+b)^2}}$$

يتم الحصول على القوة العرضية الحدية :

$$Q(\varphi) = \min Q = - \frac{\sqrt{a^2 + (2r+b)^2}}{2r+b} P$$

وفي الجزء الشاقولي تبلغ القوة العرضية ، القيمة التالية :

$$Q = -B_H = -\frac{a}{2r+b} P$$

لقد تبقى الان إيجاد توزيع العزم (مخطط عزم الانعطاف) . يبلغ العزم عند 1 القيمة التالية :

$$M_1 = - P a$$

لتعيين عزم الانعطاف $M(\varphi)$ في الجزء المنحني ينبغي العودة للشكل (2-139) ثانية :

$$M(\varphi) = -A_H r (1 - \cos \varphi) - P (a + r \sin \varphi)$$

$$= -Pr \left[\frac{a}{r} + \sin \varphi + \frac{a}{2r+b} (1 - \cos \varphi) \right]$$

بواسطة المشتق :

$$M'(\varphi) = -P \cdot r \left(\cos \varphi + \frac{a}{2r+b} \sin \varphi \right) = 0$$

يتم الحصول على مكان القيمة الحدية :

$$\varphi_0 = - \arctg \frac{2r+b}{a}$$

أما القيمة الحدية فتبلغ :

$$M(\varphi_0) = \min M = - \left[\frac{r}{2r+b} (\sqrt{a^2 + (2r+b)^2} + a) + a \right] P$$

علاوة على ذلك فإن العزم في نقطة أخرى يبلغ :

$$M(\pi) = M_2 = - a \frac{4r+b}{2r+b} P$$

وللتمكن من تمثيل العزم بيانياً يبقى إيجاد قيمة أخرى للعزم ضرورياً . فالعزم في القطع 3 يبلغ :

$$M_3 = B_H . b = \frac{ab}{2r+b} P$$

مثال 77 :

بتعرض جائز قوسي نصف دائري مسند على مسندين بسيطين لتأثير مسائل ساكن (شكل 2-140).
المطلوب : إيجاد قيم القطع (معادلات ومخططات) .

الحل :

باعتبار أن عرض الجائز هو b وأن الوزن النوعي للسائل هو γ فإن قيمة القوة الموزعة والتي تؤثر بالاتجاه القطري هي :

$$p_n(\varphi) = \gamma b (H - \rho \sin \varphi)$$

أما مركبتها بالاتجاهين x, z فتبلغ :

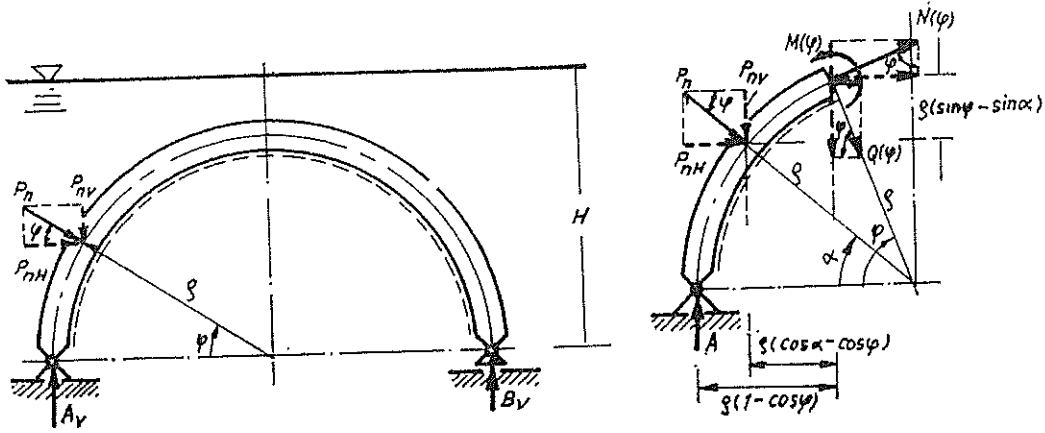
$$p_{nx}(\varphi) = p_n \cos \varphi$$

$$p_{nz}(\varphi) = p_n \sin \varphi$$

لقد افترض للتسهيل أن ضغط الماء يؤثر على محور القضيبي .

١ - ردود أفعال المساند

سيتم إيجاد ردود أفعال المساند، في حالة اعتبار التناظر ، من العلاقة التالية :



شكل 2-140

$$A_v - \int_0^{\pi/2} p_{nz} \rho d\varphi = 0$$

وبذلك ينتج :

$$A_v = B_v = \gamma b \rho \left(H - \frac{\pi}{4} \rho \right)$$

٢ - قيم القطع

لايجاد قيم القطع يجرى في المكان φ قطعاً ثم ترسم عليه قوى القطع $N(\varphi)$ و $Q(\varphi)$ وكذلك عزم الانعطاف $M(\varphi)$ وذلك كما يشير الشكل (2-140) .
بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي ينتج .

$$A_v - \int_0^{\varphi} (\alpha) \rho d\alpha + N(\varphi) \cos \varphi - Q(\varphi) \sin \varphi = 0$$

وبتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي ينتج :

$$\int_0^{\varphi} p_{nz}(\alpha) \rho d\alpha + N(\varphi) \sin \varphi + Q(\varphi) \cos \varphi = 0$$

اما تطبيق شرط توازن العزوم فيعطى:

$$A_v \rho (1 - \cos \varphi) - \int_0^\varphi p_{nz}(\alpha) \rho (\cos \alpha - \cos \varphi) \rho d\alpha \\ - \int_0^\varphi p_{nx}(\alpha) \rho (\sin \varphi - \sin \alpha) \rho d\alpha - M(\varphi) = 0$$

من العلاقات السابقة يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة :
القوة الناعمية :

$$N(\varphi) = - \frac{\gamma b \rho^2}{4} \left(4 \frac{H}{\rho} - \pi \cos \varphi - 2 \sin \varphi + 2 \varphi \cos \varphi \right)$$

القوة العرضية :

$$Q(\varphi) = \frac{\gamma b \rho^2}{4} (2 \varphi - \pi) \sin \varphi$$

عزم الانعطاف :

$$M(\varphi) = \frac{\gamma b \rho^3}{4} [2 \sin \varphi - 2 \varphi \cos \varphi - \pi (1 - \cos \varphi)]$$

تقع القيمة الاعظمية للقوة الناعمية في قمة الجائز :

$$\max N = - \gamma b \rho^2 \left(\frac{H}{\delta} - 0,5 \right)$$

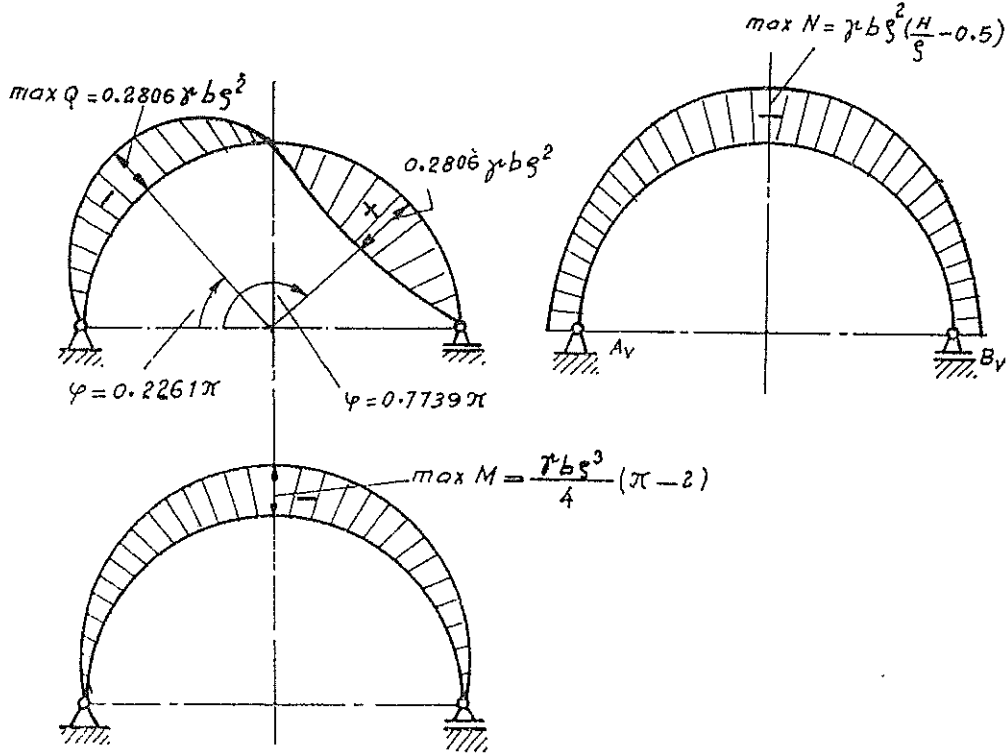
وكذلك أيضاً لعزم الانعطاف:

$$\max M = - \frac{\gamma b \rho^3}{4} (\pi - 2)$$

بينما تأخذ القوة العرضية قيمتها الاعظمية :

$$\max Q = \pm 0,2806 \gamma b \rho^2$$

عند النقاط $\varphi = 0,2261\pi$ و $\varphi = 0,7739\pi$.
لقد تم في الشكل (2-141) تمثيل مخططات قيم القطع .



شكل 2-141

٢ - ١٢ أمثله على الطريقة العكسية .

يرمز لطريقة إيجاد مخطط القوة العرضية وتمييز الحمولات المؤثرة على الانشاءات بالاستعانة بمخطط عزم الانعطاف بالطريقة العكسية .

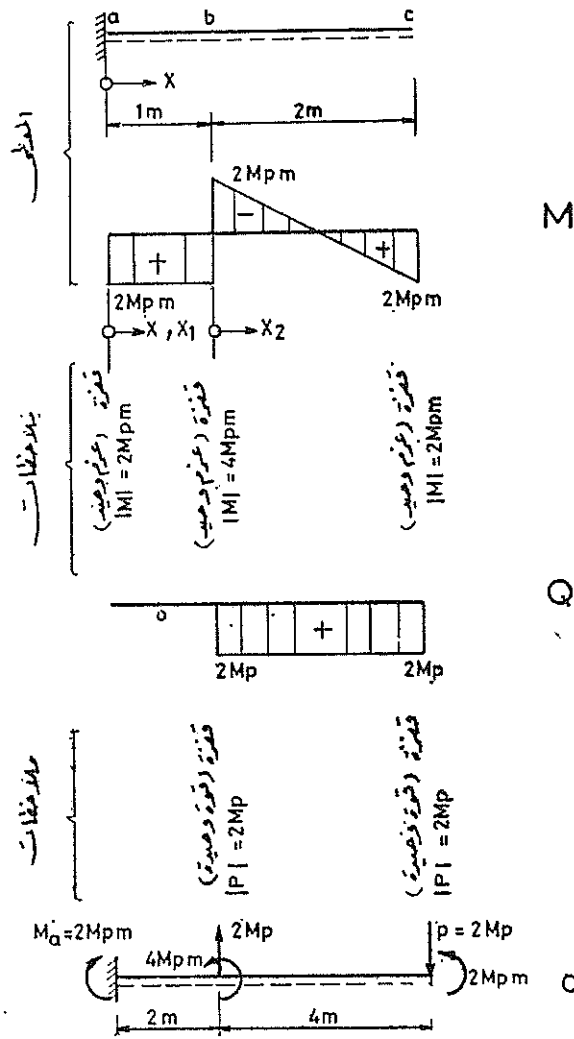
مثال 78 .

المعطى : أبعاد الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-142) ومخطط عزم الانعطاف M واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

١ - إيجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ - تمييز الحمولات التي تؤثر على الجائز والتي تؤدي لتشكيل مخطط عزم الانعطاف المعطى .



شكل 2-142

الحل :

آ - تحديد المجالات :

حسب مخطط M فإن الجائز يقسم الى مجالين ، الاول $0 \leq x \leq 1m$ والثاني $1m \leq x \leq 3m$.

ب - تعيين تابع Q و q لكل مجال بالاستعانة بالعلاقات التفاضلية .

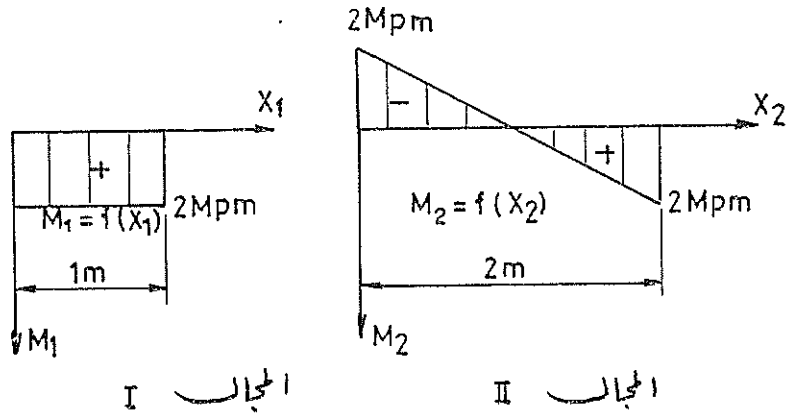
المجال I $(0 \leq x_1 \leq 1m)$.

لقد اختير الاحداثي x_1 بشكل مناسب ويمكن ان يخالف اتجاهه اتجاه الاحداثي x . فاذا تخالف الاحداثيان بالاتجاه وجب كتابة العلاقة التفاضلية بالشكل التالي :

$$\frac{d M_1}{d x} = - \frac{d M_1}{d x_1} = Q_1$$

من الشكل (2-143) يمكن الكتابة :

$$M_1 = + 2 Mpm = \text{const}$$



شكل 2-143

باستخدام العلاقات التفاضلية ينتج :

$$\frac{d M_1}{d x_1} = + Q_1 = 0$$

$$\frac{d Q_1}{d x_1} = - q_1 = 0$$

تشير هذه العلاقة لعدم وجود قوى موزعة في هذا المجال .

المجال II ($0 \leq x_2 \leq 2 \text{ m}$) .

من الشكل (2-143) يمكن الكتابة :

$$M_2 = - 2 + 2 x_2$$

$$\frac{d M_2}{d x_2} = Q_2 = 2$$

هذه العلاقة تشير الى وجود قوى وحيدة .

$$\frac{d Q_2}{d x_2} = - q_2 = 0$$

من هذه العلاقة يتبين ان المجال II لا يحتوي على قوى موزعة .

ج - رسم مخطط Q .

لقد تم في الشكل (2-142) رسم مخطط Q .

د - وضع ملاحظات على مخطط M و Q :

مثلا قفزة في مخطط M تعني تأثير عزم وحيد في تلك النقطة قيمته المطلقة تساوي طول القفزة . وقفزة في مخطط Q تعني تأثير قوة وحيدة في تلك النقطة قيمتها المطلقة تساوي طول القفزة والنخ (شكل 2-142) .

هـ - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية .

لتحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية يقطع الجائز بعد حدوث القفزة مباشرة .

تفترض اتجاهات القيم المنقطة في البداية كئيفياً ثم تحدد بعد ذلك بواسطة الحسابات .

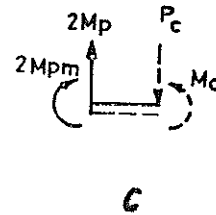
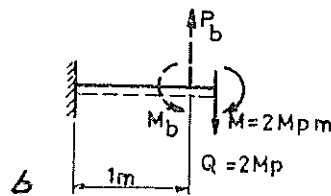
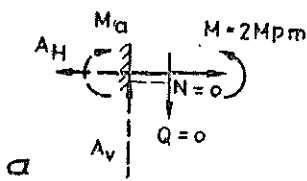
بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-144a) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : A_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A_V = 0$$

$$\Sigma M = 0 : M_a = + 2 \text{ Mpm}$$

تؤكد الاشارة الموجبة صحة الاتجاه المختار للعزم M_a .



شكل 2-144

وبتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-144b) ينتج :

$$\Sigma V = 0 : P_b = + 2 M_p$$

$$\Sigma M_1 = 0 : M_b = 2 + 2 = + 4 M_{pm}$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-144c) فيعطي :

$$\Sigma V = 0 : P_c = + 2 M_p$$

$$\Sigma M_2 = 0 : M_c = + 2 M_{pm}$$

و - المحولات التي تؤثر على الجائز :

لقد تم في الشكل (2-142) تمثيل المحولات التي تؤثر على الجائز .

مثال 79 :

المعطى : ابعاد الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-145) ومخطط عزم الانعطاف M (ان اشارة 0 في مخطط M تعني ان المنحني يحتوي في تلك النقطة على مماس افقي) واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

١ - ايجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ - تعيين المحولات التي ادت لتشكيل مخطط عزم الانعطاف المعطى .

الحل :

أ - تحديد المجالات :

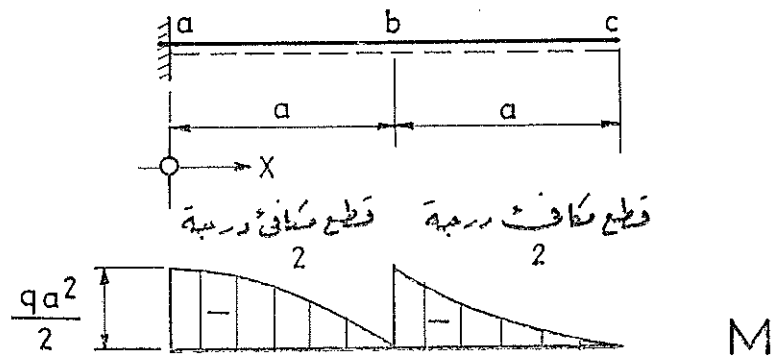
يقسم الجائز لجالين ، الاول $0 \leq x \leq a$ والثاني $a \leq x \leq 2a$.

ب - تعيين معادلات q, Q لكل مجال باستخدام العلاقات التفاضلية :

المجال I ($0 \leq x_1 \leq a$) (شكل 2-146) .

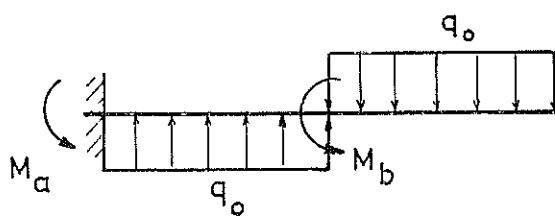
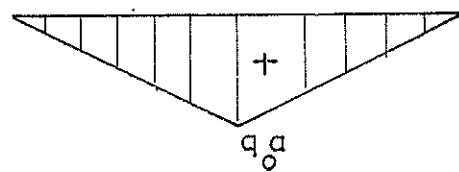
معادلة القطع المكافئ من الدرجة الثانية العامة :

$$M_1 = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3$$



$$|M| = q \frac{a^2}{2}$$
 (قيمة عزم قصير)

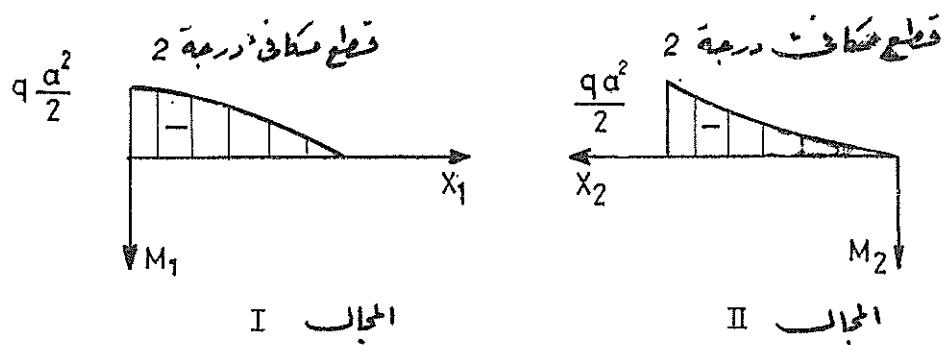
$$|M| = q \frac{a^2}{2}$$
 (قيمة عزم قصير)



شكل 2-145

شروط الاطراف اللازمة لتحديد الثوابت C_1, C_2, C_3 :

$$M_1'(x_1 = 0) = 0 : C_2 = 0$$



شكل 2-146

$$M_1 (x_1 = 0) = - \frac{q_0 a^2}{2} : C_3 = - \frac{q_0 a^2}{2}$$

$$M_1 (x_1 = a) = 0 : C_1 = \frac{q_0 a^2}{2 a^2} = + \frac{q_0}{2}$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلة العامة ينتج :

$$M_1 = \frac{q_0}{2} x_1^2 - \frac{q_0 a^2}{2}$$

يعطي استخدام العلاقات التفاضلية ما يلي :

$$\frac{d M_1}{d x_1} = Q_1 = + q_0 x_1$$

($Q_1 +$ لان x, x_1 لهما نفس الاتجاه) .

$$x_1 = 0 : Q_1 = 0$$

$$x_1 = a : Q_1 = + q_0 a$$

$$\frac{d Q_1}{d x_1} = - q = q_0$$

تشير هذه العلاقة لوجود حمولة موزعة بانتظام شدتها q_0 وتوجهه للأعلى (بعكس اتجاه z) .

المجال II ($0 \leq x_2 \leq a$) (شكل 2-146) :

أن معادلة عزم الانعطاف الممثلة بقطع مكافئ من الدرجة الثانية هي :

$$M_2 = C_4 x_2^2 + C_5 x_2 + C_6$$

لقد اختير اتجاه x_2 كما هو مبين في الشكل (2-145) لانعدام اغلب الثوابت .

شروط الاطراف اللازمة لتعيين الثوابت C_4, C_5, C_6 :

$$M_2 (x_2 = 0) = 0 : C_6 = 0$$

$$M_2' (x_2 = 0) = 0 : C_5 = 0$$

$$M_2(x_2 = a) = -\frac{q_0 a^2}{2} : C_4 = -\frac{q_0}{2}$$

بتبديل قيم الثوابت في المعادلة العامة يتم الحصول على العلاقة النهائية التالية :

$$M_2 = -\frac{q_0}{2} x_2^2$$

بالاستعانة بالعلاقات التفاضلية يتم الحصول على المعادلات المطلوبة :

$$\frac{d M_2}{dx_2} = -Q_2 = -q_0 x_2$$

($-Q_2$ لان اتجاه x_2 يعاكس اتجاه x) .

$$x_2 = 0 : Q_2 = 0$$

$$x_2 = a : Q_2 = q_0 a$$

$$\frac{d Q_2}{dx_2} = +q_2 = -q_0$$

($+q_2$ لان اتجاه x_2 يعاكس اتجاه x) . تشير هذه العلاقة لتأثير حمولة موزعة بانتظام شدتها q_0 وتوجه للأسفل .

ج - رسم مخطط Q

لقد تم في الشكل (2-145) رسم مخطط Q .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز .

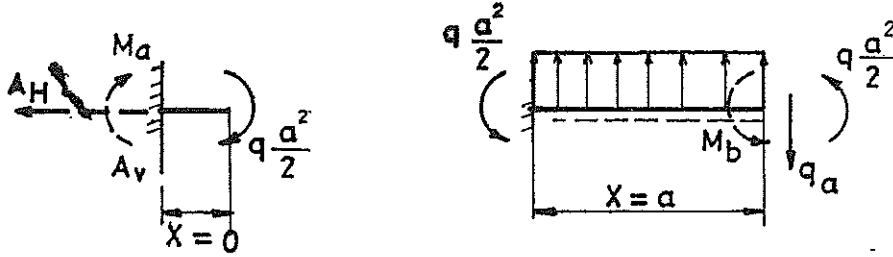
بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-147) ينتج :

$$\sum H = 0 : A_H = 0$$

$$\sum V = 0 : A_V = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M_a = - \frac{q_0 a^2}{2}$$

(إشارة السالب تعني ان الاتجاه المفروض للعزم M_a غير صحيح) .



شكل 2-147

وبتطبيق شروط التوازن على القطع الابر (شكل 2-147) ينتج :

$$\sum V = 0 : q_0 a - q_0 a = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M_b + \frac{q_0 a^2}{2} - \frac{q_0 a^2}{2} - q_0 a \frac{a}{2} = 0 : M_b = + \frac{q_0 a^2}{2}$$

(إشارة الموجب تعني ان الاتجاه المفروض للعزم M_b صحيح) .

هـ - المحولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-145) تمثيل المحولات التي تؤثر على الجائز .

مثال 80 :

المعطى : ابعاد الجائز البارز (الظفر) الممثل في الشكل (2-148) ومخطط عزم الانعطاف واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

١ - إيجاد مخطط Q (القوة العرضية) .

٢ - تعيين المحولات التي تؤثر على الجائز والتي تؤدي لتشكيل عزم الانعطاف المعطى .

الحل

أ - تحديد مجالات الجائز

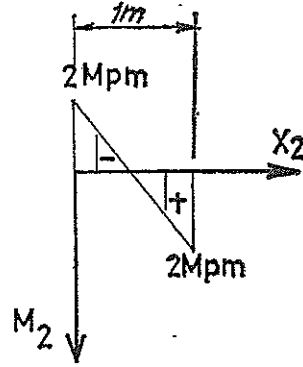
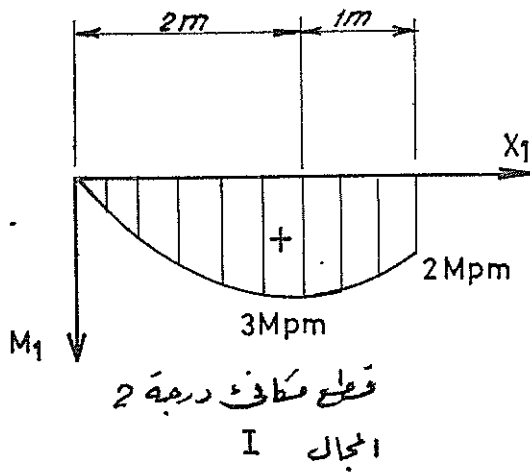
يتألف الجائز من مجالين . الاول $0 \leq x \leq 1m$ والثاني $1m \leq x \leq 4m$.

ب - تعيين معادلات Q, q لكل مجال وذلك بالاستعانة بالعلاقات التفاضلية :

المجال $(0 \leq x_1 \leq 3m)$ (شكل 2-149) :

معادلة القطع مكافئ من الدرجة الثانية العامة :

$$M_1 = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3$$



شكل 2-149

شروط الاطراف لتعيين الثوابت C_1, C_2, C_3 :

$$M_1 (x_1 = 0) = 0 : C_3 = 0$$

$$M_1 (x_1 = 2m) = 4Mpm : 4 C_1 + 2 C_2 = 4$$

$$M_1 (x_1 = 3m) = 3Mpm : 9 C_1 + 3 C_2 = 3$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$C_1 = -1 , C_2 = +4 , C_3 = 0$$

ببديل قيم الثوابت في المعادلة العامة للقطع المكافئ يتم الحصول على معادلة عزيم الانعطاف :

$$M_1 = -x_1^2 + 4x_1$$

وبالاشتقاق ينتج :

$$\frac{dM_1}{dx_1} = +Q_1 = -2x_1 + 4$$

($+Q_1$ تطابق اتجاه x_1 مع اتجاه x) .

$$x_1 = 0 : Q_1 = 4 \text{ Mp}$$

$$x_1 = 3\text{m} : Q_1 = -2 \text{ Mp}$$

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = -q_1 = -2$$

هذا يعني ان قوة موزعة بانتظام شدتها 2 Mp/m تؤثر في هذا المجال .

المجال II ($0 \leq x_2 \leq 3\text{m}$) (شكل 2-149) :

$$M_2 = -2 + 4x_2$$

$$\frac{dM_2}{dx_2} = Q_2 = 4$$

$$\frac{dQ_2}{dx_2} = -q_2 = 0$$

(- تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولة موزعة) .

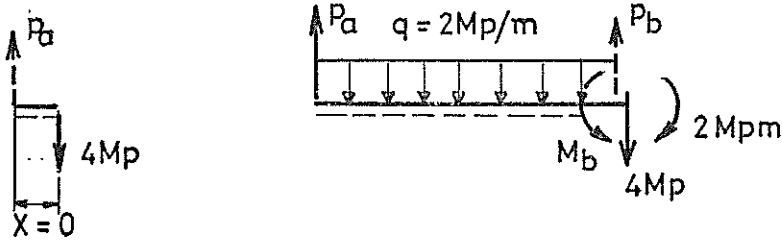
ج - رسم مخطط Q

لقد تم في الشكل (2-148) تمثيل مخطط القوة العرضية ، كما وقد تم وضع بعض الملاحظات الهامة عليه وعلى مخطط M .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجانز :

بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-150) ينتج :

$$\Sigma V = 0 : P_a = +4 \text{ Mp}$$



شكل 2-150

ويعطى تطبيق شروط التوازن على القطع الایسر (شكل 2-150) مايلي :

$$\Sigma V = 0 : - P_b + 4 + 2 \cdot 3 - 4 = 0 : P_b = 6 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_b - 2 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot 3 = 0 : M_b = + 5 \text{ Mpm}$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الایمن (شكل 2-150) فيعطى :

$$\Sigma V = 0 : A_v = +4 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_a = + 2 \text{ Mpm}$$

هـ - المحولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-148) تمثيل المحولات التي تؤثر على الجائز .

مثال 81 :

المعطى : ابعاد الجائز تمتد الاطراف (شكل 2-151) ومخطط عزم الانعطاف واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب :

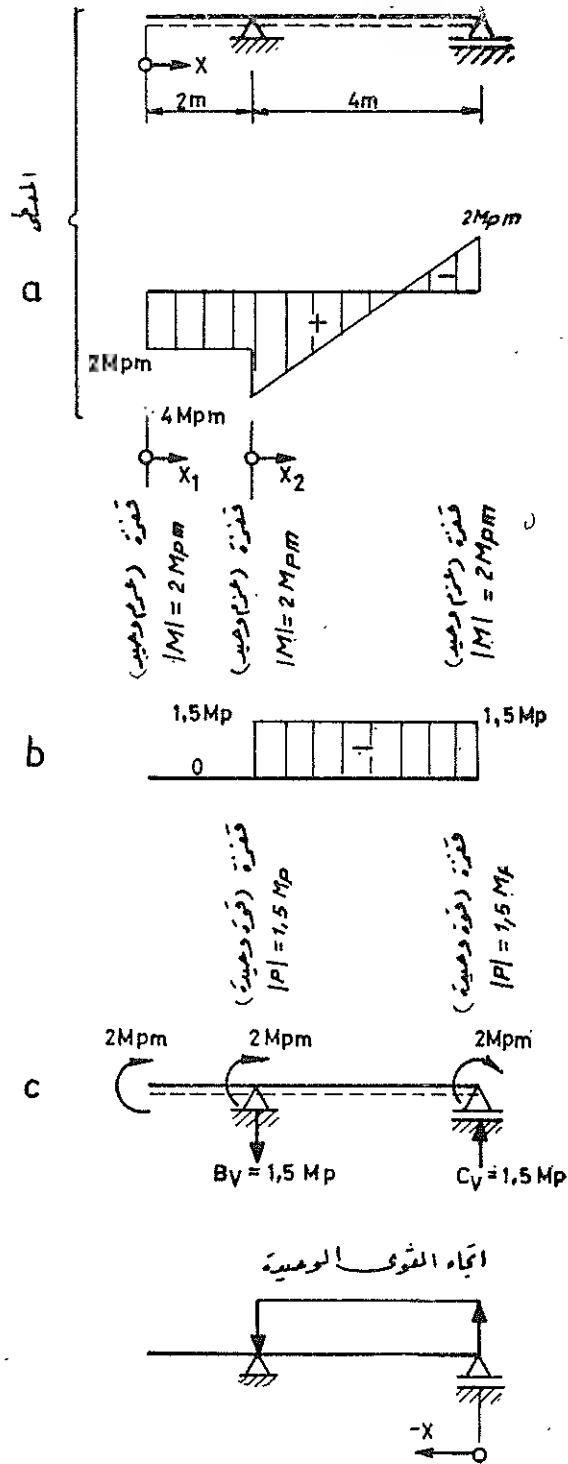
١ - ايجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ - تعيين المحولات التي تؤثر على الجائز والتي ادت لتشكيل مخطط M المعطى .

الحل :

أ - تحديد مجالات الجائز

حسب مخطط M فان الجائز تتألف من مجالين . الاول $0 \leq x \leq 2m$ والثاني $2m \leq x \leq 6m$.

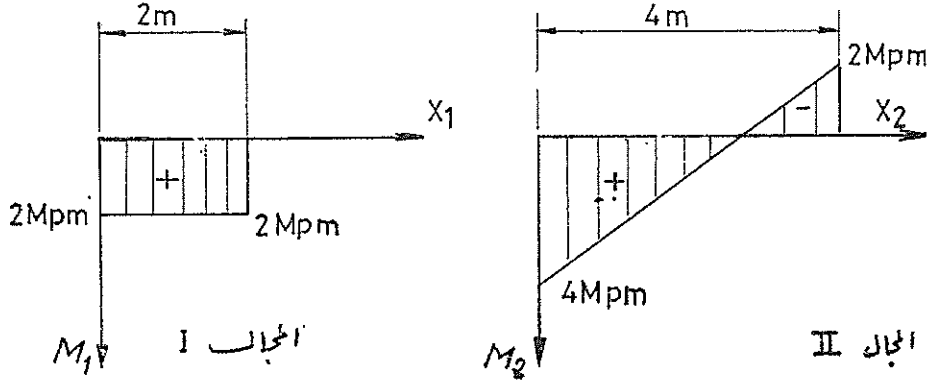


شكل 2-151

ب - تعيين معادلات q و Q لكل مجال وذلك باستخدام العلاقات التفاضلية .

المجال I $(0 \leq x_1 \leq 2m)$ (شكل 2-152) :

$$M_1 = + 2 \text{ Mpm} = \text{const.}$$



شكل 2-152

بالاشتقاق المزدوج يتم الحصول على ما يلي

$$\frac{dM_1}{dx_1} = Q_1 = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = - q_1 = 0$$

(هذه العلاقة تشير لعدم وجود حمولات موزعة) .

المجال II $(0 \leq x_2 \leq 4m)$ (شكل 2-152) :

$$M_2 = 4 - \frac{6}{4} x_2 = 4 - 1,5 x_2$$

بالاشتقاق المزدوج ينتج:

$$\frac{dM_2}{dx_2} = Q_2 = - 1,5 \text{ Mp}$$

$$\frac{dQ_2}{dx_2} = - q_2 = 0$$

تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولات موزعة .

ج - رسم مخطط Q

لقد تم في الشكل (2-151) رسم مخطط Q . كما وقد تم وضع ملاحظات هامة على مخطط M و Q .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز .

لقد تم في الشكل (2-151) تحديد اتجاه القوى الوحيدة تخطيطياً .

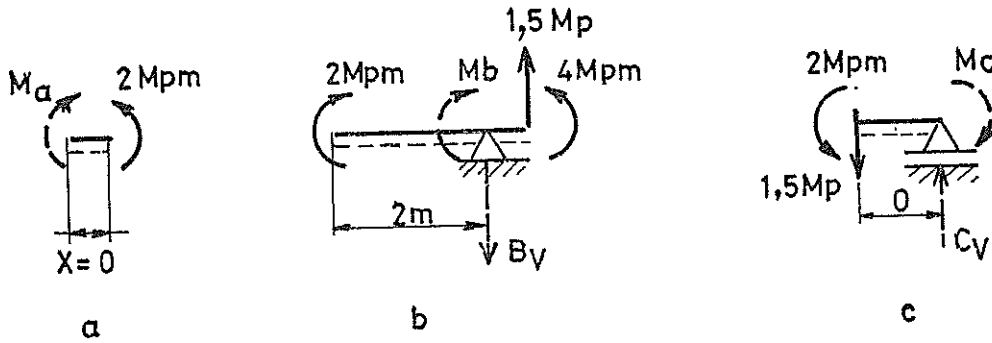
بتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر شكل (2-153p) ينتج :

$$\Sigma M_x = 0 : M_a = + 2 \text{ Mpm}$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-153) فيعطي :

$$\Sigma V = 0 : B_v = 1,5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_b = 2,0 \text{ Mpm}$$



شكل 2-153

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايمن (شكل 2-153c) مايلي :

$$\Sigma V = 0 : C_v = 1,5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_c = 2,0 \text{ Mpm}$$

هـ - المحولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-151) رسم المحولات التي تؤثر على الجائز .

مثال 82 :

المعطى : ابعاد الجائز المفصلي الممثل في الشكل (2-154) ومخطط عزم الانعطاف M واتجاه المحور x والمنطقة المخططة .

المطلوب

١ - إيجاد مخطط القوة العرضية Q .

٢ - تعيين المحولات التي تؤثر على الجائز والتي تؤدي لتشكيل مخطط عزم الانعطاف المعطى .

الحل

١ - تحديد مجالات الجائز:

يتألف الجائز من اربعة مجالات، الاول $0 \leq x \leq 2m$ والثاني $2m \leq x \leq 5m$ والثالث $5m \leq x \leq 7m$ والرابع $7m \leq x \leq 9m$.

ب - تعيين معادلات q و Q لكل مجال وذلك باستخدام العلاقات التفاضلية :

المجال I ($0 \leq x_1 \leq 2m$) (شكل 2-155a) :

$$M_1 = C_1 + C_2 x_1 = -20 - \frac{30-20}{2} x_1 = -20 - 5 x_1$$

$$\frac{dM_1}{dx_1} = + Q_1 = -5$$

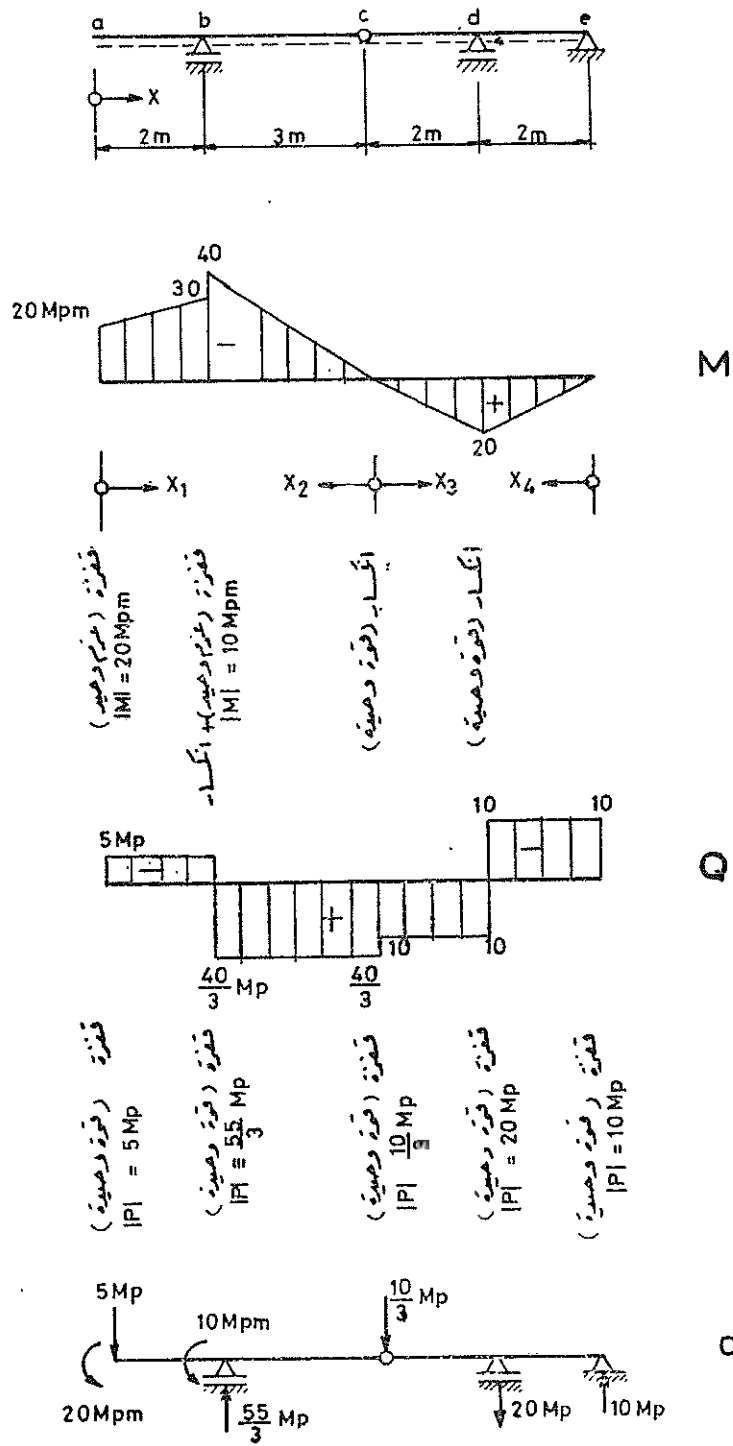
$$\frac{dQ_1}{dx_1} = - q_1 = 0$$

تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولة موزعة في هذا المجال .

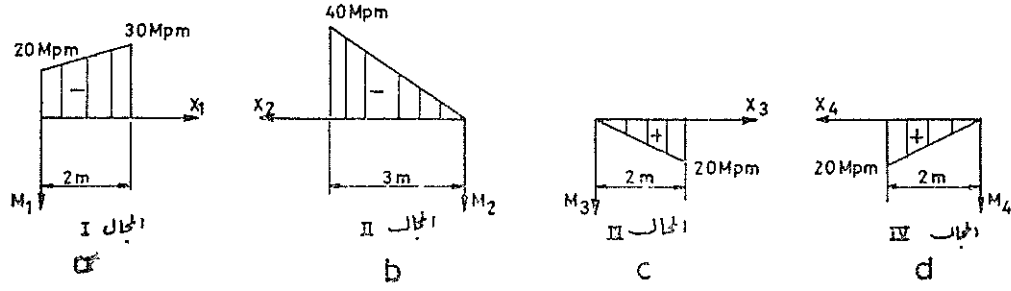
المجال II ($0 \leq x_2 \leq 3m$) (شكل 2-155b) :

$$M_2 = - \frac{40}{3} x_2$$

$$\frac{dM_2}{dx_2} = - Q_2 = - \frac{40}{3} M_p \quad : \quad Q_2 = \frac{40}{3} M_p$$



شكل 2-154



شكل 2-155

(Q_2 - لتعاكس اتجاه x_2 واتجاه x) .

$$\frac{dQ_2}{dx_2} = +q_2 = 0$$

($+q_2$ لتعاكس اتجاه x_2 واتجاه x) .

من هذه العلاقة يتبين ان هذا المجال لا يحتوي على حمولة موزعة .

المجال III ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ m}$) (شكل 2-155c) :

$$M_3 = \frac{20}{2} x_3 = 10 x_3$$

$$\frac{dM_3}{dx_3} = +Q_3 = 10 \text{ Mp}$$

(Q_3 + لان x_3 باتجاه x) .

$$\frac{dQ_3}{dx_3} = -q_3 = 0$$

($-q_3$ لان x_3 باتجاه x) . تشير هذه العلاقة لعدم وجود حمولة موزعة في هذا المجال .

المجال IV ($0 \leq x_4 \leq 2 \text{ m}$) (شكل 2-155d) :

$$M_4 = +\frac{20}{2} x_4 = +10 x_4$$

$$\frac{dM_4}{dx_4} = -Q_4 = +10 \text{ Mp} : Q_4 = -10 \text{ Mp}$$

$$\frac{dQ_4}{dx_4} = +q_4 = 0$$

تشير هذه المعادلة لعدم وجود حمولة موزعة .

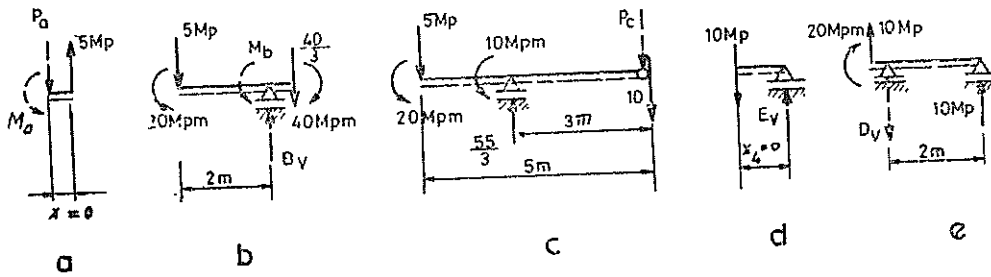
ج - رسم مخطط Q :

لقد تم في الشكل (2-154) رسم مخطط Q . كما وقد تم وضع ملاحظات على كل من مخططي M و Q .

د - تحديد اتجاه القوى والعزوم الخارجية التي تؤثر على الجائز :
يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-156a) العلاقات التالية:

$$\Sigma V = 0 : P_a = 5 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_a = 20 \text{ Mpm}$$



شكل 2-156

كما يعطي تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-156b) ما يلي :

$$\Sigma V = 0 : B_v = 5 + \frac{40}{3} = \frac{55}{3} \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : M_b = 40 - 20 - 5 \cdot 2 = 10 \text{ Mpm}$$

اما تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر (شكل 2-156c) فيعطي مايلي:

$$\Sigma V = 0 : P_c = -10 - 5 + \frac{55}{3} = \frac{10}{3} \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : 10 + 20 + 5.5 - \frac{55}{3} \cdot 3 = 0$$

وتمطي شروط التوازن المطبقة على القطع اليمين (شكل 2-156d) مايلي :

$$\Sigma V = 0 : E_v = 10 \text{ Mp}$$

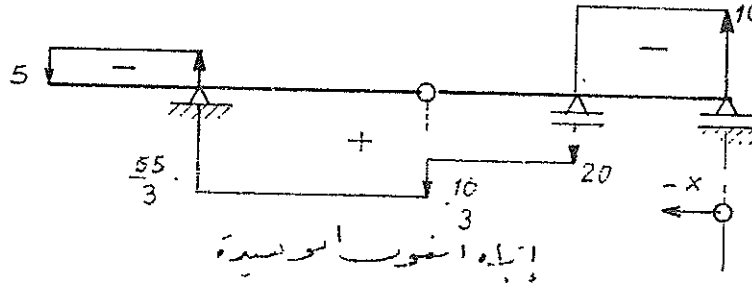
و بتطبيق شروط التوازن على الجزء اليمين المقطوع (شكل 2-156e) ينتج :

$$\Sigma V = 0 : D_v = 10 + 10 = 20 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_x = 0 : -20 + 10 \cdot 2 = 0$$

Q - المحولات التي تؤثر على الجائز

لقد تم في الشكل (2-154) تمثيل المحولات التي تؤثر على الجائز . ولقد تم في الشكل (2-157) تحديد اتجاه القوى الخارجية تخطيطياً .



شكل 2-157

٢ - ١٣ قانون التفضيد (قانون جمع الأثار):

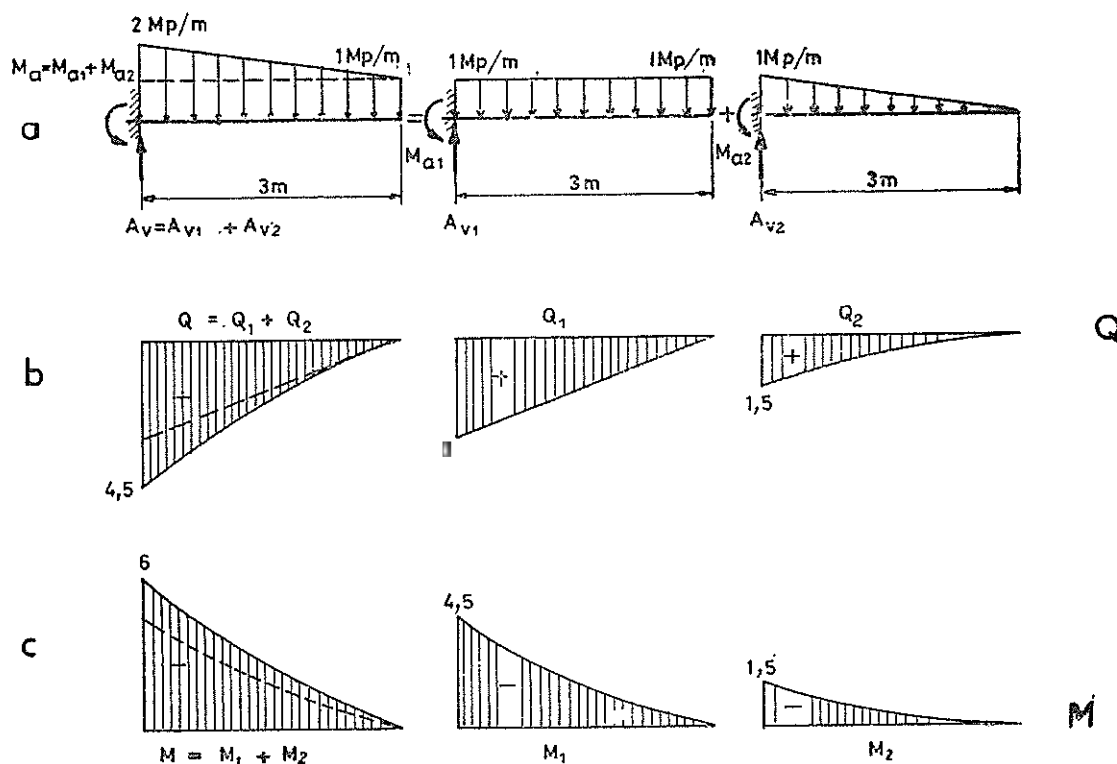
ينص قانون التفضيد (Superpositionsgesetz) على مايلي :

ان شكل القوى العرضية او عزوم الانعطاف او اية قيم اخرى الناتجة عن مجموعتين او اكثر من المحولات يساوي الشكل الناتج عن اضافة القوى العرضية او عزوم الانعطاف او اية قيم ما المتولدة عن كل مجموعة من هذه المحولات على حدة . ومن الممكن ايضاً ان يعبر عن قانون التفضيد تخطيطياً كما يلي :

ان شكل المنحني الذي تكون معادلته مكونة من مجموع دالتين او اكثر يمكن رسمه بجمع منحنيات كل دالة على حدة .

مثال 83 :

حمل جائر بارز (ظفر) بحمولة موزعة على شكل شبه منحرف (شكل 2-158) .
المطلوب : إيجاد مخططات قيم القطع باستخدام قانون التفضيد .



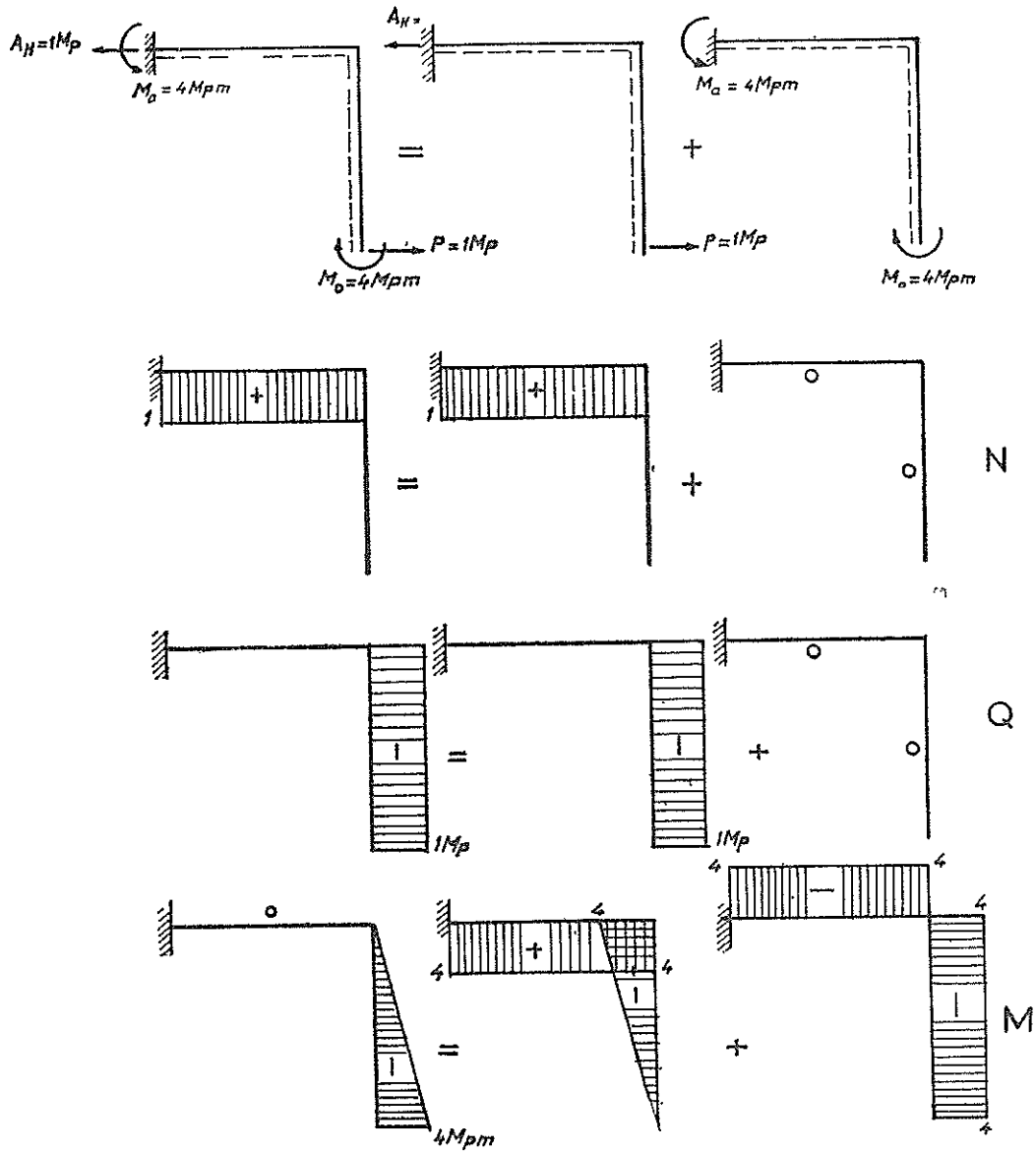
شكل 2-158

الحل :

باستخدام قانون التفضيد تعاد الحمولة الى مجموع حمولتين ، الاولى هي حمولة موزعة بانتظام شدتها 1 Mp/m والثانية هي حمولة خطية شدتها الاعظمية 1 Mp/m (يصاد شبه المنحرف الى مستطيل ومثلث) . ان مخططات القوة العرضية وعزم الانعطاف لكل من الحمولتين معلومة ويسهل رسمها بدقة . للحصول على مخططات قيم القطع الناتجة عن تأثير حمولة على شكل شبه منحرف تجمع مخططات قيم القطع الناتجة عن تأثير الحمولتين الجزئيتين هنا المستطيلة والمثلثية (شكل 2-158) .

مثال 84 :

المعطى : جائر بارز مضلع الشكل (شكل 2-159) يحمل بحمولة مؤلفة من قوة وحيدة P وعزم وحيد M وابعاد الجائر .



شكل 2-159

المطلوب : رسم مخططات قيم القطع باستعمال قانون التنضد .

الحل :

باستخدام قانون التنضد يتم الحصول على قيم القطع المطلوبة (شكل 2-159) .

مثال 85 :

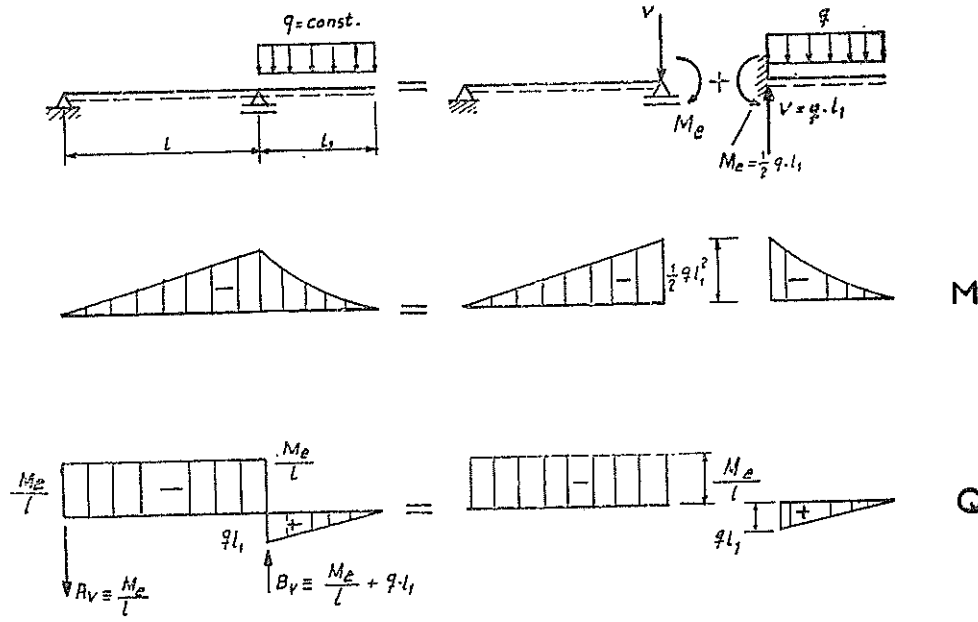
المعطى : جائر ممتد الاطراف (شكل 2-160) وابعاده وشدة الحمل الموزعة بانتظام q التي

تؤثر على جزئه البارز .

المطلوب: رسم مخططات قيم القطع .

الحل :

باستخدام قانون التنبؤ يعاد الجائر الممتد الى جائر بسيط وجائر بارز . تؤثر علاوة على الحمولة الفعلية ، قيم القطع التي نشأت نتيجة لفصل الجائر وهي V و M_e والتي ستعتبر بعد القطع كحمولة خارجية تؤثر بشكل متعاكس على الجائزين الجزئيين . اما ردود افعال المساند وقيم القطع في الجائزين الجزئيين فقد تم ايجادها في امثلة سابقة (شكل 2-160) .



شكل 2-160

٢ - ١٤ الجيزان الشبكية المستوية

٢ - ١٤ - ١ عموميات وتعاريف

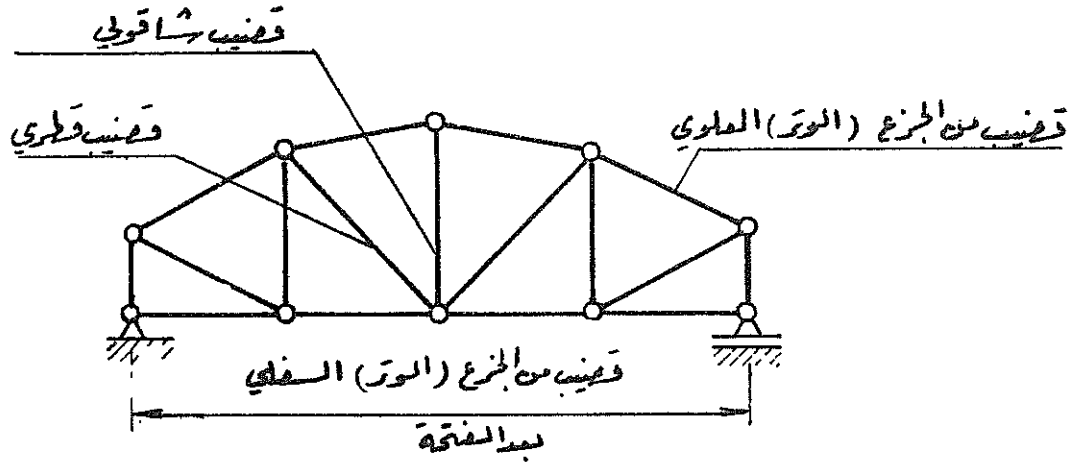
يمكن مبدئياً تعريف الجيزان الشبكية (التي يطلق عليها ايضاً اسم الشبكيات ويقصد فيها الجيزان الشبكية المثالية) بأنها الانشاءات التي تتكون من مجموعة من القضبان ذات المحاور المستقيمة التي تقع في مستو واحد والتي تتصل اطرافها بعضها ببعض اتصالاً مفصلياً بحيث تعطي انشاءاً متماسكاً ، وتبدو الجيزان الشبكية كأنها غزل مفصلي ويطلق على هذا النوع من الانشاءات اسماء اخرى الى جانب الجيزان الشبكية او الشبكيات فتسمى احياناً جمالونات وخاصة فيما يستعمل

منها للسقوف . اما الوظيفة الرئيسية للجائز الشبكي فهي كوظيفة الجائز القضبي ، عبور الفراغات (اجتياز وادي أو أنهر مثلاً) وحمل المحولات .

لقد تم في الفصول السابقة الاصطلاح على تسمية الجيزان المبحوثة هناك بالجيزان القضبية (الجيزان ذات الجدار أو ذات الجسد المليء) وذلك للتفريق بينها وبين الجائز الشبكي الذي ستم دراسته في هذه الفقرة .

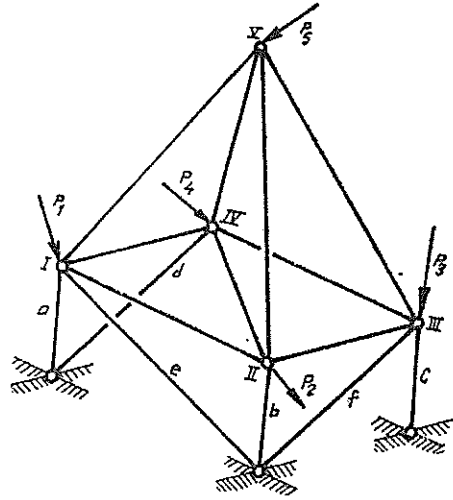
يسمى الجائز ، على العموم ، قضيباً عندما توجد فيه امكانية تشكل قوى ناظمية N وقوى عرضية Q وعزوم انعطاف M ويسمى شبكياً عندما توجد فيه امكانية تشكل قوى ناظمية فقط والتي تسمى حينئذ بقوى القضبان (ولذلك يمكن اعتبار الجائز الشبكي حالة خاصة للجائز القضبي حيث لا تتحمل عناصره الا قوى ناظمية فقط) .

تسمى مجموعة القضبان التي تشكل المحيط الخارجي للجائز الشبكي ، ما عدا القضبان الشاقولية الموجودة على النهاية اليمنى واليسرى ، بقضبان الجزع أو قضبان الوتر ويسمى محورها (الوسط) بالجزع أو الوتر ، تشكل القضبان العلوية للجزع ما تسمى بقضبان الجزع العلوي أو قضبان الوتر العلوي اما محاورها (الوسطى) فتسمى بالجزع العلوي أو الوتر العلوي وتشكل القضبان السفلية للجزع ما يسمى بقضبان الجزع السفلي أو قضبان الوتر السفلي اما محاورها (الوسطى) فتسمى بالجزع السفلي أو الوتر السفلي تقع ما بين قضبان الجزع (العلوي والسفلي) قضبان الحشوة التي تتألف من قضبان قطرية وقضبان شاقولية (شكل 2-161) . يطلق على نقاط اتصال القضبان (قضبان أو أكثر) لاسم عقد الجائز الشبكي . بين الشكل (2-161) مثالا لتركيب شبكي بسيط والاسماء التي تطلق عادة على اجزائه المختلفة .



شكل 2-161

لقد ظهرت العقد (نقاط الاتصال) في الرسم على شكل دوائر لتؤكد حقيقة الاتصال المفصلي عندها، ولن يلتزم دائماً بهذه الطريقة عند رسم الشبكيات في الاشكال التالية . ومع ان اعضاء التركيب الشبكي تتكون عادة من مقاطع عرضية مركبة من الفولاذ مثلاً ، إلا انه سيطلق على كل منها اسم قضيب لسهولة التسمية . اذا وقعت كافة قضبان الجائز الشبكي في مستوي واحد عندئذ يقال عنه انه جائز شبكي مستوي اما اذا لم تقع كافة القضبان في نفس المستوي عند ذلك يقال عنه انه جائز شبكي فراغي (شكل 2-162) .



شكل 2-162

تشتمل الجيزان الشبكية على انواع كثيرة يفرق بينها :

آ - حسب اشكال الجزع (الوتر) الى ما يلي :

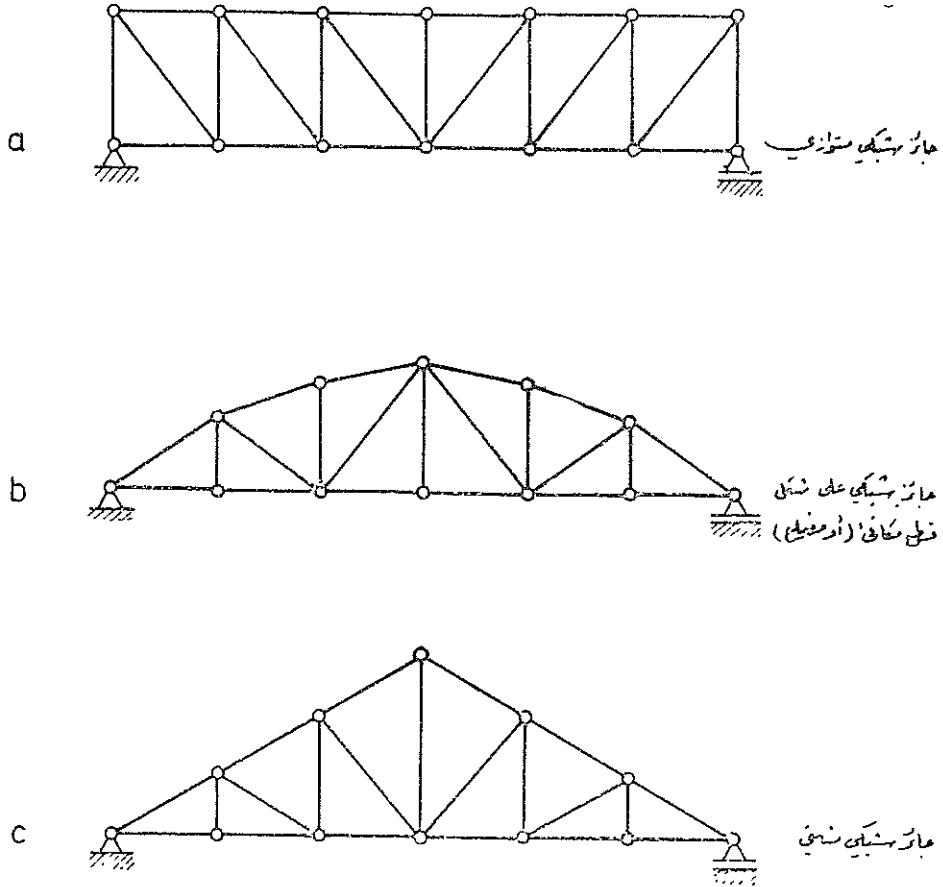
جائز شبكي متوازي (شكل a 2-163) : اذا كان الجزع (الوتر) العلوي والجزع السفلي متوازيين . جائز شبكي مثلثي (شكل c 2-163) : اذا وقعت عقد احد الجزعين على اضلاع مثلث . جائز شبكي على شكل قطع مكافئ (شكل b 2-163) : اذا وقعت عقد احد الجزعين على محيط قطع مكافئ (اذا وقعت ، على سبيل المثال ، عقد الجزع العلوي على محيط قطع مكافئ ووقعت عقد الجزع السفلي على مستقيم) .

ب - او حسب اشكال تركيب القضبان القطرية الى :

جائز شبكي مثلثي بدون قضبان شاقولية : (شكل a 2-164) .

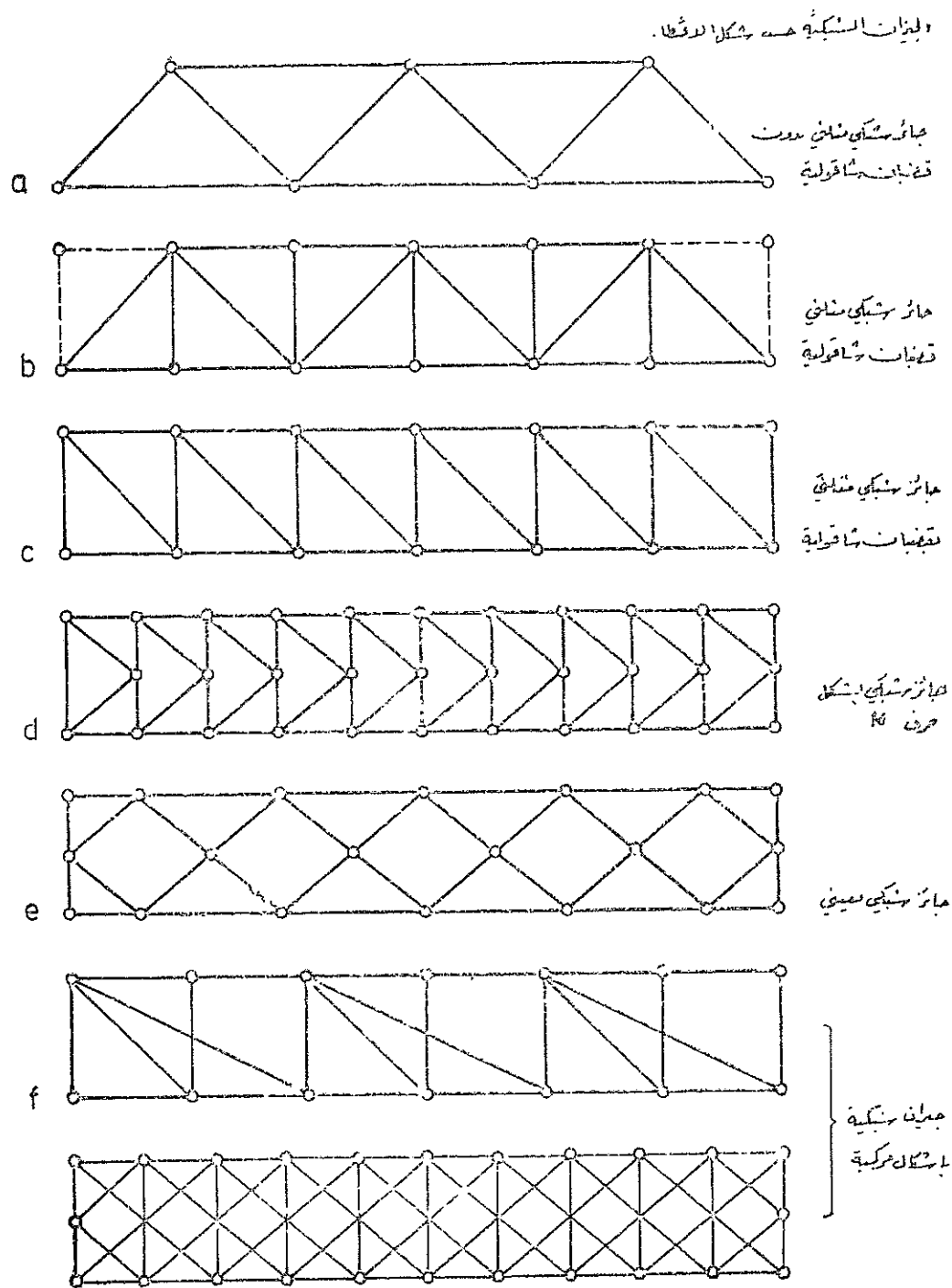
جائز شبكي مثلثي بقضبان شاقولية (شكل b,c 2-164) .

الجزيئات الشبكية حسب شكل المربع

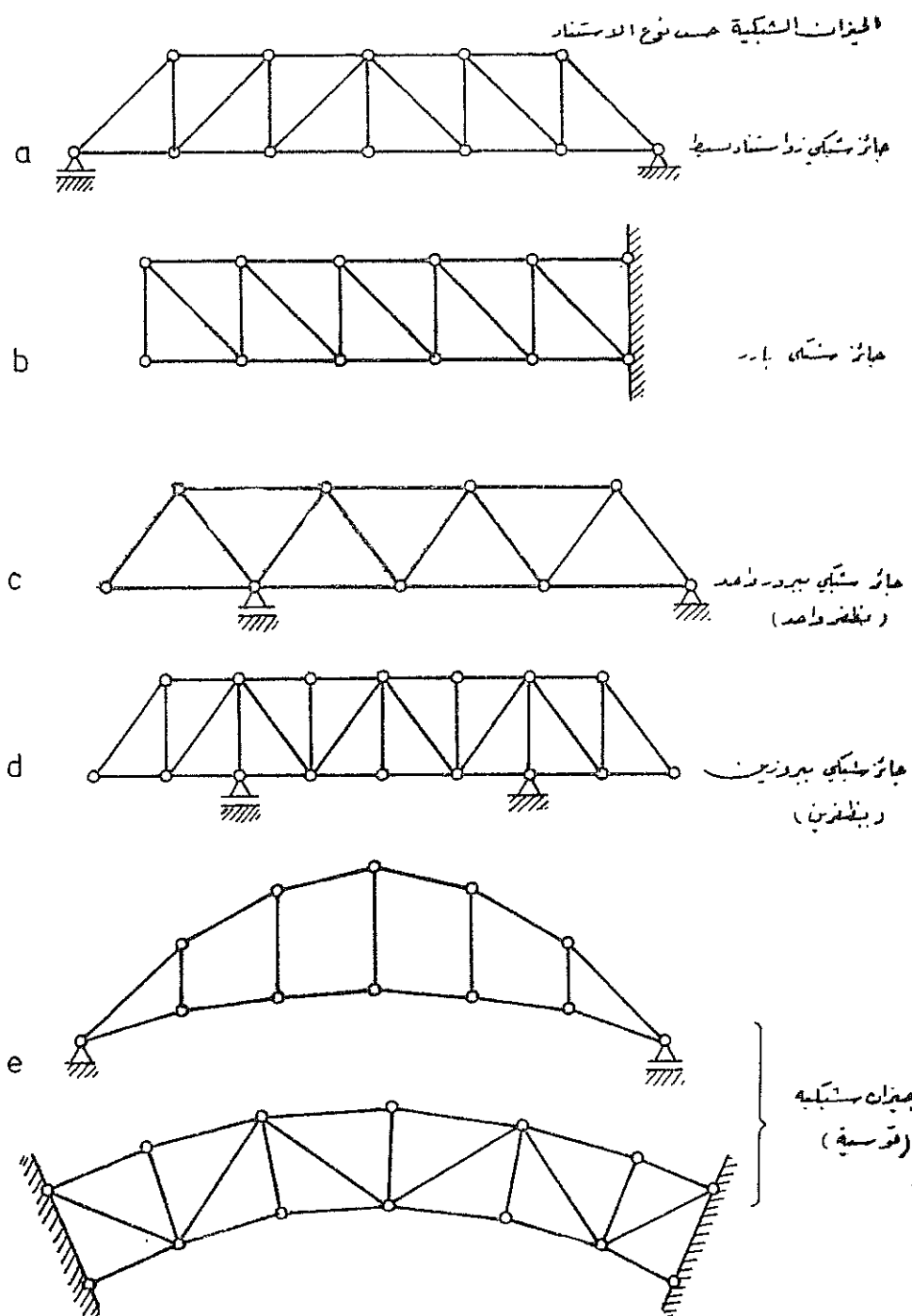


شكل 2-163

- جائز شبكي على شكل حرف K (شكل 2-164d) .
- جائز شبكي معيني (شكل 2-164e) . كما ان هناك انواع اخرى (شكل 2-165g,b) .
- ج - او حسب نوع الاستناد الى :
 - جائز شبكي ذو استناد بسيط (شكل 2-165a) .
 - جائز شبكي بارز (شكل 2-165 b) .
 - جائز شبكي يبروز واحد (بظفر واحد) (شكل 2-165 c) .
 - جائز شبكي يبروزين (بظفرين) (شكل 2-165 d) .
 - جائز شبكي قوسي (شكل 2-165e) .
- وهناك امكانيات تقسيم اخرى للجزيئات الشبكية .



شكل 2-164



شكل 2-165

تستعمل الجيزان الشبكية في مجالات متعددة اهمها في الجسور وفي الروافع وفي الابراج (الكهربائية وابراج المراقبة) وفي السقالات وفي اغراض اخرى كثيرة . يجب ان تتحقق في الجيزان الشبكية (والتي يقصد فيها الجيزان الشبكية المثالية) المدروسة الفرضيات التالية :

١ - إن محاور القضبان هي مستقيمة (يفهم تحت كلمة محور القضيب انه الخط الواصل بين جميع مراكز ثقل المقاطع العرضية للقضيب) .

٢ - يتم ارتباط القضبان ببعضها مركزياً ، اي ان محاور قضبان العقدة الواحدة تلتقي في نقطة واحدة ، والتي تسمى بنقطة الدوران .

٣ - تتصل القضبان مع بعضها في العقد اتصالاً مفصلياً عديم الاحتكاك (مثالياً) بحيث لا توجد فيها أية مقاومة على الاطلاق لدوران هذه القضبان وبالتالي لا توجد فيها أية عزوم .

٤ - تؤثر الحمولات التي تتعرض لها الشبكيات في العقد فقط وهي تتألف من حمولات وحيدة . وبذلك لا توجد أية حمولات خارجية تؤثر على القضبان مباشرة ، اي بين العقد . نتيجة للفرضين ٣ و ٤ ولان جميع قضبان الجيزان الشبكية مستقيمة ينتج ما يلي : تتعرض قضبان الجيزان الشبكية لقوى ناظمية دون أن تتولد فيها أية قوى عرضية او عزوم انعطاف .

وتكون هذه القوى الناعظمية اما قوى ضغط او شد وتبعاً لذلك فان هذه القضبان هي اما ان تكون قضبان ضغط او قضبان شد وتسمى القوى التي تحسب بهذه الطريقة بالقوى الاساسية (بقوى القضبان الاساسية) . وبما لا شك فيه ان الفرضين الاساسيين المذكورين (٣ و٤) لا يمكن تحقيقهما في الطبيعة تحقيقاً كاملاً ، اذ ان قضبان الجيزان الشبكية الفعلية تتعرض ولاشك لحوامل موزعة فيما بين اطرافها عند المفاصل ومن هذه الحمولات الوزن الذاتي لهذه القضبان ، كما انها ترتبط بعضها ببعض عند اطرافها ارتباطاً وثيقاً عن طريق مسامير البراشيم او عن طريق اللحام (إذا لا يمكن في الجيزان الشبكية الفعلية التكلم عن المفاصل عديمة الاحتكاك) وهذا كله من شأنه أن يولد عزوم انعطاف وقوى عرضية في قضبان الجيزان الشبكية بالاضافة الى القوى الناعظمية ، بل ان من شأنه ايضاً ان يغير قيم القوى الناعظمية التي حسبت على اساس الفرضين السابقين ولكن هذا التغيير على كل حال هو مما يمكن تجاهل قيمته في التصميمات المبدئية . وتسمى الاجهادات الاضافية ، التي تعبر عن شدة توزيع القوى الداخلية في قضبان الجيزان الشبكية ، المتولدة عن الاختلال بالفرضين الاساسيين وما يتبع ذلك من قوى عرضية وعزوم إنعطاف بالاجهادات الثانوية ويكتفى عادة عند تصميم الجيزان الشبكية بحساب القوى الاساسية ويراعى خفض الاجهادات المسموح بها في التصميم بما يكفي لمواجهة الاجهادات الثانوية الاضافية . فمثلاً يقوم المهندسون في انشاءات الابنية العالية باعمالها ، اما في انشاءات الجسور

فتؤخذ بعين الاعتبار . على كل حال ليس حساب الاجهادات الثانوية بالأمر السهل وإنما هو طريق معقد وصعب . لازالة الاخلال بالشرط الرابع الناتج عن تأثيرالوزن الذاتي لقضبان الجائز الشبكي ، يستعاض عادة عن الوزن الذاتي بقوى وحيدة تكافئه وتؤثر في عقدالجائز الشبكي .

أما بالنسبة للحمولات الناتجة عن وزن تكسية (تغطية) الجائز الشبكي ووزن المواد المازلة في السقوف وكذلك وزن الثلوج والرياح فيمكن تحويل تأثيرها الى عقد الجائز الشبكي بواسطة تصميم مناسب .

ان الشرط الثاني الذي يفترض ربط القضبان ربطاً مركزياً يتحقق مثلاً في الجيزان الشبكية المعدنية المبرشمة بشكل غير دقيق . اما الشرط الاول الذي يشترط في محاور القضبان ان تكون مستقيمة فيتحقق في الجائز الشبكي الفعلي تحقيقاً شبه دقيق . تسمى الجيزان الشبكية التي تتحقق فيها الفرضيات السابقة وخاصة الفرضان الاساسيان (٣و٤) بالجيزان الشبكية المثالية سيقنصر في هذا الكتاب على النوع المثالي من الجيزان الشبكية وعلى طرائق تحديد القوى في اجزائه المختلفة فقط .

٢ - ١٤ - ٢ العلاقة التي تربط بين عدد القضبان وعدد العقد :

لكي يكون التركيب الشبكي مقررأً ستاتيكيأً وفي نفس الوقت متماسكاً غير قابل للتصدع في اي جزء من اجزائه ، ينبغي ان تتحقق فيه علاقة ما بين عدد القضبان وعدد العقد.ومن الممكن متابعة التركيب الشبكي باحدى الصورتين التاليتين :

آ - الصورة الاولى : (شكل 2-I66) :

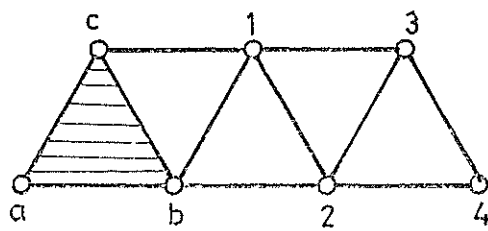
في هذا النوع من الجيزان الشبكية يبدأ التركيب بمثلث abc مكون من ثلاثة قضبان وثلاث عقد ثم يتابع التركيب بحيث يزداد عدد القضبان بمعدل قضيبين جديدين لكل عقدة اضافية ، وقد رقت العقد في جميع الشبكيات الموضحة في الشكل (2-166) حسب ترتيب تكوينها بالنسبة لمثلث البدء abc ومن الممكن في هذه الحالة ان تحدد العلاقة بين عدد القضبان والعقد هكذا :

بفرض أن عدد العقد الجديدة بالاضافة الى مثلث البدء abc هو x وأن عدد جميع العقد في التركيب الشبكي هو K وعدد القضبان هو S فيكون :

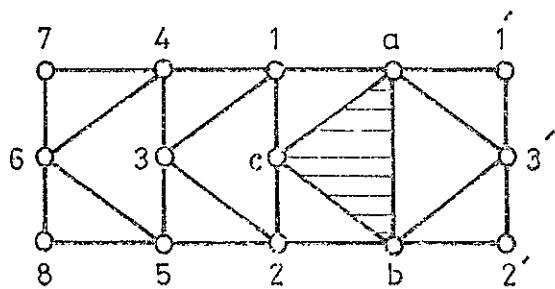
$$K = 3 + x \quad (a)$$

$$S = 3 + 2x \quad (b)$$

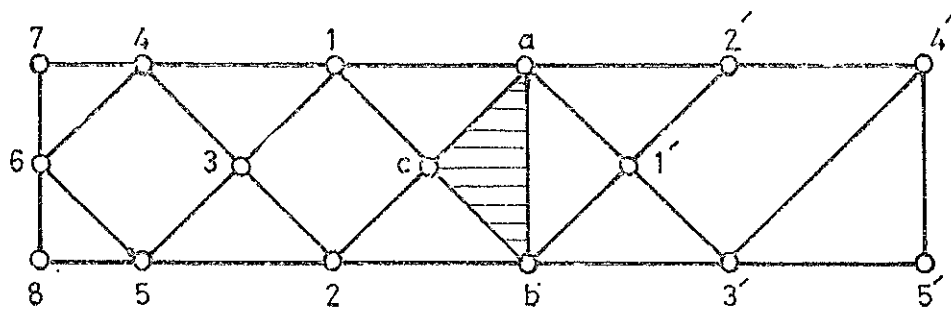
a



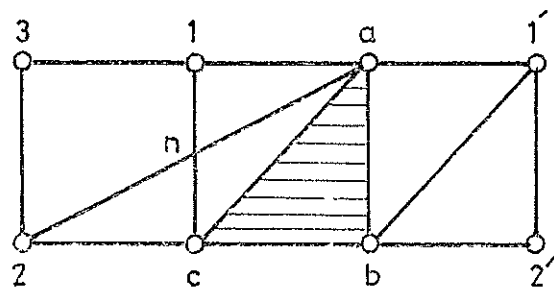
b



c



d



شکل 2-166

ومحذف x من المعادلتين ينتج :

$$S = 2K - 3 \quad (1)$$

(بالامكان الحصول بسهولة على نفس النتيجة وذلك بالاستعانة بالتفكير التالي :

يحتاج للحصول على العقد الثلاثة الاولى الى ثلاثة قضبان وللحصول على كل عقدة اضافية يحتاج لقضيبين جديدين . بذلك يجب ان يكون عدد القضبان S منقوصاً منه الثلاثة الاولى مساوياً لضعف عدد العقد منقوصاً منها العقد الثلاثة الاولى ، اي $(S - 3) = 2(K - 3)$. والتركيب الشبكي في هذه الحالة يكون انشاءً متماسكاً قادراً على ان يتحمل ما يؤثر عليه من قوى خارجية ويلزم ان يستند استناداً كافياً كأي انشاء عادي . ومن الممكن ان يتم الاستناد باحدى الطريقتين التاليتين :

١ - مسندين مفصليين أحدهما يسمح بالحركة الانتقالية والثاني لايسمح بالانتقال وتكون هذه المساند عند اثنتين من العقد .

٢ - ثلاثة مساند نوسية على شكل قضبان ثلاثة تتصل بثلاث من العقد ويشترط فيها ان لاتكون متوازية او متلاقية في نقطة واحدة .

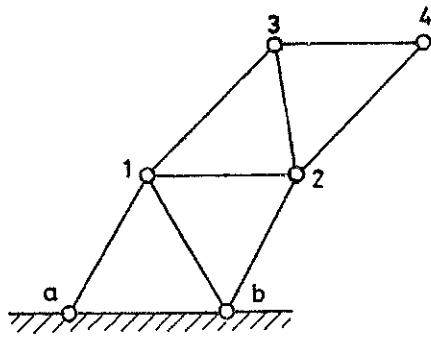
ب - الصورة الثانية (شكل 2-167) :

وفي هذا النوع يبدأ التركيب الشبكي من مسندين مفصليين a , b ثم ينمو بحيث يضاف قضبان لكل عقدة وبذلك تصبح العلاقة بين القضبان S وعدد العقد K هي :

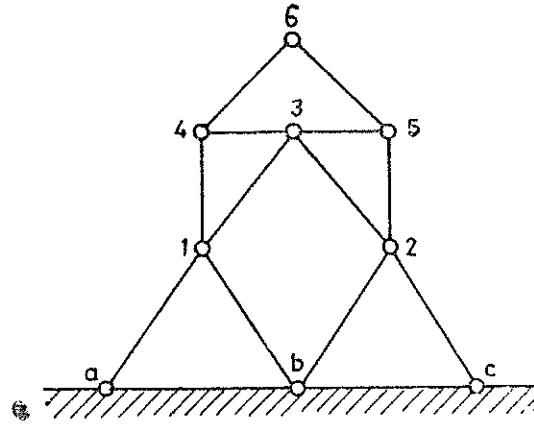
$$S = 2K \quad (2)$$

ويلاحظ عند تطبيق هذه العلاقة ان المساند المفصلية a , b لاتدخل في عدد العقد K ، ومن الممكن ان يبدأ التركيب الشبكي من اكثر من مسندين مفصليين كما في التركيب الثالث من الشكل (2-167b) ، حيث توجد ثلاثة مساند مفصلية هي a , b , c . وقد رقت العقد في الشكل بحسب ترتيب ظهورها بالنسبة لمساند الابتداء في a , b , c . والتركيب الشبكي المكون بهذه الطريقة هو انشاء متماسك وكامل الاستناد بحيث لا يحتاج الى اية مساند اضافية كما هو الحال في النوع السابق . ومن المفيد ملاحظة ما يلي :

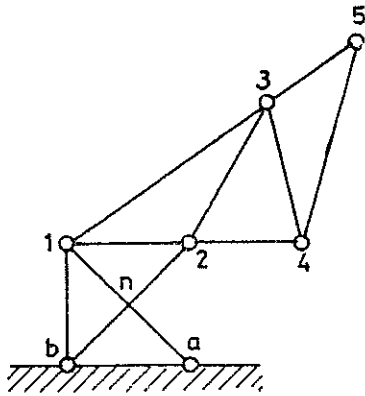
١ - ان العلاقة (1) او (2) التي تربط بين عدد القضبان والعقد في التركيب الشبكي هي



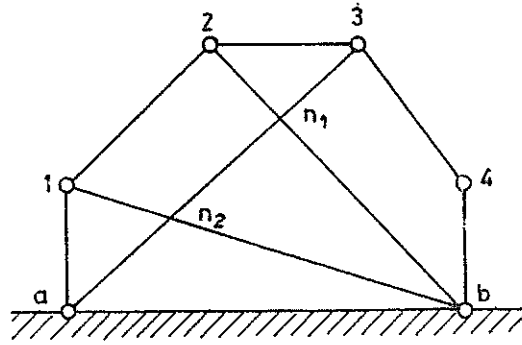
a



b



c



d

شكل 2-167

علاقة لازمة او ضرورية لكي يكون التركيب مقررًا ستاتيكيًا ولكنها غير كافية وحدها . اذ ان من الممكن ان يستبدل احد القضبان بقضيب اخر وتظل بذلك العلاقة (1) او (2) محقة . ولكن التركيب يصبح غير مقرر ستاتيكيًا في بعض اجزائه ومتصدعًا في جزء آخر. مثال ذلك اذا استعويض عن القضيب 4' - 3' في الشكل (c) 2-166 بقضيب 2' - 3' يصل بسين المقديتين 2' , 3' فيصبح الجزء 3' 2' ab غير مقرر ستاتيكيًا بينما يصبح الجزء 4' 3' 5' 2' متحركًا (متصدعًا) . كذلك اذا استبدل القضيب 3 - 4 في الشكل (b) 2-167 بقضيب اخر - 2 - a بذلك يصبح الجزء 12 ab غير مقرر ستاتيكيًا بينما يصبح الجزء 5123 متحركًا (متصدعًا)

ولذلك فان تتبع تكوين التركيب الشبكي باحدى الصورتين السابقتين هو الشرط اللازم والكافي لضمان ان يكون هذا التركيب مقررأ ستاتيكيأ وغير قابل للحركة (غير قابل للتصدع) في نفس الوقت .

٢ - اذا زاد عدد القضبان S عما تتطلبه العلاقة (1) او (2) حسب نوع التركيب كان معنى هذا ان التركيب الشبكي غير مقرر ستاتيكيأ بدرجة الزيادة في S اما اذا نقص عدد القضبان عن ذلك فمعناه ان التركيب الشبكي متحرك (متصدع) في جزء او اكثر من اجزائه بحسب النقصان في S .

٣ - ان نقاط تلاقي القضبان (n) في الشكاين (2-166) و (2-167) حيث لا تظهر دوائر لاتمثل عقد . ومن المفروض نظريا ان القضبان عند هذه النقاط ليست متصلة بعضها ببعض .

٢ - ١٤ - ٣ تحديد نوعية الجيزان الشبكية من الناحية الستاتيكية باستخدام الشرط التعدادي
لقد تم حتى الآن ايجاد العلاقة بين عدد القضبان وعدد العقد في الجائز الشبكي المسنود على مسندين بسيطين احدهما متحرك والآخر ثابت او ما يكافؤهما والان سوف يتم ايجاد العلاقة التي تصلح لجميع انواع الجيزان الشبكية مها كانت معقدة في بناءها الداخلي ومن أجل جميع انواع الاستناد .

في الجيزان الشبكية المستوية تتألف المجاهيل عادة من ردود افعال المساند وقوى القضبان أما المعاليم فهي المعادلات التي تنتج عن تطبيق شروط التوازن . فلو رمز لعدد ردود افعال المساند المستقلة بالحرف a ولعدد القضبان الذي يمثل في نفس الوقت عدد قوى القضبان بالحرف S ولعدد العقد بالحرف K لكان عدد شروط التوازن مساويا ضعف عدد العقد ، أي $2K$ (فلكل عقدة شرطا توازن هما $\sum H=0$, $\sum V=0$) .

للتمكن من تحديد نوعية الجائز من الناحية الستاتيكية ينبغي معرفة نتيجة العلاقة ، التي تستند على مبدأ توازن العقد في الجائز الشبكي ، والتي تمثل كما يلي :

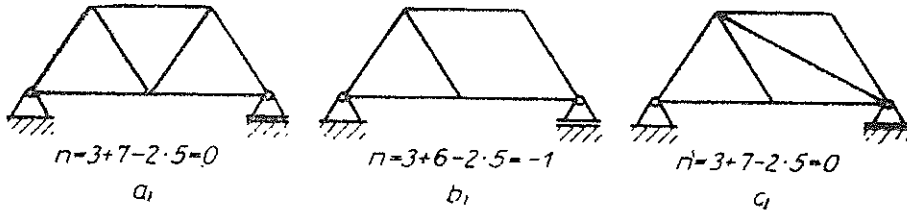
$$\text{عدد المجاهيل} - \text{عدد المعاليم} = n$$

ويمكن التعبير عن هذه المعادلة ، التي تسمى بالشرط التعدادي للجيزان الشبكية المستوية ، رياضياً كما يلي :

$$n = a + S - 2K \quad (2.18)$$

إذا كانت نتيجة تطبيق المعادلة هي التالية :

$n < 0$ فالجائز الشبكي متحرك (ولا يمكن استعماله) (شكل 2-168b) .

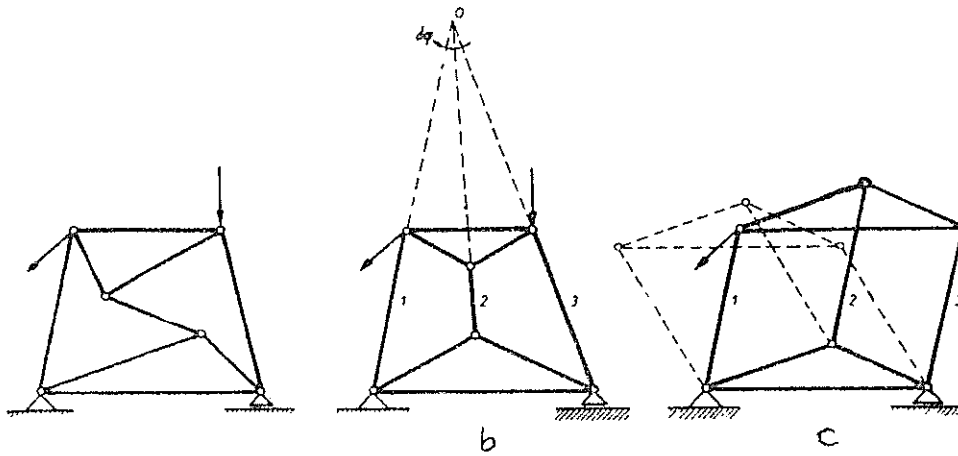


شكل 2-168

$n=0$ فالجائز مقرر ستاتيكيًا (شروط التوازن وحدها تكفي لايجاد جميع المجاهيل الموجودة في الجائز الشبكي) (شكل 2-168 a,c) .

$n > 0$ فالجائز غير مقرر ستاتيكيًا (شروط التوازن وحدها لا تكفي لايجاد كافة المجاهيل الموجودة في الجائز الشبكي ولذلك ينبغي التفتيش عن عدد من المعادلات الإضافية يساوي عدد المعادلات الناقصة ليكون مجموعها مساويا لعدد المجاهيل) .

ان علاقة الشرط التعدادي (2 18) هي علاقة لازمة ولكنها غير كافية . ينبغي ان تكون نتيجة الشرط التعدادي ، لكل الجمل الانشائية القابلة للاستعمال هي $n \geq 0$ وإلا فالجمل لا يمكن استعمالها . اما الجمل التي تكون نتيجة الشرط التعدادي فيها $n \geq 0$ فهذا لا يعني انها جمل يمكن استعمالها فهناك بعض الجمل الستاتيكية التي تقوم بانتقالات حركية ولا يستطيع الشرط التعدادي ان يحددها وهي غير قابلة للاستعمال (فالشرط التعدادي غير كافي) (شكل 2-169 b,c) .



شكل 2-169

علاوة على ما ذكر هناك جمل ذات انتقالات كبيرة ، تنتج عن تركيب خاطيء للمساند ولكنها حسب الشرط التعدادي مقررة ستاتيكيًا .

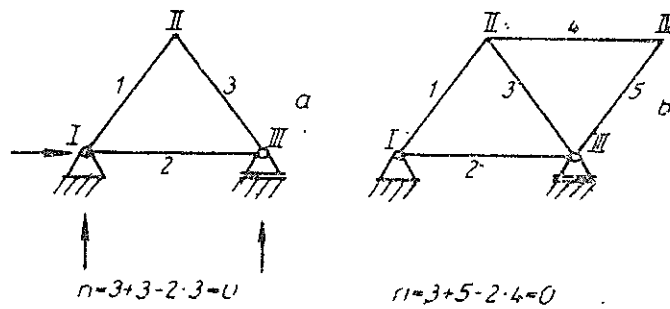
تسمى الحالات التي تكون فيها نتيجة الشرط التعدادي هي $n \geq 0$ ولكنها في الحقيقة متحركة ، بالحالات الاستثنائية لاسكون (شكل 2-169 b,c) ، لذلك يلزم بعد تطبيق الشرط التعدادي والتأكد من أن $n \geq 0$ ، القيام بدليل اخر يكون كاف للتأكد من كون الجملة غير متحركة ، على سبيل المثال طريقة المخطط القطبي أو طريقة شكل F' (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء المؤلف) ، فمتى تم التأكد بالطريقة الحركية ان الجملة غير متحركة فإن n تكون فعلا درجة غير مقرر ستاتيكيًا (درجة عدم التقرير الستاتيكي) للجائز . أما الجمل الستاتيكية التي يثبت بطريقة الشرط التعدادي أو بالطريقة الحركية انها متحركة فلا داعي للقيام بحساب مسكونها لانها ، كما هي ، جمل غير قابلة للاستعمال . فالجمل الستاتيكية لانشاء ينبغي ان تكون مستقرة بعد التحميل وإلا لفقدت وظيفتها التي صممت من اجلها .

٣ - ١٤ - ٤ قواعد لتشكيل الجيزان الشبكية ، الجيزان الشبكية الاستثنائية :

يمكن بالاستعانة بالقواعد التالية ، الحصول على الجيزان الشبكية المقررة حركيا أو ستاتيكيًا :

١ - المثلث هو الشكل الاساسي للجائز الشبكي (شكل 2-170 a) . اذا الحقت بعقدتين (على سبيل المثال II , III) عقدة ثالثة (العقدة III) وذلك بواسطة قضيبين عندئذ لا يتغير التقرير الستاتيكي (شكل 2-170 b) (يصلح هذا أيضاً عندما يكون الشكل الذي ينطلق منه هو اي جائز مستقر) . بالاستعانة بما ذكر استطاع توسيع الجائز المقرر ستاتيكيًا بشكل كيفي .

ملاحظة : عندما تقع عقدة الوصل الجديدة (على سبيل المثال العقدة VI المشار اليها في

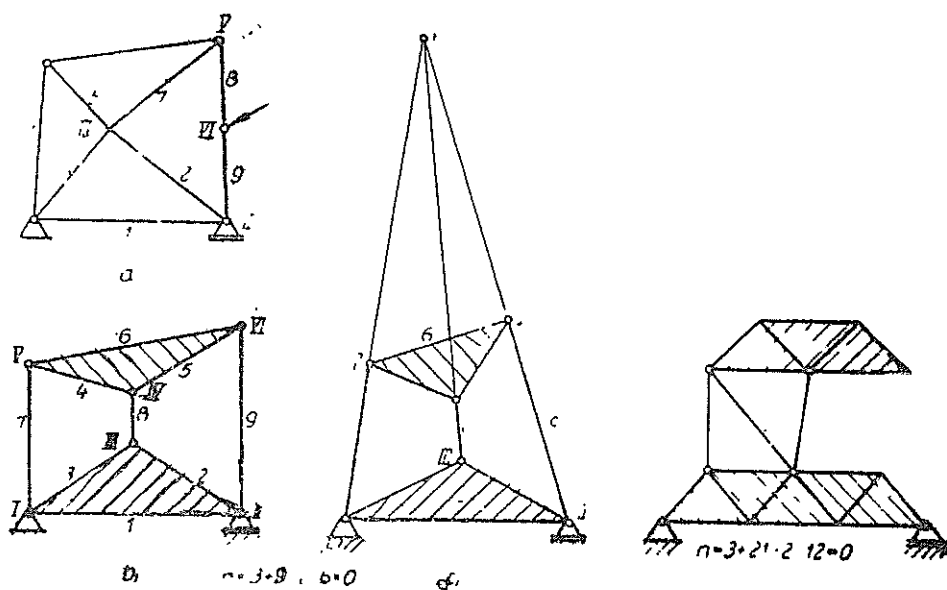


شكل 2-170

الشكل 2-171 a) على الخط الواصل بين العقدتين القديتين فإن التركيب الشبكي ، هو على العموم وبسبب الحركات اللانهائية الصغر وبسبب كون قوى القضبان كبيرة جداً ، غير صالح للاستعمالات العملية . تسمى الجيزان الشبكية التي لا يعطي فيها الشرط التعدادي نتيجة صحيحة ، بالجيزان الشبكية الاستثنائية (Ausnahmefachwerke) .

٢ - إذا اريد الوصل بين قرصين صليين ، بواسطة قضبان ، عندئذ تازم لذلك ثلاثة قضبان (شكل 2-172) .

ملاحظة : يتم الحصول على الجائز الشبكي الاستثنائي عندما تكون القضبان الثلاثة متوازية أو عندما تتلاقى خطوط امتدادها في نقطة واحدة (شكل 2-171 b,c) . بذلك تستطيع المثلثات القضيبيّة العليا الدوران بزواوية صغيرة حول « القطب » P (فمن اجل الشكل 2-171 b يقع القطب في اللانهاية) .



شكل 2 171

شكل 2-172

٣ - بنزع قضيب ما من جائز شبكي مقرر سنائيكياً ، فإن الجائز المذكور يتحول لجائز متحرك (شكل 2-168) . يعود هذا الجائز لاستقراره عندما يستبدل القضيب بقضيب آخر يربط بين عقدتين ما منه .

ملاحظة : لا يجوز ان يقع القضيب البديل (Der Ersatzstab) فوق قضيب آخر موجود ليربط

بين نفس العقد . كما لا يجوز أيضاً ان يوضع القضيب البديل في المكان الذي يؤدي لتشكيل جأز شبكي استثنائي أو الى تشكيل جأز شبكي غير مقرر متاتيكياً .

٢ - ١٤ - ٥ الجمل الشبكية البسيطة المستوية

٥ - ايجاد قوى قضبان الجأز الشبكي

لايجاد قوى القضبان في الجأز الشبكي هناك طريقتان ، الطريق الاول تحليلي والطريق الثاني تخطيطي . اما افضلية استعمال احد الطريقتين فسوف يتم ايضاحه على مثال مشترك يستعمل فيه كلا الطريقتان .

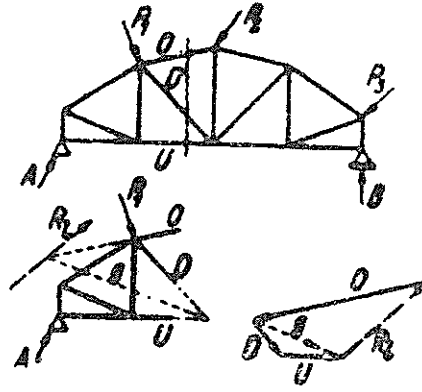
٥ - ١ ايجاد قوى القضبان تحليلياً :

قبل الابتداء بايجاد قوى القضبان ينبغي كالعادة تعيين ردود افعال المساند (باستثناء بعض الحالات) وهذا يتم ، كما في الجأز البسيط ، اما تحليلياً بواسطة تطبيق شروط توازن الجسم الصلب او تخطيطاً بالطرائق المعتادة التي استخدمت في الفقرة (٢-٢ II) . لذا سوف يعتبر هنا ان ردود افعال المساند معلومة . اما الطرائق التحليلية لايجاد قوى القضبان في الجأز الشبكي فكبيرة وسيقتصر على ذكر اهمها واكثرها شيوعاً فقط .

٥ - ١ - ١ طرائق القطع :

أ - طريقة قطع ريتز (طريقة ريتز)

سوف يتعلق لشرح هذه الطريقة من مثال بسيط ومبتدأ بحساب قوة القضيب القطري D من الجأز الشبكي الممثل في الشكل (2-173) وذلك نتيجة لتأثير الجسولة المعطاة هناك . ليقطع الجأز الشبكي بواسطة القطع $s..s$ فيمر علاوة على القضيب القطري بقضبان آخرات ما تزال قوتها مجهولة ، هذان القضبان هما قضيب الجزع (الوتر) العلوي O وقضيب الجزع (الوتر) السفلي U . بما ان الجأز ككل موجود في حالة توازن لذلك ينبغي ان تتحقق حالة التوازن ايضاً بالنسبة لكل جزء من اجزائه المقطوعة . بأخذ الجزء الايسر مثلاً يرى انه علاوة على تأثير القوى P_1, P_2, A عليه ، هناك قوى القضبان المقطوعة الثلاثة والتي تستعطي نفس رمز قضبانها اي U, O, D .



شكل 2-173

ليفترض في البداية ان كافة قوى القضبان هي قوى شادة اي انها تخرج من مكان القطع . فاذا كانت منها قوة أو عدة قوى ، هي في الحقيقة قوى ضاغطة لكأن كانت نتيجة الحساب سالبة (مسبوقة بإشارة سالبة) ، هذا يعني ان القيمة السالبة الناتجة هي قيمة القوة الضاغطة .

بعد ذلك لتطبق شروط التوازن على كافة القوى المؤثرة على الجزء المعتبر (هنا مثلاً الجزء اليسر) . بأخذ شرط توازن العزوم $\sum M_i = 0$ من بين شروط التوازن وباختيار النقطة r التي تنشأ عن تقاطع امتداد حاملي القوتين U, O (القوى الموجودة في القطع الذي اجري لحساب القوة D) كنقطة للنسب ، بذلك يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$A \cdot p_A - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 - D \cdot p_D = 0$$

منها يتم تعيين القوة المطلوبة :

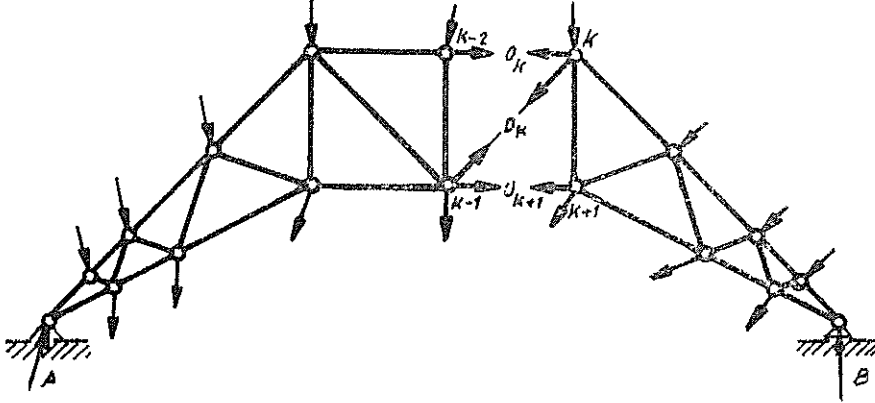
$$D = \frac{1}{p_D} (A \cdot p_A - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2)$$

بإمكان الحصول على المسافات p_A, p_D, p_1, p_2 إما تحليلياً أو بالقياس من رسم تخطيطي دقيق . تسمى هذه الطريقة بطريقة قطع ريتز أما النقطة r فتسمى بنقطة ريتز .
لايجاد قوى القضبان U, O تحدد نقاط ريتز جديدة مناسبة (في المثال المدروس النقاط r', r'') .

نواقض طريقة ريتز :

لا يمكن استخدام طريقة ريتز لايجاد قوة قضيب (مثلاً القضيب D_k) عندما تكون القضبان المقطوعة الأخرى متوازية (القضيب O_k والقضيب U_{k+1}) (شكل 2-174) فبسبب التوازي

تقع نقطة ريتز في اللانهاية وحتى يتم ، في هذه الحالة ، الحصول على معادلة واحدة تحتوي على قوة القضيب المطلوب حسابها ، يطبق شرط توازن القوى بالاتجاه العمودي على اتجاه القضيبين المتوازيين وذلك على أحد الجزئين المقطوعين من الجائر الشبكي (هنا على الجزء الأيسر) . بسبب التوازن ينبغي أن تكون شروط توازن القوى بأي اتجاه كان أيضاً محققة (مثلاً $\Sigma V=0$, $\Sigma H=0$) .



شكل 2-174

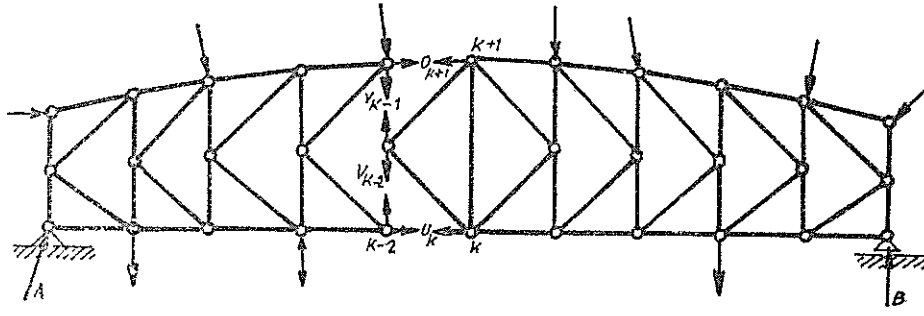
تلخيص طريقة ريتز :

يفصل الجائر بواسطة قطع يمر بالقضيب المطلوب حساب قوته ثم يطبق شرط توازن العزوم بالنسبة لنقطة تمر منها حوامل جميع قضبان القطع ماعدا القضيب الذي يراد حساب قوته ، تسمى هذه النقطة بنقطة ريتز k ، أي $\Sigma M_k=0$. وتستخدم هذه الطريقة في القطوع التي تتلاقى فيها جميع القضبان ما عدا واحد منها في نقطة واحدة .

لايجاد قوة قضيب ما ينبغي ان لا تكون بقية قضبان القطع متوازية وإلا لوقعت نقطة ريتز في اللانهاية . وفي هذه الحالة ، وفي حالة عدم تجاوز عدد القضبان ذات القوى المجهولة عن اثنين يطبق شرطي توازن القوى ، على سبيل المثال $\Sigma V=0$, $\Sigma H=0$.

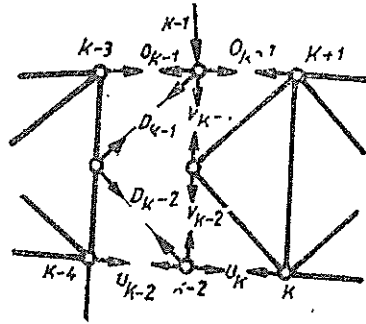
حالات خاصة :

من اجل الجائر الشبكي الذي يشبه حرف K والممثل في الشكل (2-175) لا يستطاع بأية حال اجراء قطع يمر بثلاثة قضبان فقط . لكن بالامكان تعيين القوى بواسطة القطوع المشار اليها في الشكل (2-175) والشكل (2-176) . اثناء تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للنقطة $k-1$ تظهر قوة قضيب الجزع (الوتر) السفلي U_k فقط واثناء تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة



شكل 2-175

لنقطة $k-2$ تظهر قوة قضيب الجزع (الوتر) العلوي O_{k+2} فقط ، بحيث يمكن حساب كل من القوتين مستقلتين عن الأخرى . لايجاد قوى القضبان القطرية D_{k-2} و D_{k-1} وقوى القضبان الشاقولية V_{k-2} و V_{k-1} تفصل العقد $k-2$ و $k-1$ عن الجائز الشبكي بواسطة قطع مدور حسب الشكل (2-176) . عندئذ يعطي شرط توازن القوى بالاتجاه الأفقي ، القوس D_{k-2} و D_{k-1} كما يعطي شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي ، القوى V_{k-2} و V_{k-1} .



شكل 2-176

ب - طريقة القطع المدور (وتسمى أيضاً بطريقة العقد) :

في الجائز الشبكي المتوازن يجب ان تكون كل عقدة مقطعة من عقده متوازنة ايضاً . تحليلياً يعني هذا ان تحقق مجموعة القوى المؤثرة على العقدة المقطعة (القوى الخارجية والداخلية) شرط التوازن . لتقطع عقدة من عقد الجائز الشبكي ولتطبق على القوى المؤثرة عليها والموجودة فيها (القوى الخارجية والداخلية) شروط توازن مجموعة القوى المستوية المركزية ، بذلك يتم التوصل الى مجموعة من المعادلات كل المجاهيل المطاوعة . بالطبع يجب ان يجرى القطع المدور

الاول على عقدة تحوي قضيين فقط وذلك للتمكن ، بواسطة شرطي توازن القوى الموجوده في متناول اليد ، من إيجاد قوى القضبان المجهولة في العقدة . بعد ذلك ينتقل الى عقدة ثانية تحتوي على ثلاثة قضبان احدها هو القضيب الذي تم حساب قوته ، اي ان عدد قوى القضبان التي ما تزال مجهولة يجب ان لا يزيد على اثنين ، وبنفس الطريقة ينتقل الى عقدة اخرى شريطة ان لا يزيد عدد قوى القضبان المجهولة فيها عن اثنين . اما تسلسل إختيار المقد فهو اختياري على ان يتحقق الشرط السابق الذكر . لكن في اغلب الحالات يرى ان الشرط السابق هو الذي يحدد العقدة التي يلزم اقتطاعها وتطبيق شروط التوازن عليها .

ج - الطريقة المشتركة :

حين استخدام الطريق التحليلي لحساب قوى القضبان في جائز شبكي لا توجد أية قيود تقرر على اتباع طريقة واحدة فقط ، بل بالامكان استخدام كل الطرق السابقة لحل جائز شبكي واحد وذلك للحصول على المطلوب بسرعة وبسهولة . فمثلا لحل مسألة واحدة يمكن تطبيق طريقة قطع ريتز (وذلك بإيجاد نقطة ريتز او بتطبيق شرطي توازن القوى) لإيجاد قوى بعض القضبان ومن ثم تطبيق طريقة القطع المدور (طريقة العقد) لإيجاد ما تبقى من قوى القضبان .

حالات بسيطة :

في كثير من الجيزان الشبكية (التركيبات الشبكية) البسيطة يستطاع غالباً دون الحاجة لحساب مطول ، معرفة كثير من قوى القضبان فيها . فدراسة الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-177) مثلا ، يرى ان قطعاً مدوراً حول العقدة غير المحملة 2 يشير فوراً الى ان قوى القضبان D_0, V_0 معدومة اي ان $D_0=0$ و $V_0=0$. عادة تسمى القضبان التي تنعدم فيها القوى بقضبان الصفر .

باقتطاع العقدة 3 بواسطة قطع مدور ثم تطبيق شرطي توازن القوى عليها ، فان الشرط الاول يعطي :

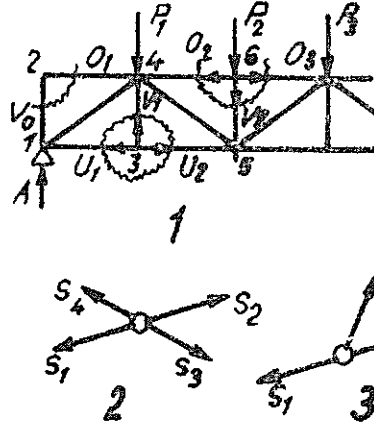
$$\sum V = 0 : V_1 = 0$$

أما الشرط الثاني للتوازن فيعطي :

$$\sum H = 0 : U_1 = U_2$$

بنفس الطريقة يتم التوصل من القطع المدور المجري حول العقدة 6 الى ان $V_2 = -P_2$ أي انها مساوية للقيمة السالبة لمحملة العقدة وكذلك ايضاً يتم التوصل الى ان $O_1 = O_2$.

في العقدة غير المحملة ذات القضبان الاربعة (وابعية القضبان) كما في الشكل (b 2-177) يري ان



شكل 2-177

اما في المقعدة غير المحملة ذات القضبان الثلاثة كما في الشكل (2-177 c) فيرى ان $S_1 = S_2$ و $S_3 = 0$. توفر مراعاة هذه الاعتبارات البسيطة والاعتبارات التالية كثيراً من الزمن: ١ - تنعدم القوى في قضيبين لا يقمان على استقامة واحدة ويتلاقيان في عقدة غير محملة (كلا القضيبين هما قضيباً صفر) (شكل 2-178) وذلك لان شرط توازن القوى بالاتجاه x يعطي:

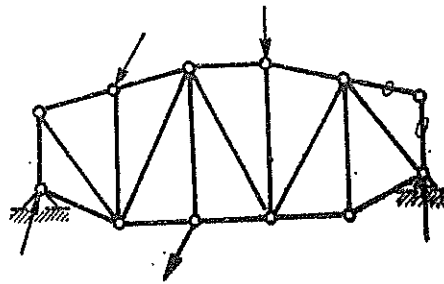
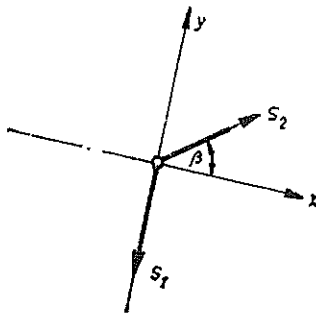
$$\sum_{v=1} P_{xv} = 0 : S_2 \cdot \cos \beta = 0$$

من حقيقة كون :

$$S_2 = 0$$

ينتج ان :

$$S_1 = 0$$



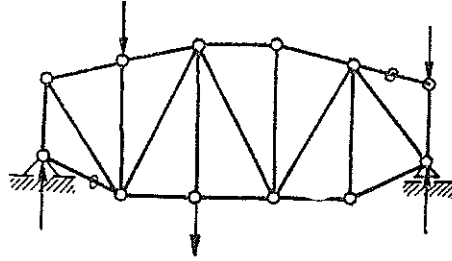
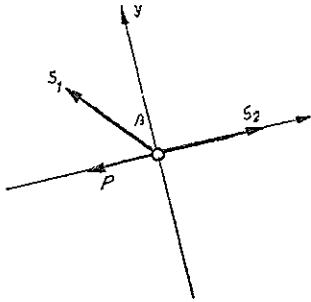
شكل 2-178

٢ - من أجل عقدة يتلاقى فيها قضبان شبكيان لا يقمان على استقامة واحدة وتؤثر فيها قوة العقدة P التي ينطبق حاملها على امتداد أحد القضبان (شكل 2-179) يتم التوصل ، من شرطي توازن القوى بالاتجاه x والاتجاه y ، الى العلاقات التالية :

$$S_1 \cos \beta = 0 , S_2 - P - S_1 \sin \beta = 0$$

والتي يتم بواسطتها تعيين قوى القضبان :

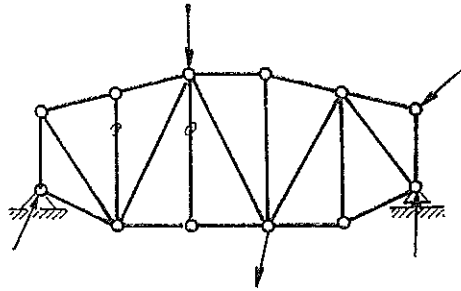
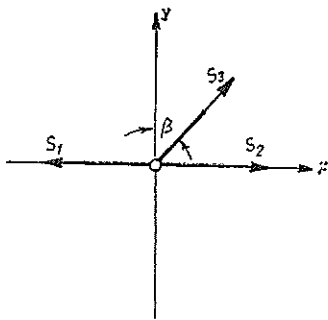
$$S_1 = 0 ; S_2 = P$$



شكل 2-179

٣ - من أجل عقدة غير محملة وتتلاقى فيها ثلاثة قضبان ، من بينها قضبان تقع على استقامة واحدة (شكل 2-180) فان شرطي توازن القوى تأخذ الشكل التالي :

$$S_3 \cos \beta = 0 ; -S_1 + S_2 + S_3 \sin \beta = 0$$



شكل 2-180

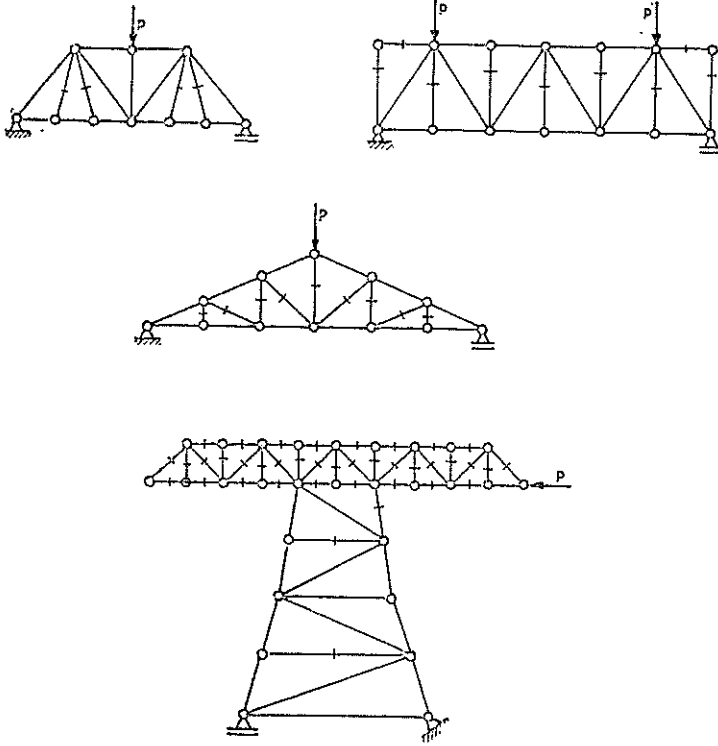
من هاتين العلاقتين يرى ان :

$$S_3 = 0 ; S_1 = S_2$$

١ - ٢ أمثلة :

مثال 86 :

المطلوب : تحديد قضبان الصفر للجيزان الشبكية الممثلة في الشكل (2-181) .



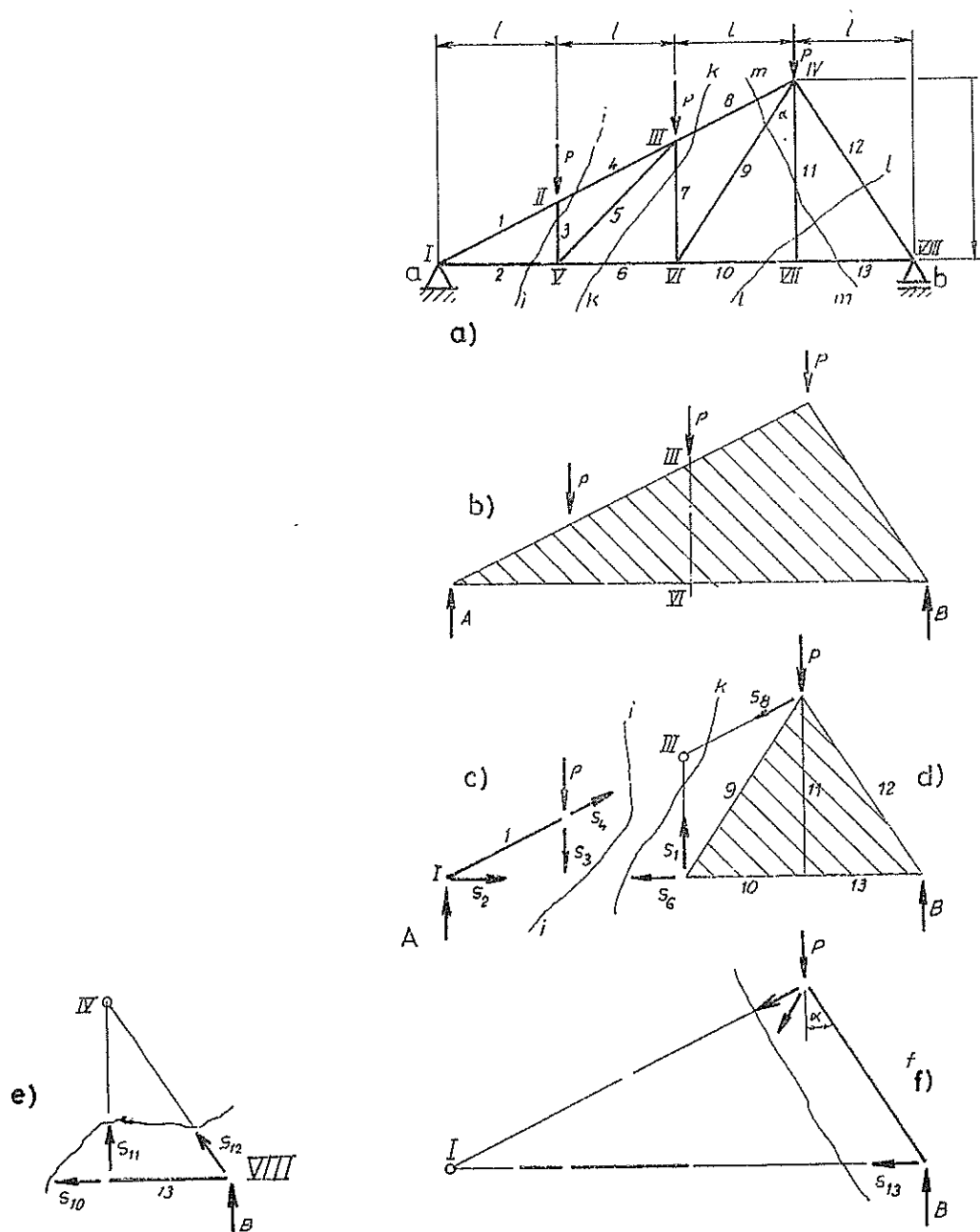
شكل 2-181

الحل :

باتباع الاعتبارات البسيطة المشار اليها في الفقره (٢ - ١٤ - ٥) يتبين ان كافة القضبان المعلمة بخط في وسطها هي قضبان صفر (قضبان تنعدم فيها القوة) .

مثال 87 :

المطلوب : حساب قوى القضبان $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_9, S_{10}, S_{13}$ في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-182) .



شكل 2-182

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

في البداية سوف يعتبر الجائز الشبكي قرصاً (شكل 2-182 b) ثم تطبق عليه شروط التوازن:

$$\Sigma V = 0 : A - 3P + B = 0$$

بما ان القوى المؤثرة على الجائز متناظرة بالنسبة لمحور العقد III-VI ، لذلك ينبغي ان تكون ردود افعال المساند ايضاً متناظرة بالنسبة لنفس المحور ، وهذا يعني ان :

$$A = B$$

من المعادلتين السابقتين ينتج ان :

$$A = B = \frac{3}{2} P$$

٢ - قوى القضبان

سوف تستخدم طريقة القطع لايجاد قوى القضبان المطلوبة .

قطع ريتز i-i (الاشكال 2-182 a,c) :

$$\Sigma M_{II} = 0 : -Al + \frac{1}{2} S_2 l = 0 : S_2 = 3P$$

$$\Sigma M_I = 0 : -Pl - S_3 l = 0 : S_3 = -P$$

قطع ريتز k-k (الاشكال 2-182 a,d) :

$$\Sigma M_{III} = 0 : -S_6 l - Pl + 2Bl = 0 : S_6 = 2P$$

قطع ريتز l-l (الاشكال 2-182 a,e) :

$$\Sigma M_{IV} = 0 : -\frac{3}{2} S_{10} l + Bl = 0 : S_{10} = P$$

$$\Sigma M_{VII} = 0 : -S_{11} l = 0 : S_{11} = 0$$

قطع ريتز m-m (الاشكال 2-182 a,f) :

$$\Sigma M_I = 0 : \frac{3}{2} S_{9H} l - 3Pl - 3S_{9V} l + 4Bl = 0$$

حيث ان :

$$\sin \alpha = \frac{S_{9H}}{S_9} = \frac{l}{\frac{1}{2} \sqrt{13} l}$$

$$\cos \alpha = \frac{S_{9v}}{S_9} = \frac{\frac{3}{2} l}{\frac{1}{2} \sqrt{13} l}$$

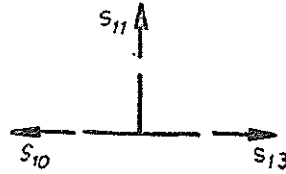
(للمقارنة الشكل 2-122) .

$$S_9 = \frac{1}{2} \sqrt{13}$$

$$\Sigma M_{IV} = 0 : -\frac{3}{2} S_{13} l + B l = 0 : S_{13} = P$$

القضيب 11 هو قضيب صفر ، لقد كان بالإمكان معرفة ذلك دون إجراء أية حسابات وذلك كما يلي : باقتطاع العقدة VII من الجائز الشبكي (شكل 2-182a,c) بواسطة قطع مدور (شكل 2-183) ثم تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي عليها ينتج أن :

$$S_{11} = 0$$



شكل 2-183

مثال 88 :

المعطى : P ، l (شكل 2-184) .

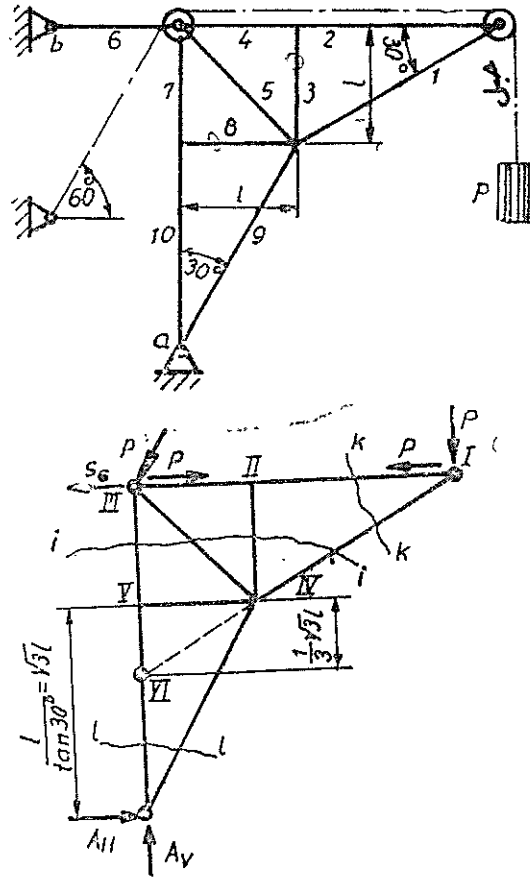
المطلوب :

إيجاد ردود افعال المساند وقوى القضبان في الرافعة الشبكية الممثلة في الشكل (2-184) (تهمل انصاف اقطار البكرات ويهمل الاحتكاك في الجبال) .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز الشبكي ككل ؛ والذي يعتبر جسماً صلباً (شكل 2-184) يتم الحصول على المعادلات التالية :



شكل 2-184

$$\Sigma V = 0 : A_v - \frac{1}{2}\sqrt{3} P - P = 0$$

$$\Sigma H = 0 : A_H - S_6 - \frac{1}{2} P + P - P = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : (S_6 + \frac{1}{2} P) (1 + \sqrt{3}) l - P(1 + \sqrt{3}) l = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين ردود أفعال المساند :

$$A_H = P ; A_v = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) P ; S_6 = \frac{1}{2} P$$

٢ - قوى القضبان :

قضبان الصفر :

بتطبيق شروط التوازن على العقد II , V المقنطة بقطع مدور ، ينتج :

$$S_3 = S_8 = 0$$

كما ينتج أيضاً ان :

$$S_2 = S_4 ; S_7 = S_{10}$$

قطع ريتز i-i :

$$\Sigma M_{IV} = 0 : \sqrt{3} A_H l - A_V l - S_7 l = 0$$

$$\Sigma M_{III} = 0 : A_H (l + \sqrt{3}) l + \frac{1}{2} S_1 l + \frac{1}{2} \sqrt{3} S_1 l = 0$$

$$\Sigma M_{VI} = 0 : \frac{2}{3} \sqrt{3} A_H l + \frac{1}{2} \sqrt{2} S_5 l + \frac{1}{2} \sqrt{2} S_5 \frac{1}{3} \sqrt{3} l = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة ينتج :

$$S_7 = - (1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}) P$$

$$S_1 = -2 P$$

$$S_5 = - \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1) P$$

قطع ريتز k-k :

$$\Sigma M_{IV} = 0 : P l - \sqrt{3} P l + S_2 l = 0 : S_2 = (\sqrt{3} - 1) P$$

قطع ريتز l-l :

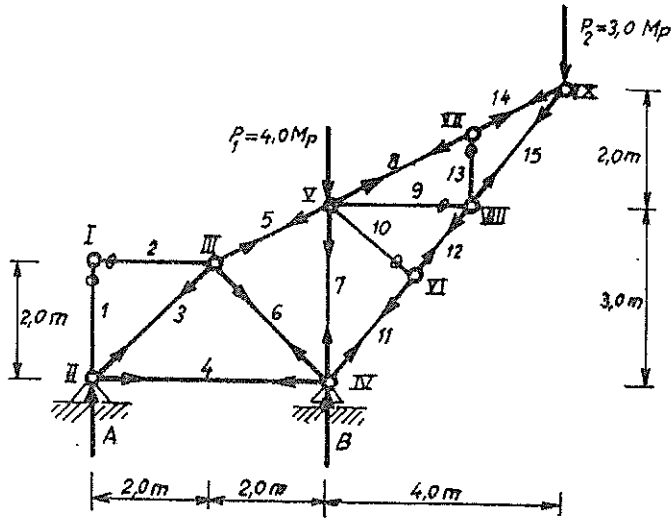
$$\Sigma M_V = 0 : \sqrt{3} A_H l + \frac{1}{2} \sqrt{3} S_9 l = 0 : S_9 = -2 P$$

مثال 89 :

المطلوب : حساب قوى قضبان الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-185).

الحل :

قبل القيام بأية قطوع لتعيين قوى القضبان، يثبت لأول نظرة بأن القضبان 1 , 2 , 13 , 9 , 10 هي قضبان صفر .



شكل 2-185

من حقيقة كون :

$$S_{13} = S_9 = S_{10} = 0$$

ينتج أن :

$$S_{14} = S_8$$

وأن

$$S_{15} = S_{12} = S_{11}$$

لوقوع حامل القوة P_1 على اتجاه القضيب S_7 فإن :

$$S_8 = S_5$$

١. ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجسم ككل يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$\sum M_b = 0 : 4A + 4P_2 = 0$$

$$\sum M_a = 0 : -4B + 4P_1 + 8P_2 = 0$$

بحلها يتم تعيين ردود أفعال المساند :

$$A = -3,0 \text{ Mp} ; B = 10,0 \text{ Mp}$$

مقاومة المواد م ٢٥

بتطبيق شرط توازن القوى الشاقولية (شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي) :

$$\Sigma V = 0 : A + B - P_1 - P_2 = 0$$

يتم تدقيق النتائج السابقة والتأكد من صحة ردود أفعال المساند المحسوبة .

٢ - قوى القضبان

العقدة II :

بتطبيق شروط توازن القوى على العقدة II المقطعة (بقطع مدور) يتم التوصل للمعادلات التالية:

$$\Sigma H = 0 : S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + A = 0$$

بحلها يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_3 = 3,0 \sqrt{2} \text{ Mp} ; S_4 = - 3,0 \text{ Mp}$$

العقدة III :

باجراء قطع مدور على العقدة III وتطبيق شروط توازن القوى عليها يتم التوصل الى المعادلات الآتية :

$$\Sigma H = 0 : S_5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + (S_6 - S_3) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - (S_6 + S_3) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_5 = 2,0 \sqrt{5} \text{ Mp} = S_8 = S_{14}$$

و

$$S_6 = - 1,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

العقدة IV :

بما أن

$$S_7 = -P_1 = -4,0 \text{ Mp}$$

فإن شرط توازن القوى بالاتجاه الأفقي المطبق على قوى العقدة IV المقطعة () بقطع مدور) يعطي :

$$\Sigma H = 0 : -S_4 - S_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 0$$

من هذه المعادلة ينتج :

$$S_{11} = -1,0 \sqrt{41} \text{ Mp} = S_{12} = S_{15}$$

أما الشرط الثاني لتوازن القوى بالاتجاه الشاقولي فهو :

$$\Sigma V = 0 : S_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_7 + S_{11} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + B = 0$$

العقدة IX :

بتطبيق شروط التوازن على العقدة IX المقطعة من الجائز الشبكي بواسطة قطع مدور يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma H = 0 : S_{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + S_{15} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + S_{15} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + P_2 = 0$$

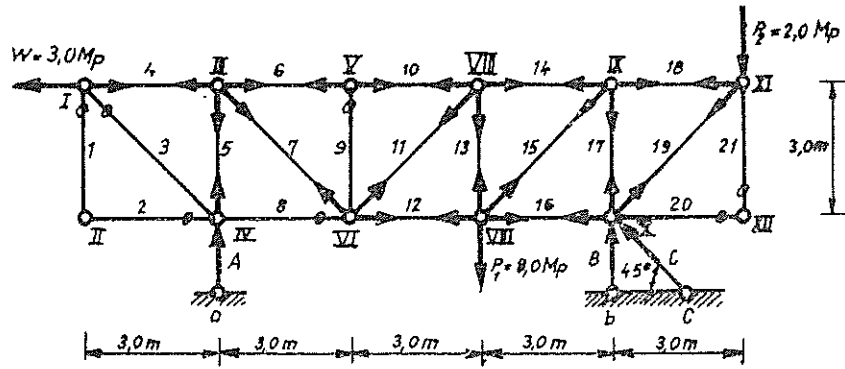
والتي تعتبر تدقيقاً للنتائج المحسوبة .

مثال 90 :

المطلوب : حساب قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-186) .

الحل :

بإلقاء النظرة الأولى على الجائز الشبكي يتبين أن القضبان 1 , 2 , 3 , 8 , 9 , 20 , 21 هي قضبان صفر .



شكل 2-186

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز الشبكي ككل يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma M_b = 0 : -A \cdot 9,0 + W \cdot 3,0 + P_1 \cdot 3,0 - P_2 \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma H = 0 : -W - C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : +A - P_1 - P_2 + B + C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = 3,0 \text{ Mp} ; B = 10,0 \text{ Mp} ; C = -3,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

قوى الفضبان :

العقدة IV :

باجراء قطع مدور على العقدة IV وتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي عليها ، ينتج :

$$\Sigma V = 0 : S_5 = -A = -3,0 \text{ Mp}$$

العقدة I :

بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي على العقدة I المقطعة (بقطع مدور) ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_4 = W = 3,0 \text{ Mp}$$

باجراء قطع ريتير بالقضبان 6 , 7 , 8 وبعد تطبيق شروط التوازن على الجزء الايسر المقطوع من الجائز الشبكي ينتج :

$$\Sigma V_{IV} = 0 : W \cdot 3,0 - A \cdot 3,0 - S_6 \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A - S_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_6 = 0 = S_{10} ; S_7 = 3,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

باجراء قطع ريتير بالقضبان 10 , 11 , 12 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$\Sigma M_{VII} = 0 : A \cdot 6,0 - S_{12} \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A + S_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

وبحلها يتم تعيين قوى القضبان الآتية :

$$S_{12} = 6,0 ; S_{11} = - 3,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

باجراء قطع ريتير بالقضبان 12 , 13 , 14 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر من الجائز يتم التوصل للمعادلة الآتية :

$$\Sigma V = 0 : A - S_{13} = 0$$

من هذه المعادلة يتم تعيين قوة القضيب :

$$S_{13} = 3,0 \text{ Mp}$$

وباجراء قطع ريتير بالقضبان 14 , 15 , 16 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر من الجائز الشبكي ، يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\Sigma M_{VIII} = 0 : - W \cdot 3,0 + A \cdot 6,0 + S_{14} \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma M_{XI} = 0 : + A \cdot 9,0 - P_1 \cdot 3,0 - S_{14} \cdot 3,0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : + A - P_1 + S_{15} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

والتي تعطي بعد الحل ، قوى القضبان التالية :

$$S_{14} = -3,0 \text{ Mp} ; S_{16} = 1,0 \text{ Mp} ; S_{15} = 5,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

بقطع القضبان 16 , 17 , 18 بواسطة قطع ريتز وب تطبيق شروط التوازن على القطع الايسر ينتج :

$$\Sigma V = 0 ; + A - P_1 - S_{17} = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 : W \cdot 3,0 + A \cdot 9,0 - P_1 \cdot 3,0 + S_{18} \cdot 3,0 = 0$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_{17} = -5,0 \text{ Mp} ; S_{18} = 2,0 \text{ Mp}$$

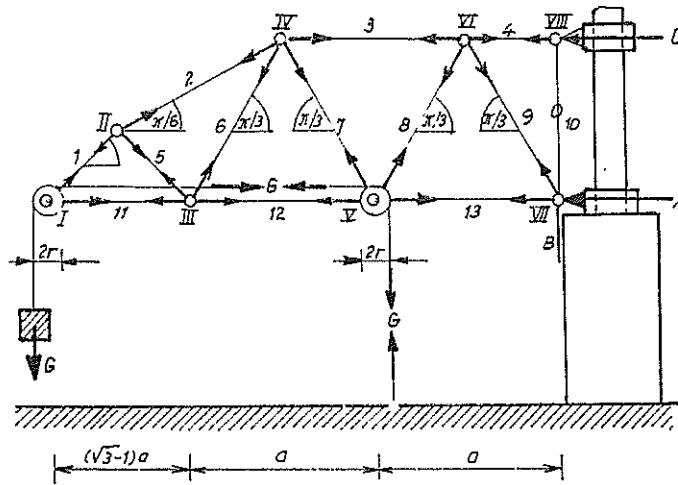
المقدمة XI :

وأخيراً وباجراء قطع مدور على المقدمة XI يتم تعيين قوة القضيب المجهولة الاخيرة :

$$S_{19} = -2,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

مثال 91 :

المطلوب : حساب قوى قضبان الرافعة الشبكية الممثلة في الشكل (2-187) .



شكل 2-187

الحل :

ان قوة الجبل في كل مكان منه هي G .

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الرافعة ككل يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 : B - 2 G = 0$$

$$\Sigma M_{VII} = 0 : C \frac{\sqrt{3}}{2} a + G [r + (\sqrt{3} - 1) a + 2 a + a - r] = 0$$

$$\Sigma H = 0 : C + A = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين ردود أفعال المساند :

$$B = 2 G ; A = - C = 4,309 G$$

٢ - قوى القضبان :

ان القضيب 10 هو قضيب صفر .

المقدمة I :

باجراء قطع مدور على المقدمة I وتطبيق شروط التوازن على القوى المؤثرة عليها والقوى والموجودة في القضبان المتلاقية فيها يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 : S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - G = 0$$

$$\Sigma H = 0 : S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} + G = 0$$

بحلها يتم تعيين قوى القضبان التالية :

$$S_1 = 1.414 G ; S_{11} = - 2 G$$

باجراء قطع ريتز يمر بالقضبان 2 , 5 , 11 وتطبيق شروط التوازن على القطع الايسر ينتج :

$$\Sigma V = 0 : G - S_2 \cdot 0,5 + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma H = 0 : G + S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} = 0$$

بحل المعادلتين يتم التوصل لقوى القضبان :

$$S_2 = 1,464 \text{ G} , \quad S_5 = - 0,379 \text{ G}$$

العقدة III :

بتطبيق شروط التوازن على العقدة III المقطعة من الجائز الشبكي ينتج :

$$\Sigma V = 0 : S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_6 \frac{3}{2} = 0$$

من هذه المعادلة يتم تعيين قوة القضيب :

$$S_6 = 0,309 \text{ G}$$

اما البقية الباقية من قوى القضبان فيتم الحصول عليها بواسطة قطع ريتز الذي يمر بالقضبان 3 , 7 , 12 :

$$\Sigma M_{IV} = 0 : S_{12} \frac{a}{2} \sqrt{3} + G \left[r + (\sqrt{3} - 1) a + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} a - r \right] = 0$$

$$\Sigma M_V = 0 : S_3 \frac{a}{2} \sqrt{3} - G \left[r + (\sqrt{3} - 1) a + a - r \right] = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_7 \frac{\sqrt{3}}{2} + G = 0$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$S_{12} = - 2,423 \text{ G} ; \quad S_3 = 2 \text{ G} ; \quad S_7 = - 1,155 \text{ G}$$

وكذلك بواسطة القطع الذي يمر بالقضبان 3 , 8 , 13 :

$$\Sigma M_{VI} = 0 : S_{13} \frac{a}{2} \sqrt{3} + G \left[r (\sqrt{3} - 1) a + \frac{3}{2} a + \frac{a}{2} - r \right] = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_8 \frac{\sqrt{3}}{2} - 2G = 0$$

بحل هاتين المعادلتين يتم تعيين قوى القضبان :

$$S_{13} = -3,155 G ; S_8 = 2,309 G$$

وأخيراً وبسهولة وبلاستعانة بالعقدة VIII وتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الأفقي عليها وكذلك بالعقدة VII وتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه الشاقولي عليها ، يتم التوصل للمعادلات التالية :

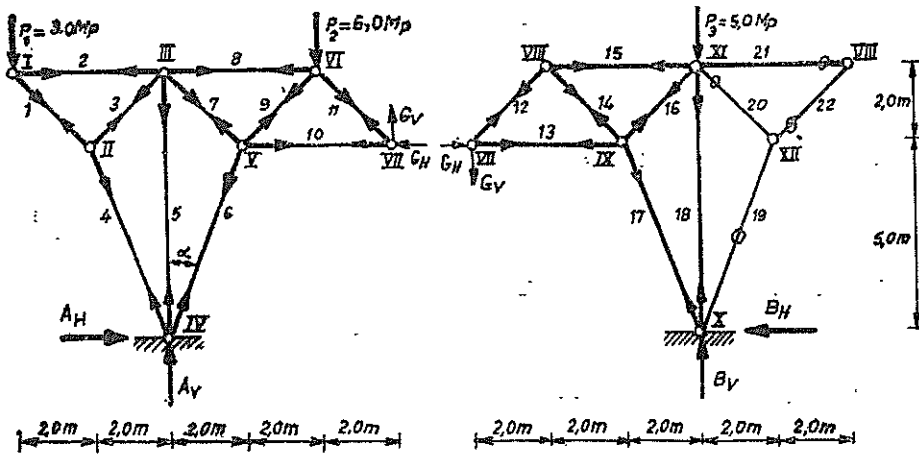
$$S_4 + C = 0 ; S_9 \frac{\sqrt{3}}{2} + B = 0$$

بحل هاتين المعادلتين ينتج :

$$S_4 = -C = 4,309 G ; S_9 = -2,309 G$$

مثال 92 :

المطلوب : حساب قوى قضبان الجائز الشبكي ثلاثي المفصل (شكل 2-188) .



شكل 2-188

الحل :

١ - ردود أفعال الساند وقوى المفصل :

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\sum M_X = 0 : A_v = 8,0 \text{ Mp}$$

$$\sum M_{IV} = 0 : B_v = 6,0 \text{ Mp}$$

وبتطبيق شروط التوازن على الجملة بعد قطعها عند نقطة التمثيل g (العقدة VII) الى شطرين ينتج :

$$M_{gr} = 0 : B_{H1} = 1,2 \text{ Mp}$$

$$M_{gl} = 0 : A_{H1} = 1,2 \text{ Mp}$$

وبتطبيق شروط التوازن على الشطر الايمن او الشطر الايسر ينتج :

$$\sum H = 0 : G_H = 1,2 \text{ Mp}$$

$$\sum V = 0 : G_v = 1,0 \text{ Mp}$$

القرص الشبكي الايسر :

قطع مدور حول العقدة I :

$$\sum H = 0 : S_2 + S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum V = 0 : P_1 + S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_2 = 3,0 \text{ Mp} ; S_1 = -3,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة II :

$$\sum H = 0 : (S_1 - S_3) \frac{\sqrt{2}}{2} - S_4 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\sum V = 0 : (S_1 + S_3) \frac{\sqrt{2}}{2} - S_4 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

$$S_3 = -\frac{9,0 \sqrt{2}}{2} \text{ Mp} , S_4 = -\frac{6,0 \sqrt{29}}{7} \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة IV :

$$\Sigma H = 0 : A_H + (S_6 - S_4) \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A_v + (S_4 + S_6) \frac{5}{\sqrt{29}} + S_5 = 0$$

$$S_6 = -\frac{51,0}{35} \cdot \sqrt{29} \text{ Mp} ; S_5 = \frac{25,0}{7} \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة VII :

$$\Sigma H = 0 : S_{10} + S_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + G_H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + G_v = 0$$

$$S_{10} = -\frac{1,0}{5} \text{ Mp} ; S_{11} = -1,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

قطع ريتز يمر بالقضبان 8 , 9 , 10 (الجزء الايمن) :

$$\Sigma M_v = 0 : -S_8 \cdot 2,0 - G_v \cdot 4,0 + P_2 \cdot 2,0 = 0$$

$$\Sigma V = 0 : +S_9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + P_2 - G_v = 0$$

$$S_8 = 4,0 \text{ Mp} ; S_9 = -5,0 \sqrt{2} \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة V :

$$\Sigma V = 0 : -S_6 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + (S_7 + S_9) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_7 = -\frac{16,0}{7} \sqrt{2} \text{ Mp}$$

أما شرط توازن القوى بالاتجاه الافقي :

$$\sum H=0 : -S_6 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + (S_9 - S_7) \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{10} = 0$$

فيعتبر تدقيقاً للنتائج .

قطع مدور حول العقدة III : ان قوى القصبان التي يتضمنها شرطي التوازن :

$$\sum H=0 : -S_2 + S_8 + (S_7 - S_3) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum V=0 : +(S_3 + S_7) \frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 = 0$$

هي قيم معلومة ولذلك فهي تعتبر كمتدقين على صحة النتائج .

القرص الشبكي الايمن:

بشكل فوري يستطاع التأكد من أن :

$$S_{19} = S_{20} = S_{21} = S_{22} = 0$$

قطع مدور حول العقدة VII :

$$\sum H = 0 : G_H + S_{13} + S_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum V = 0 : -G_V + S_{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_{12} = 1,0 \sqrt{2} \text{ Mp} : S_{13} = - \frac{11,0}{5} \text{ Mp}$$

قطع ريتز يمر بالقصبان 13 , 14 , 15 (الجزء الايسر) :

$$\sum V = 0 : G_V + S_{14} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum M_{IX} = 0 : S_{15} \cdot 2,0 - G_V \cdot 4,0 = 0$$

$$S_{14} = -1,0 \sqrt{2} \text{ Mp} ; S_{15} = 2,0 \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة XI :

$$\Sigma H = 0 : S_{15} + S_{16} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{18} + S_{16} \frac{\sqrt{2}}{2} + P_3 = 0$$

$$S_{16} = -2,0 \sqrt{2} \text{ Mp} ; S_{18} = -3,0 \text{ Mp}$$

قطع مدور حول العقدة IX :

$$\Sigma V = 0 : (S_{14} + S_{16}) \frac{\sqrt{2}}{2} - S_{17} \frac{5}{\sqrt{25}} = 0$$

$$S_{17} = -\frac{3}{5} \sqrt{29} \text{ Mp}$$

أما الشرط الثاني لتوازن القوى :

$$\Sigma H = 0 : -S_{13} + (S_{16} - S_{14}) \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{17} \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

فيعتبر كتحقق على صحة النتائج .

قطع مدور حول العقدة X :

يعتبر شرط التوازن :

$$\Sigma H = 0 : S_{17} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + H = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{17} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + S_{18} + B = 0$$

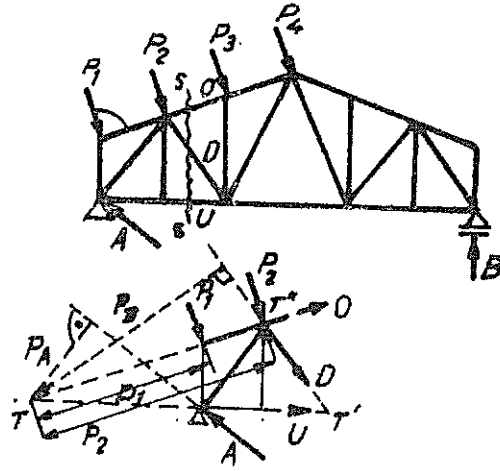
كتحقق على صحة القوى المحسوبة .

٢ - ١ إيجاد قوى القضبان التخطيطية

١ - ٢ - ١ طريقة كولمان

يتم إيجاد ردود أفعال مساند الجائز الشبكي بنفس الطريقة التي تم فيها إيجاد ردود أفعال مساند الجائز البسيط وذلك اما بطريقة تحليلية او بطريقة تخطيطية . لهذا السبب يمكن اعتبارها قيماً معلومة . لإيجاد قوة القضيب D من الجائز الشبكي المبين في الشكل (2-189) والمحمل بمحمولة ما ، يقطع الجائز الشبكي في مكان ما بحيث يكون القضيب D (المطلوب حساب قوته) من بين القضبان المقطوعة شريطة أن لا يزيد عدد القضبان المقطوعة ، عدا القضيب D ، على اثنين .

ليؤخذ من الجائز الشبكي المقطوع ، الجزء الأيسر مثلاً ، ثم اتجمع القوى الخارجية المؤثرة



شكل 2-189

عليه (هنا القوى A_v و P_1) فيتم تعيين المحصلة R_1 . بما ان الجائز الشبكي قبل القطع كان متوازناً ، لذلك ينبغي ان يكون كل جزء من اجزاء بعد القطع متوازناً أيضاً ، اي يجب ان تحقق قوى القضبان المقطوعة O ، D ، U مع محصلة القوى الخارجية R_1 شروط التوازن ، اما قيم قوى القضبان الثلاثة هذه فيتم الحصول عليها بأن يفتش على ثلاثة قوى ، حواملها هي محاور القضبان الثلاثة المقطوعة وتحقق مع المحصلة R_1 حالة التوازن (لقد أصبحت المسألة الآن هي تحقيق حالة التوازن بين المحصلة R_1 وبين ثلاثة قوى بمحمولة القيمة وذات حوامل معلومة) .

لقد تم في الفقرة ١ - ٣ - ٢ (١) معالجة هذه المشكلة وحسبه ينبغي اتباع الخطوات التالية:
يمدد ، في مخطط المكان ، حامل القوة O وحامل المحصلة R_1 حتى يتقاطعا مع بعض
ثم توصل نقطة التقاطع هذه مع نقطة تقاطع حامي القوتين O , U بذلك يتم الحصول على
المستقيم g .

نحقق ، في مخطط المكان ، شروط التوازن بين محصلة القوى الخارجية R_1 وبين قوتين حواملها
O , g . بعد الحصول على تلك القوى يستعاض عن القوة ذات الحامل g (المسماة بالقوة
المساعدة لكولمان) بقوتين حواملها D , U تكافئها . اما جهة دوران الاسهم ، في مضلع
القوى ، فيجب ان تكون مستمرة ، أن اي يغلغ المضلع ويكون دوران الاسهم متتالياً . بذلك
يكون قد تم الحصول على قوة القضيبي D ومعها ايضا القوتان O , U .

نتجه القوة O الى داخل القضيبي المقطوع (داخله فيه) لذا فهي قوة ضاغطة اما القوى D , U
فتتجه الى خارج القضيبي المقطوع (خارجه منه) لذا فهي قوى شادة . ان لطريقة الانشاء
هذه . على القطع المدروس ، ثلاثة امكانيات للتطبيق (الاولى : تقاطع القوى D , U ثم
O , R والثانية : O , D ثم O , R والثالثة : تقاطع القوى O , U ثم D , R) كلها
تؤدي لنفس النتيجة . تسمى هذه الطريقة باسم مكتشفها العالم كولمان وهي قليلة القيمة بالنسبة
للطريقة التي ستليها (طريق ماكسويل - كريغونا) وتستعمل فقط عندما تكون امكانية الحصول
على محصلة القوى الخارجية في الجزء المقطوع من الجائر الشبكي فورية .

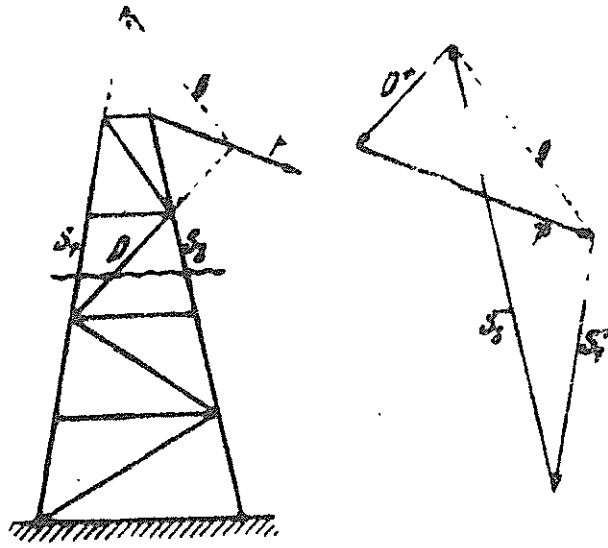
مثال 93 :

حمل الجائر الشبكي المرسوم في الشكل (2-190) والذي يمثل جدار عمود كهربائي
(عمود نقل قدرة) بحمولة وحيدة P (لتكن هذه القوة هي على سبيل المثال قوة شد
حبل فولاذي) .

المطلوب : حساب قوى القضيبان S_1 , S_2 , D الناتجة عن تلك الحمولة .

الحل :

باستخدام طريقة كولمان يتم بسرعة الحصول على قوى القضيبان المطلوبة . باقتطاع الجائر الشبكي
بواسطة قطع يمر بالقضيبان المطلوب حساب القوى فيها وهي S_1 , S_2 , D وبحيث ينفصل الجزء
العلوي عن بقية الجائر الشبكي ، يتبين وجوب كون القوى P , S_1 , S_2 , D التي تؤثر على
الجزء العلوي المقطوع ، متوازنة .



شكل 2-190

بتمديد حاملي القوتين S_1 , S_2 حتى يتقاطعا ثم بوصل نقطة التقاطع هذه مع نقطة تقاطع حامل القوة P مع حامل القوة D (يتم الحصول على المستقيم g) . بعد ذلك لتحقق ، في مضلع القوى ، حالة النوازن بين القوة P وبين قوتين تقع على الحوامل D , g ثم لتحلل بعد ذلك القوة التي يتم الحصول عليها على الحامل g الى مركبتين على الحوامل S_1 , S_2 . ينبغي ان يكون اتجاه دوران مضلع القوى مستمراً ويحدده اتجاه القوة الخارجية P .

تتجه القوى S_1 , D الى خارج القضيب المقطوع لذا فهي قوى شادة أما S_2 فتتجه الى داخل القضيب المقطوع ، لذا فهي قوة ضاغطة .

بنفس الطريقة يمكن أيضاً تعيين قوى القضبان المتبقية في حالة الرغبة في معرفتها . (ان الجائز الشبكي المعطى هو جائز مقرر مستاتيكي ، مسنده الايسر ثابت اما مسنده الايمن فهو مسند نوسي) .

α - ٢ - ٢ طريقة مخطط ماكسويل - كريونا (او طريقة معكوس مخطط القوى)

غالباً ما يتم ايجاد قوى القضبان في جائز شبكي بطرق تخطيطية وذلك بالامسئانة بعدة مضلعات للقوى او ايضاً بواسطة مضلع واحد للقوى فقط .

بطريقة مخطط القوى (وباستعمال مضلعات القوى) ، وبعد أن يتم ايجاد ردود افعال المساند

وقوى التمثفصل . بصار لايجاد قوى القضبان بأن تحقق القوى المؤثرة (القوى الخارجية والقوى الداخلية) على العقدة الواحدة شروط التوازن .

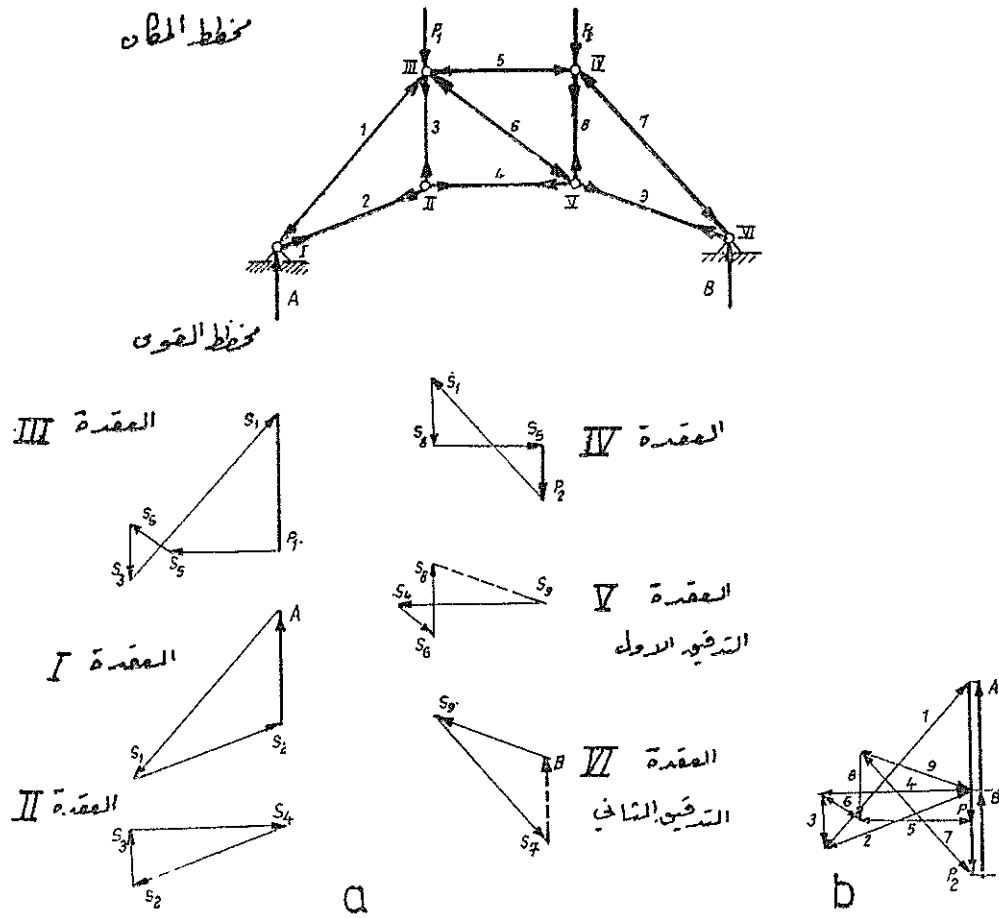
في الجائز الشبكي المتوازن ينبغي ان تكون كل عقدة مقطعة من عقده متوازنة ايضاً .تخطيطياً يعني هذا ان مضلع قوى كل عقدة (القوى الخارجية وقوى القضبان) يجب ان يكون مغلقاً (اذاً يتشكل لكل عقدة مضلع مغلق للقوى) . يمكن استخدام هذا الشرط لايجاد قوى قضبان العقدة في حالة كون المجهول منها لا يزيد على اثنين (وذلك لان هذا الشرط التخطيطي انما يضم شرطي توازن مجموعة القوى المستوية المركزية وهما $\sum H=0$, $\sum V=0$) . بعد ان يتم تعيين اتجاهات قوى القضبان الذي يتم ضمن مخططات القوى ، سوف تنقل هذه الاتجاهات الى مخطط المكان ، حيث تمثل قوة الشد بسهم يخرج من العقدة (يشد العقدة) أما قوة الضغط فتمثل بسهم يدخل الى العقدة (يضغط العقدة) .

لشرح هذه الطريقة سوف تتم دراسة الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-191 a) دراسة شبه مفصلة والقيام بذلك سوف يبدأ بتعيين قوى القضبان في العقدة I ، حيث ينبغي ان تتحقق حالة التوازن بين قوة رد الفعل A وبين القوى S_1 , S_2 التي علمت حواملها (بمعرفة اتجاه قضبانها) . بعد رسم مضلع القوى المغلق التابع لها يتبين ان القضيب 1 هو قضيب مضغوط أما القضيب 2 فهو قضيب مشدود .

اما في العقدة II فان قوة القضيب S_2 معلومة وينبغي ان تتحقق حالة التوازن بينها وبين قوى القضبان S_3 , S_4 .

بعد ذلك وبلاستعانة بالقوى الخارجية وبقوى القضبان S_3 , S_4 التي اصبحت الان معروفة وبعد تحقيق التوازن على العقدة III يتم إيجاد قوى القضبان الضاغطة S_5 , S_6 . بتحقيق حالة التوازن بين القوة المألومة S_5 والقوة الخارجية P_3 وبين بقية قوى قضبان العقدة IV يتم تعيين القوة الضاغطة S_7 والقوة الشادة S_8 .

يعطي تحقيق التوازن على العقدة V قوة القضيب S_9 كما انه يعطي في نفس الوقت أول تدقيق للحل التخطيطي . ينبغي ان تحدد قوى القضبان المألومة S_4 , S_6 , S_8 حامل القوة S_9 ، في مخطط القوى وذلك بحيث ينطبق هذا الحامل على اتجاه القضيب S_9 . وأخيراً وعلى العقدة VI يمكن القيام بالتدقيق الثاني والثالث الذي يتم الحصول عليه اثناء تعيين قوى القضبان على شكل خطوات وذلك لان القوة التي تنتج عن القوى S_9 , S_7 ينبغي ان تكون هي قوة رد الفعل B . فمثلا ينبغي ان تكون القيمة وكذلك الاتجاه صحيحين .



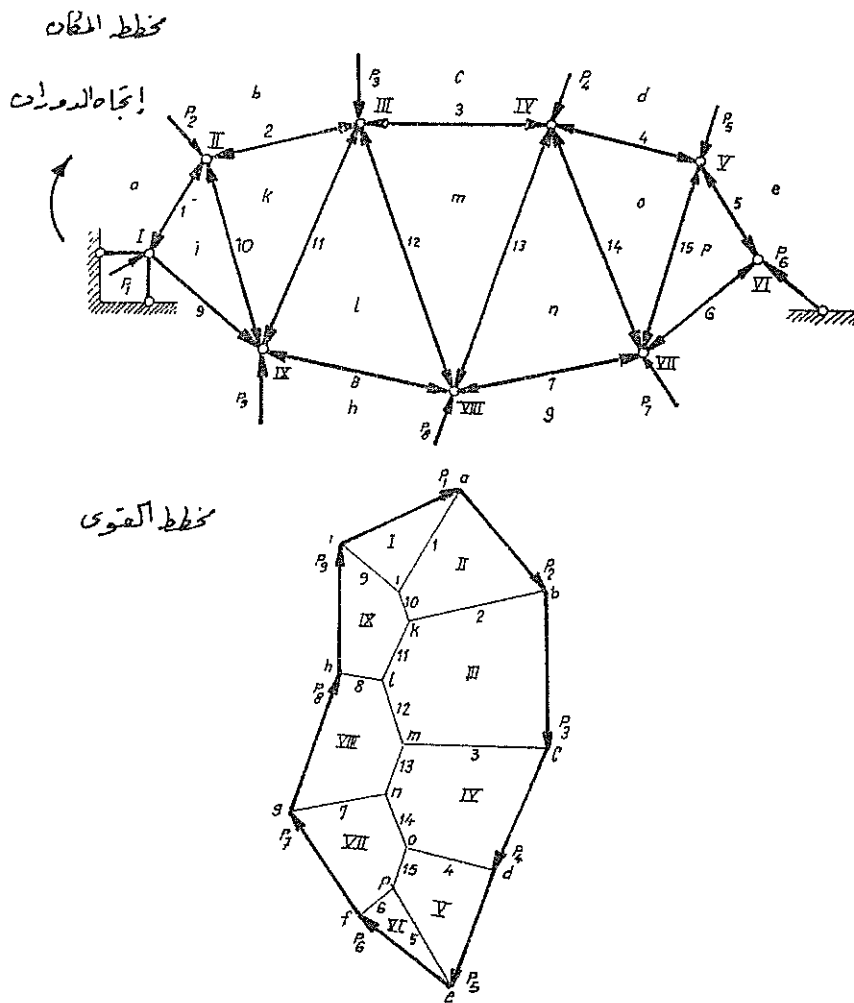
شكل 2-191

ان مساوية هذه الطريقة (طريقة مضلعات القوى) هي وجوب نقل قوى القضبان التي يتم تعيينها (قيمة ومنحاً واتجهاً) بالطريقة التخطيطة الى مضلعات قوى أخرى وما يترتب عن ذلك من عدم الدقة الكافية لاعطاء القوة بعد النقل قيمتها الصحيحة . لهذا السبب ولتفادي عدم الدقة الكافية ، يفضل توحيد مضلعات القوى مع بعضها بحيث تظهر القوة الواحدة مرة واحدة فقط وبذلك ينتج عنها مضلعاً متحداً للقوى . اما هذا فيطلب ترتيباً قانونياً محكماً لمضلعات القوى الافردية التي تم في الشكل (2-191a) ، اخذها بعين الاعتبار . لقد حوى الشكل (2-191b) كافة مضلعات القوى الافردية في مضلع واحد ، فالقوة الواحدة ورد الفعل الواحد تظهر فيه مرة واحدة فقط . تعود امكانية تعيين كافة قوى القضبان ضمن مخطط واحد للقوى الى العلاقة العكسية القائمة بين مخطط المكان ومخطط القوى . يسمى مخطط القوى المعكوس (العكسي)، نسبة للعالمين ماكسويل (MAXWELL) وكريمونا (CREMONA) بمخطط ماكسويل - كريمونا . يانم اثناء انشاء مخطط ماكسويل - كريمونا مراعاة القواعد التالية :

١ - ترسم المحولة المعطاة وردود افعال المساند وقوى التماسك التي تشكل فيما بينها حالة التوازن في مضلع القوى بنفس التسلسل الذي ينتج عن الدوران حول جزعي (وترتي) الجائز الشبكي باتجاه عقارب الساعة او بعكس اتجاه عقارب الساعة . يفضل عادة أخذ اتجاه عقارب الساعة . ينبغي ان تكون عقد الجائز الشبكي الداخلية غير محملة .

٣ - تضاف كافة القوى التي تؤثر على العقدة الواحدة من الجائز الشبكي ، في مخطط المكان ، الى مضلع القوى بنفس التسلسل الذي يتم الحصول عليه بالدوران حول العقدة باتجاه عقارب الساعة او بعكسها . لا يجوز اثناء التقدم من عقدة الى عقدة اخرى تبديل اتجاه الدوران فيها كما ينبغي ان يتطابق مع اتجاه الدوران الذي تم اختياره في القاعدة 1 السابقة .

لقد تم ، من اجل الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-192) رسم مخطط ماكسويل-كريمونا



شكل 2-192

لتسهيل تثبيت العلاقات بين مخطط المكان ومخطط القوى سوف يرمز للرؤوس (الزوايا) الخارجية التي تحددها حوامل القوى P_v وقضبان الجزع (الوتر) بالأحرف a, b, \dots, i كما سوف يرمز للرؤوس (الزوايا) الداخلية للجائز الشبكي بالأحرف j, k, \dots, p . يقابل كل قضيب في مخطط المكان مستقيماً في مخطط القوى وبالعكس . ويقابل كل عقدة في مخطط المكان (والتي ستترقم بأعداد رومانية) مضلعاً مغلقاً في مخطط القوى وبالعكس . كما يقابل كل زاوية داخلية (رأس داخلي) وكل زاوية خارجية (رأس خارجي) (والتي ستترقم بأحرف لاتينية) في مخطط المكان ، نقطة في مضلع القوى وبالعكس . تسمى العلاقات المتبادلة هذه التي تربط بين مخطط المكان ومخطط القوى بالعلاقات العكسية (reziproke Beziehungen) . بمقارنة الزوايا (الرؤوس) الداخلية والخارجية التي تصادف اثناء الدوران حول عقد الجائز الشبكي باتجاه الدوران المفروض مع النقاط التي تقابلها في مخطط القوى ، يستطاع اعطاء اشارة قوة القضيب ايضاً . فعلى سبيل المثال ان الانتقال من الزاوية الخارجية b الى الزاوية الخارجية c اثناء الدوران حول العقدة III ، يحدد ، في مخطط القوى ، القوة P_3 التي تؤثر على العقدة المذكورة (والتي تتجه الى العقدة) . كما ان النقاط c, m ، في مخطط القوى ، والتي تقابل كل من الزاوية الخارجية c والزاوية الداخلية m تحدد قوة القضيب S_3 التي هي قوة ضاغطة . كما وان النقاط التي تقابل الزاوية الداخلية m, l في مخطط القوى ، هي التي تعطي قوة الضغط $S_{1,2}$ والنخ . بعد الانتهاء من انشاء مخطط ماكسويل - كريونا يلجأ لكتابة النتائج النهائية (لقوى القضبان) دفعة واحدة ضمن جدول كالآتي :

v	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_v [Mp]$								

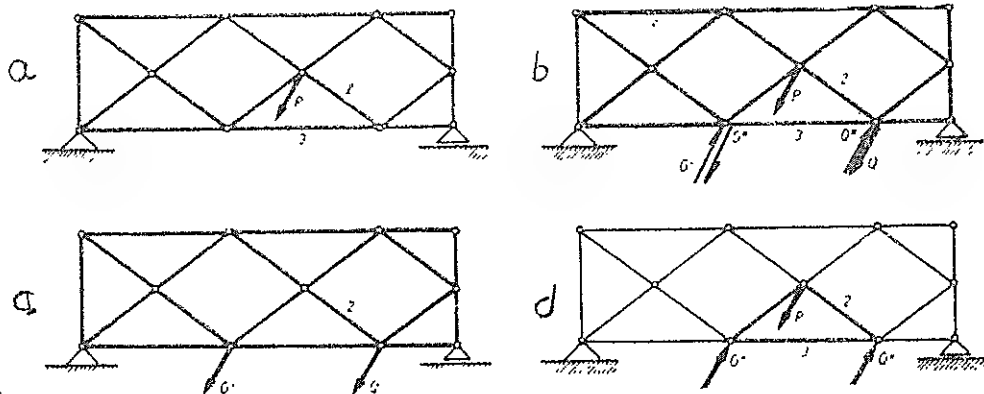
للتطبيق العملي لمخطط ماكسويل - كريونا ينبغي مراعاة الخطوط الرئيسية التالية :

- ١ - يرسم الجائز الشبكي ، بعد اختيار مناسب لمقياس الأطوال (ينبغي ان لا يكون انقياس المختار صغيراً جداً) . بعد ذلك ترقيم العقد بأعداد رومانية (هكذا I, II و ... الخ) وترقم القضبان بأعداد عربية (هكذا 1 و 2 و ... والنخ) .
- ٢ - نعين ردود أفعال المساند وقوى التماسك تحليلياً أو تخطيطياً .
- ٣ - يرسم ، بعد اختيار مناسب لمقياس القوى ، مضلع قوى مغلق للقوى الخارجية (وحولات العقد وردود افعال المساند) وذلك بأخذ القوى بالتسلسل الذي يتم الحصول عليه بالدوران حول الجائز الشبكي باتجاه عقارب الساعة المختار .
- ٤ - يبدأ مخطط ماكسويل - كريونا بمقدمة ثنائية القضبان (عقدة يلتقي فيها قضبان فقط) ويرسم للقوى التي تؤثر عليها والموجودة فيها (حولات العقد وقوى القضبان) مضلعاً مغلقاً للقوى.

ترسم القوى المذكورة بالتسلسل الذي يتم الحصول عليه بالدوران حول العقدة باتجاه عقارب الساعة المختار (اتجاه الدوران المختار)

٥ - يفضل ، قبل الابتداء برسم مخطط ماكسويل - كريونا ، تعيين قضبان الصفر الموجودة في الجائز الشبكي .

لا يستطاع رسم مخطط ماكسويل - كريونا الا عندما تؤثر الحمولة وردود افعال المساند على عقد الجزع (الوتر) . أما اذا صدف وكانت هناك عقد داخلية محملة (شكل 2-193 a) فبالامكان بالرغم من ذلك تعيين قوى القضبان وذلك بالاستعانة بترتيب الحمولات (Belastungsumordnung) وعلى مرحلتين . للتمكن من القيام بذلك يلزم اضافة مجموعتين توازيتين هما (G'', G') و (Q'', Q') تطبق على عقدتين من عقد الجزع (الوتر) وبحيث تشكل مجموعة القوى (Q'', G', P) فيما بينها مجموعة توازنية (شكل 2-193 b) . من اجل الجائز الشبكي المحمل بالقوى Q', G' فان مخطط ماكسويل - كريونا (شكل 2-193 c) يعطي قوة القضيب $S''v$. بعد ذلك يصار لرسم مخطط اخر من اجل المجموعة التوازنية (Q'', G'', P) (شكل 2-193 d) . بما ان هذه الحمولة متوازنة فيما بينها لذلك لا تشكل في الجائز الشبكي ردود افعال مساند كما لا تظهر قوى الا في القضبان 1 , 2 , 3 فقط وهي $S''v$.



شكل 2-193

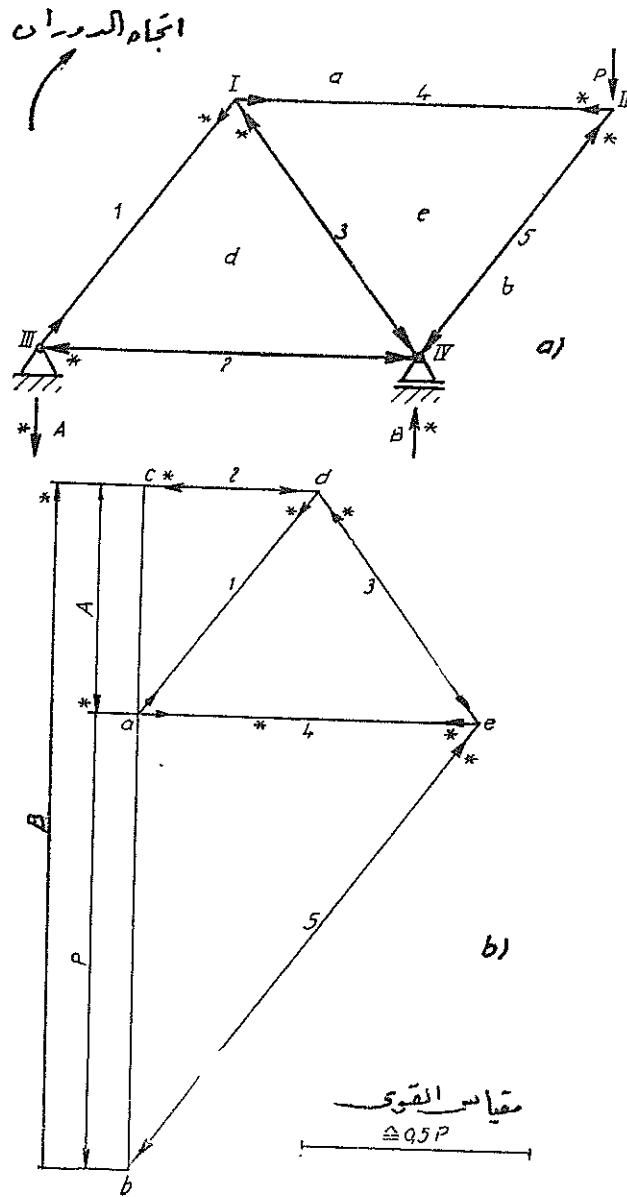
أما قوى القضبان النهائية فيتم التوصل اليها باستخدام مبدأ التناضح (مبدأ جمع الاثار) وذلك كما يلي :

$$S_v = S'_v + S''v \quad ; \quad v = 1, 2, 3$$

$$S_v = S'_v \quad ; \quad v \neq 1, 2, 3$$

مثال 94 :

المعطى : P وكافة أبعاد الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-194) .
 المطلوب : إيجاد ردود أفعال المساند وقوى القضبان .



شكل 2-194

الحل:

باختيار تسلسل العقد التالي II , I , III و IV أو II , I , IV , III يستطيع إيجاد قوى قضبان الجائز الشبكي .

ترسم القوة P بقياس القوى (شكل 2-194) ثم ترسم بمدها قوى القضبان S_4 , S_5 بنفس التسلسل (وبعد اخذ اتجاه الدوران بعين الاعتبار) لتشكيل مضلعاً مغلقاً للقوى . بما ان قوى العقدة II وهي S_4 , S_5 , P موجودة في حالة توازن لذلك ينبغي ان تأخذ في مضلع القوى نفس إتجاهها الفعلي . لقد أشير للاتجاه الفعلي للقوى بـ ★ (فعلى سبيل المثال إن المسافة 5 ، في مضلع القوى ، تشير الى القضيب 5 في مخطط المكان . لاتصال النهاية اليمنى للقضيب 5 بالعقدة II فلقد تم رسم ★ في مخطط القوى جانب رأس السهم التابع للقوة 5 وعلى النهاية العليا اليمينية) . تنقل اتجاهات الاسهم الى مخطط المكان . حسب مبدأ الفعل ورد الفعل ينبغي أن يعكس اتجاه قوى القضبان في النهاية الاخرى (I او IV) سواء في مخطط المكان أو في مضلع القوى (بذلك يتم الحصول على رؤوس الاسهم بدون ★) . وبهذه الطريقة يتم الحصول على الاصطلاحات التي تشير الى قوى الشد وقوى الضغط . بالامكان تتبع انشاء مخطط ماكسويل - كريغونا من خلال الشكل (2-194) .

النتائج:

$$S_1 = + 0,625 P ; S_4 = + 0,750 P ; A = 0,500 P$$

$$S_2 = - 0,375 P ; S_5 = - 1,250 P ; B = 1,500 P$$

$$S_3 = - 0,625 P$$

التدقيق:

كما تم التنويه عنه سابقاً ، توجد هناك علاقة هندسية تربط بين الجملة الحاملة (والتي تعتبر حوامل القوى جزءاً منها) وبين مخطط القوى :

- ١ - يقابل كل خط في الجائز خطأ في مخطط القوى والعكس صحيح .
- ٢ - يقابل كل عقدة في الجائز الشبكي مضلعاً في مخطط القوى وبالعكس فكل زاوية في مخطط القوى يقابلها مضلع في الجائز . تنطبق هذه القاعدة ايضاً على زوايا مضلع القوى التي تلتقي فيها قوتان خارجيتان وقوة قضيب واحدة او عدة قوى .
- يتألف المضلع في مخطط المكان من حوامل القوى الخارجية ومن محاور القضبان الواقعة بينها . يمكن اعتبار المضلع مغلقاً وذلك بتمديد القوى الخارجية حتى تتلاقى .
- يدعى كل شكلين تربط بينهما تلك العلاقات الهندسية بالاشكال المكمومة . تقابل ، في الشكل

(2-194) نقاط الزوايا e , d , c , b , a في مخطط القوى ، المضلعات e , d , c , b , a في مخطط المكان . يمكن في هذه الحالة اعتبار كل ما ذكر تدقيقاً .

مثال 95 :

المطلوب : إيجاد قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-185) .

الحل :

لا يستطاع تطبيق إنشاء مخطط ماكسويل - كريونا على الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-195a) إلا بعد إيجاد مسبق لقوة قضيب وعلى سبيل المثال بطريقة القطع . ولقيام بذلك يلزم إيجاد ردود أفعال المساند . بتطبيق شروط التوازن على الشكل (2-195 b) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\Sigma V = 0 : -A_v + B = 0$$

$$\Sigma H = 0 : -A_H + 2 P + P = 0$$

$$\Sigma M_a = 0 : -4 P l - 3 P l + 4 B_v l = 0$$

التي تعطي بعد حلها ردود أفعال المساند :

$$A_H = 3 P ; A_v = \frac{7}{4} P ; B = \frac{7}{4} P$$

بدراسة الجزء الأيمن من الشكل (2-195a) المقطوع بواسطة القطع i-i (شكل 2-195 c) ينتج :

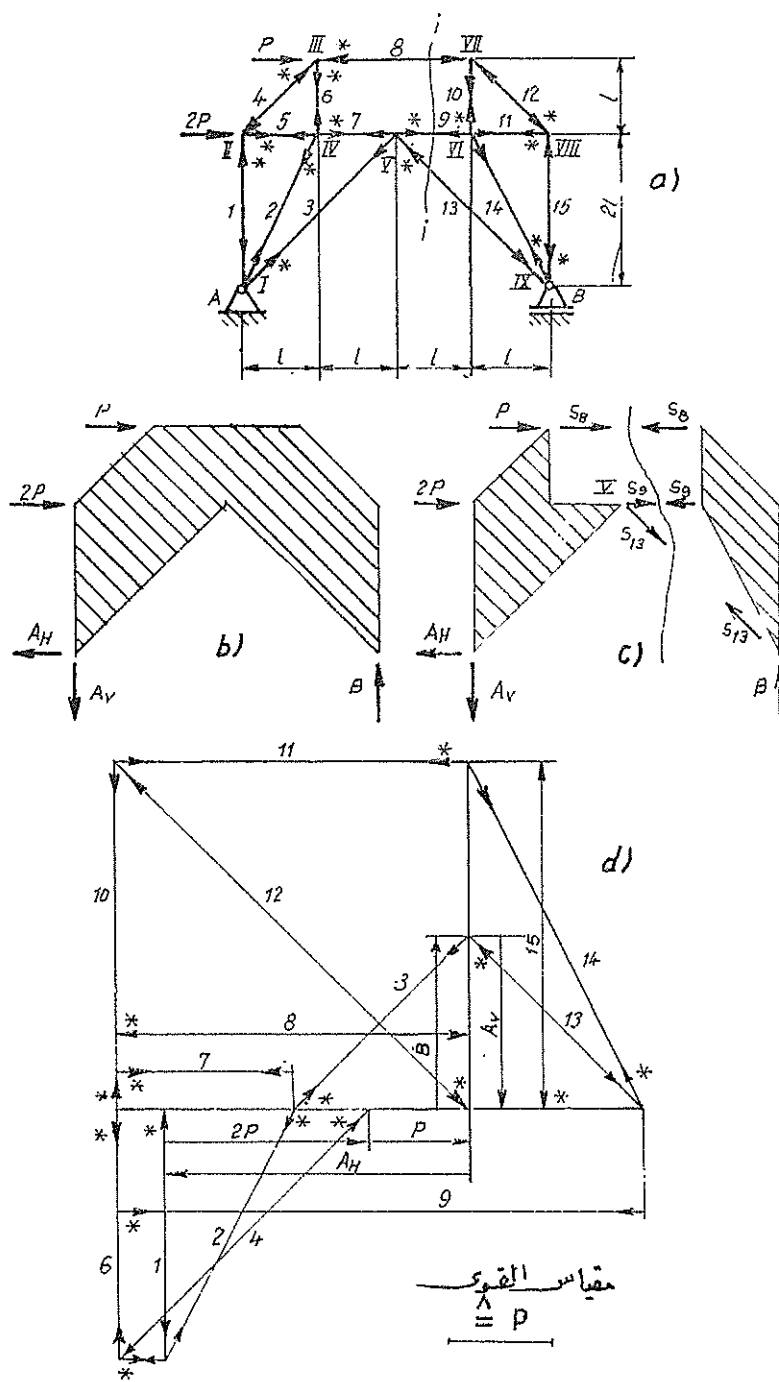
$$\Sigma M_v = 0 : S_8 l + 2 B l = 0$$

بحلها يتم تعيين القوة :

$$S_8 = -\frac{7}{2} P$$

باستخدام طريقة مخطط ماكسويل - كريونا يستطاع الآن ، على سبيل المثال ، الابتداء بالعقدة III : مضلع القوى P , 8* , 6* , 4* (شكل 2-195 d) .

وبعد ذلك متابعة الانشاء على العقد التالية :



شكل 2-195

- II : مضلع القوى $P, 2, 4, 5^*, 1^*$
- IV : مضلع القوى $5, 6, 7^*, 2^*$
- I : مضلع القوى $A_v, A_{II}, 1, 2, 3^*$
- V : مضلع القوى $3, 7, 9^*, 13^*$
- IX : مضلع القوى $B, 13, 14^*, 15^*$
- VIII : مضلع القوى $15, 11^*, 12^*$
- VI : مضلع القوى $11, 14, 9, 10^*$
- VII : مضلع القوى $12, 10, 8$

النتائج :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -2,500 P ; S_5 = + 0,500 P ; S_{10} = + 3,500 P ; S_{14} = + 3,913 P \\
 S_2 &= + 2,795 P ; S_6 = + 2,500 P ; S_{11} = + 3,500 P ; S_{15} = - 3,500 P \\
 S_3 &= + 2,475 P ; S_7 = + 1,750 P ; S_{12} = - 4,950 P \\
 S_4 &= - 3,536 P ; S_9 = + 5,250 P ; S_{13} = - 2,475 P
 \end{aligned}$$

مثال 96 :

المطلوب : إيجاد قوى القضبان للجائر الشبكي المرسوم في الشكل (2-196) والذي يمثل سقفاً لسطح (Dachbinder) .

الحل :

قبل الابتداء بتعيين قوى القضبان ينبغي إيجاد ردود أفعال المساند .

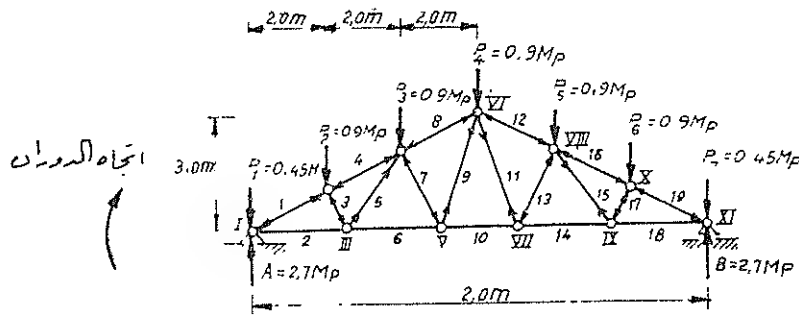
١ - ردود افعال المساند :

بسبب تناظر الشكل الهندسي والحمولي فإن ردود افعال المساند تبلغ :

$$A = B = 2,7 \text{ Mp}$$

٢ - قوى القضبان :

يبدأ برسم مضلع قوى مغلق لحملات العقد الخارجية وردود افعال المساند . بعد ذلك يبدأ بإنشاء مخطط ماكسويل - كريونا إنطلاقاً من العقدة 1 ثم يتابع الحل ، حسب الخطوة المشار إليها في الجدول التالي :

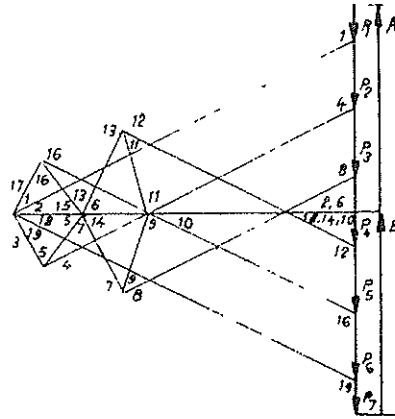


مخطط القوت

1 200

مخطط القوى

1cm = 1.0Mp



ن	1,19	2,8	3,17	4,16	5,15	6,14	7,13	8,12	9,11	10
$S_p [Mp]$	-5,040	4,500	-0805	-4 630	0,900	3,600	-1,210	-3,420	1,140	2,700

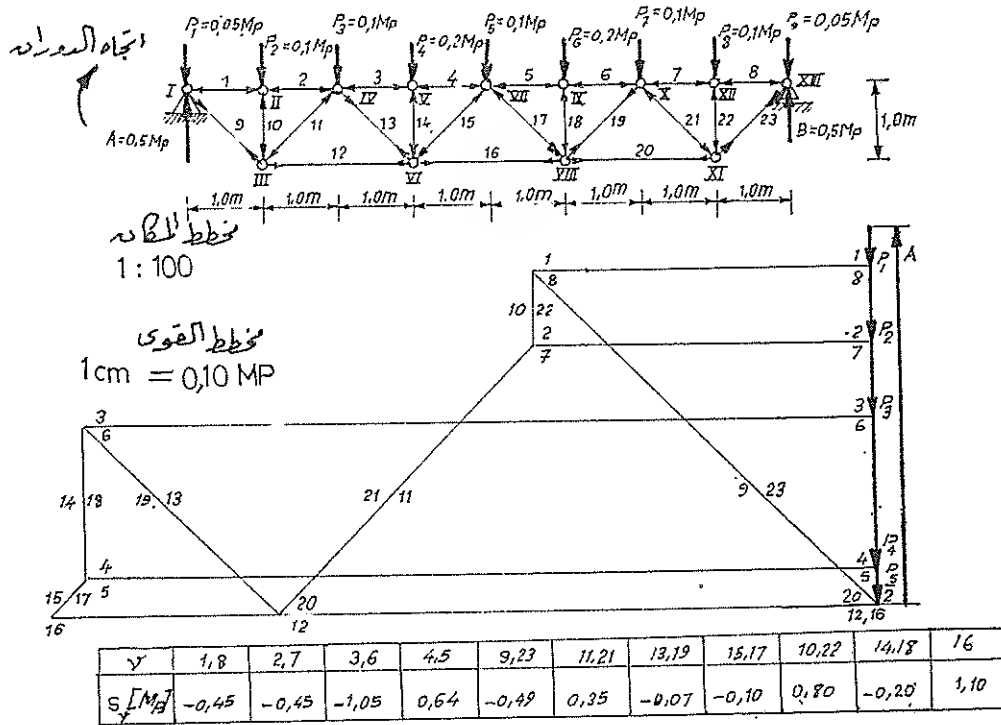
شكل 2-196

القوى المجهولة	القوى المعروفة	العقدة
S_2, S_1	P_1, A	I
S_3, S_4	P_2, S_1	II
S_6, S_5	S_3, S_2	III
S_7, S_8	P_3, S_4, S_5	IV
S_{10}, S_9	S_7, S_6	V
S_{11}, S_{12}	P_4, S_8, S_9	VI
S_{14}, S_{13}	S_{11}, S_{10}	VII
S_{15}, S_{16}	P_5, S_{12}, S_{13}	VIII
S_{18}, S_{17}	S_{15}, S_{14}	IX
S_{19} (التدقيق الاول)	P_6, S_{16}, S_{17}	X
- (التدقيق الثاني والثالث)	S_7, S_{19}, S_{18}, B	XI

بعد أخذ مقياس القوى المختار بعين الاعتبار استطاع التوصل لقيم قوى القضبان .

مثال 97 :

المطلوب : تعيين قوى القضبان في الجائز الشبكي المرسوم في الشكل (2-197) والذي يمثل رافعة .



شكل 2-197

الحل :

١ - ردود أفعال المساند :

بسبب التناظر في الشكل والحالة فإن ردود أفعال المساند تبلغ :

$$A = B = 0,5 \text{ Mp}$$

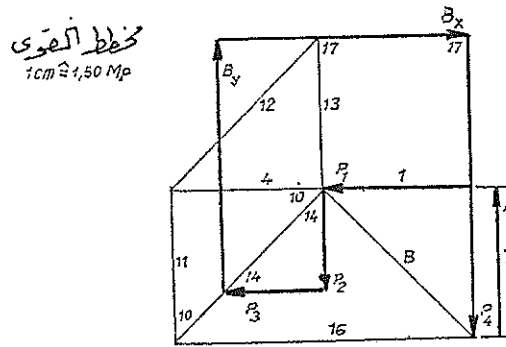
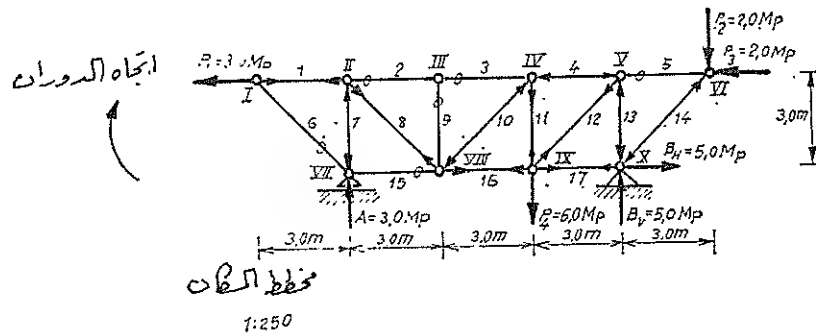
٢ - قوى القضبان :

بسبب التناظر الهندسي للجائز الشبكي والتناظر الجولي استطاع أثناء رسم مخطط القوى الاكتفاء بالجزء الأيسر من الرافعة وذلك عندما تنصف الحالة P_5 .

يبدأ مخطط ماكسويل - كريغونا بالعقدة I ثم تعقبها بقية العقد ويراعى أثناء رسم المخطط ، اتجاه الدوران المشار اليه في مخطط المكان . بأخذ مقياس القوى بعين الاعتبار يتم التوصل لقوى القضبان المدونة في الجدول .

مثال 98 :

حمل الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-198) بالقوى $P_1=3,0\text{Mp}$ و $P_2=2,0\text{Mp}$ و $P_3=2,0\text{Mp}$ و $P_4=6,0\text{Mp}$ و $P_5=2,0\text{Mp}$.
المطلوب : إيجاد قوى القضبان .



ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_j [\text{Mp}]$	3,0	2,2	0,0	-3,0	0,2	2,2	-3,0	4,24	0,0	-4,24

	12	13	14	15	16	17	
$S_j [\text{Mp}]$	3,0	-4,24	-3,0	-2,83	0,0	6,0	3,0

شكل 2-198

الحل :

١ - ردود افعال المساند

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل ينتج :

$$\Sigma M_x = 0 : A_v = 3,0 \text{ Mp}$$

$$\Sigma V = 0 : B_v = 5,0 \text{ Mp}$$

$$\Sigma H = 0 : B_H = 5,0 \text{ Mp}$$

٢ - قوى القضبان :

بشكل فوري وسريع يستطاع التوصل الى ان القضبان 5 , 6 , 9 , 15 هي قضبان صفر . بسبب كون $S_6=0$ فان $S_7=-A$ وبسبب كون $S_9=0$ ينتج ان $S_2=S_3$ وكذلك ينتج من حقيقة كون $S_5=0$ ان $S_{12} = -2\sqrt{2} \text{ Mp}$. سوف يتبدأ رسم مخطط ماكسويل - كريمونا بالعقدة II وبذلك يتم التوصل ، من أجل المحولة المعطاة ، إلى ان $S_2=S_3=0$ وبذلك يستطاع متابعة رسم المخطط .

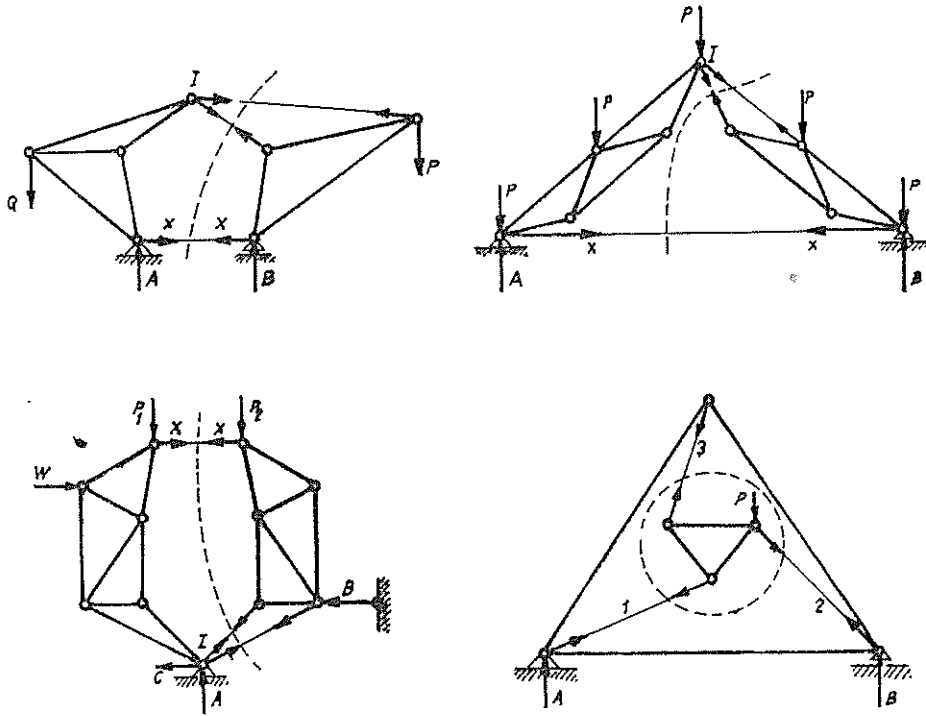
٢ - ١٤ - ٦ الجيزان الشبكية المعقدة - طريقة هينبرغ

لقد تم حتى الان التعرض للتركيبات الشبكية البسيطة وهناك بعض الجيزان الشبكية المستوية التي تلتقي في كل عقدها ثلاثة قضبان او اكثر والتي تسمى بالجيزان الشبكية المعقدة المستوية (ebenen nichteinfachen Fachwerken) . يصعب في هذه الجيزان استخدام طرائق تعيين قوى القضبان المتبعة في الفقرات السابقة .

لكن هناك قليل من هذه الجيزان يستطاع التغلب على صعوبة إيجاد قوى القضبان فيها باستخدام قطع مناسب (قطع مدور أو قطع ريتز) يمر بأكثر من ثلاثة قضبان وبشكل يستطاع فيه إيجاد قوة احدى هذه القضبان مستقلة عن بقية قوى القضبان والاستعانة بشروط التوازن فقط . لقد تم في الاشكال (2-199 a) حتى (2-199 d) و (2-200) عرض بعض هذه المضلعات الرئيسية (الجيزان الشبكية الرئيسية) كما قد أُشير فيها الى القطوع المناسبة .

فمن أجل المضلعات الرئيسية الممثلة في الاشكال (2-199 a) حتى (2-199 c) يسهل ، بعد إجراء القطوع المشار اليها هناك ، تعيين قوة القضيب X بتطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للعقدة I .

وفي حالة الجائز الشبكي المعقد الممثل في الشكل (2-199 d) يصار الى إجراء قطع مدور حول المثلث الحمل وبعد ذلك ، ولتعيين قوى القضبان 1 , 2 , 3 ، تستخدم طريقة كولمان التخطيطية وبذلك يصبح إيجاد ما تبقى من قوى القضبان ممكناً .

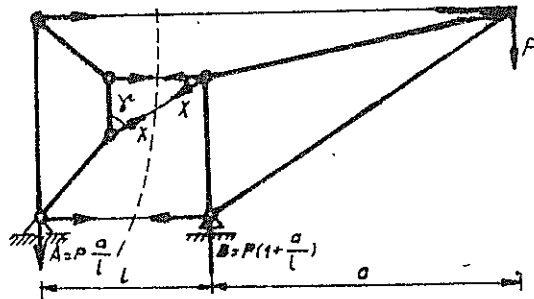


شكل 2-199

اما من اجل المضلع الممثل في الشكل (2-200) فيتم تعيين قوى القضبان المجهولة بتطبيق شرط توازن القوى الشاقولية على القطع الايسر وذلك كما يلي :

$$X \cos \gamma - A = 0$$

اما ما تبقى من قوى القضبان فيسهل ايجادها باستخدام طريقة مضامعات القوى .
اما البقية الباقية من الجيزان الشبكية فتفشل من اجلها كافة الطرائق السابقة لتعيين قوى القضبان

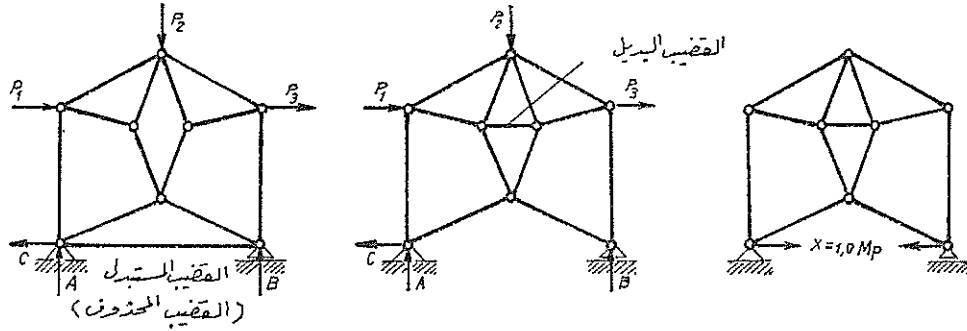


شكل 2-200

وعندئذ ينبغي اللجوء للطريقة التي قام العالم هينبرغ (HENNEBERG) باكتشافها والتي تسمى بطريقة تبديل القضيب (Stabtauschverfahren) أو طريقة القضيب البديل (Ersatzstabverfahren).

يمكن تلخيص هذه الطريقة فيما يلي :

١ - يعدل شكل التركيب الشبكي بحيث يحول من تركيب معقد الى تركيب بسيط وذلك بحذف أحد قضبانه (الذي يسمى بالقضيب المبدل او القضيب المستعاض) وإضافة قضيب آخر (والذي يسمى بالقضيب البديل او القضيب الاضافي) في موضع مناسب بين عقدتين (شكل 2-201 a). وقد يلزم (في بعض الحالات) حذف أكثر من قضيب واحد وإضافة نفس العدد من القضبان في مواضع أخرى . يشترط في الجملة المعدلة ، التي يتم الحصول عليها بحذف قضيب وإضافة قضيب آخر في موضع ثاني ، ان لا تكون متحركة (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء للمؤلف) .



شكل 2-201

٢ - تحسب القوى الداخلية في التركيب الشبكي المعدل (التركيب الشبكي البسيط) نتيجة للحمولات الخارجية وذلك بأي من الطرق العادية السابقة (شكل 2-201 b) وسيرمز لهذه القوى بالرمز S_{iL} والقوة الناتجة في القضيب الاضافي أهمية خاصة ولهذا سيرمز لها بالحرف S^*_L .

٣ - يتخيل ان القضيب المحذوف (القضيب المستبدل) قد حلت مكانه قوة شد تجذب كلا من العقدتين عند طرفيه وان هذه القوة تساوي 1 ميغا بونداً (شكل 2-201 c). ثم تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب المعدل نتيجة لهاتين القوتين المتساويتين والمتعاكستين والمؤثرتين على العقدتين . وسيرمز للقوى الداخلية في هذه الحالة بالرمز S_{i1} والقوة المتولدة في القضيب الاضافي بالرمز S^*_1 .

٤ - بفرض ان القيمة الحقيقية للقوة الداخلية في القضيب المحذوف (القضيب المستبدل) هي X ميغا بوندأ ، فمعنى هذا هو انه لو اثر على التركيب الشبكي المعدل عند تقاطعي اتصال (عقدتي) هذا القضيب بقوتين متساويتين ومتعاكستين وتساوي كل منهما X ميغا بوندأ ، فان قوى قضبان الجائز الشبكي المعدل تصبح XS_{i1} وان القوة في القضيب البديل (القضيب الاضافي) هي XS_{i1}^* .

اذا اثر الان على الجائز المعدل كلا المحولتين ، حمولات العقد P_v وقوة القضيب المحذوف X دفعة واحدة فان قوة القضيب البديل (القضيب الاضافي) تأخذ القيمة التالية :

$$S^* = S_L^* + X S_{i1}^*$$

في الحقيقة ان القضيب البديل (القضيب الاضافي) هو قضيب وهمي وليس له وجود في الجائز الشبكي المعقد الاصلي ، لذلك فهو لا يستطيع ان يتحمل اية قوة ، اي ينبغي ان تكون القوة فيه معدومة ويمبر عن ذلك كما يلي :

$$S^* = S_L^* + X S_{i1}^* = 0 \quad (2-19)$$

من هذه المعادلة يتم تعيين المجهول المطلوب المائد للجائز الشبكي المعقد الاصلي وذلك كما يلي :

$$X = - \frac{S_L^*}{S_{i1}^*} \quad (2-20)$$

المفهوم الميكانيكي للطريقة : لو اثر على التركيب الشبكي المعدل عند تقاطعي اتصال القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) بقوتين متساويتين ومتعاكستين وتساوي كلا منهما X ميغا بوندأ بحيث تصبح القوة الداخلية في القضيب الاضافي (القضيب البديل) هي XS_{i1}^* ميغا بوندأ فان هذه القوة يجب ان تساوي وتعاكس القوة S_L^* الناتجة عن المحولات الخارجية وذلك حتى تنعدم القوة الداخلية في هذا القضيب الوهمي نتيجة للحمولات الخارجية والقوة الداخلية X ميغا بوندأ .

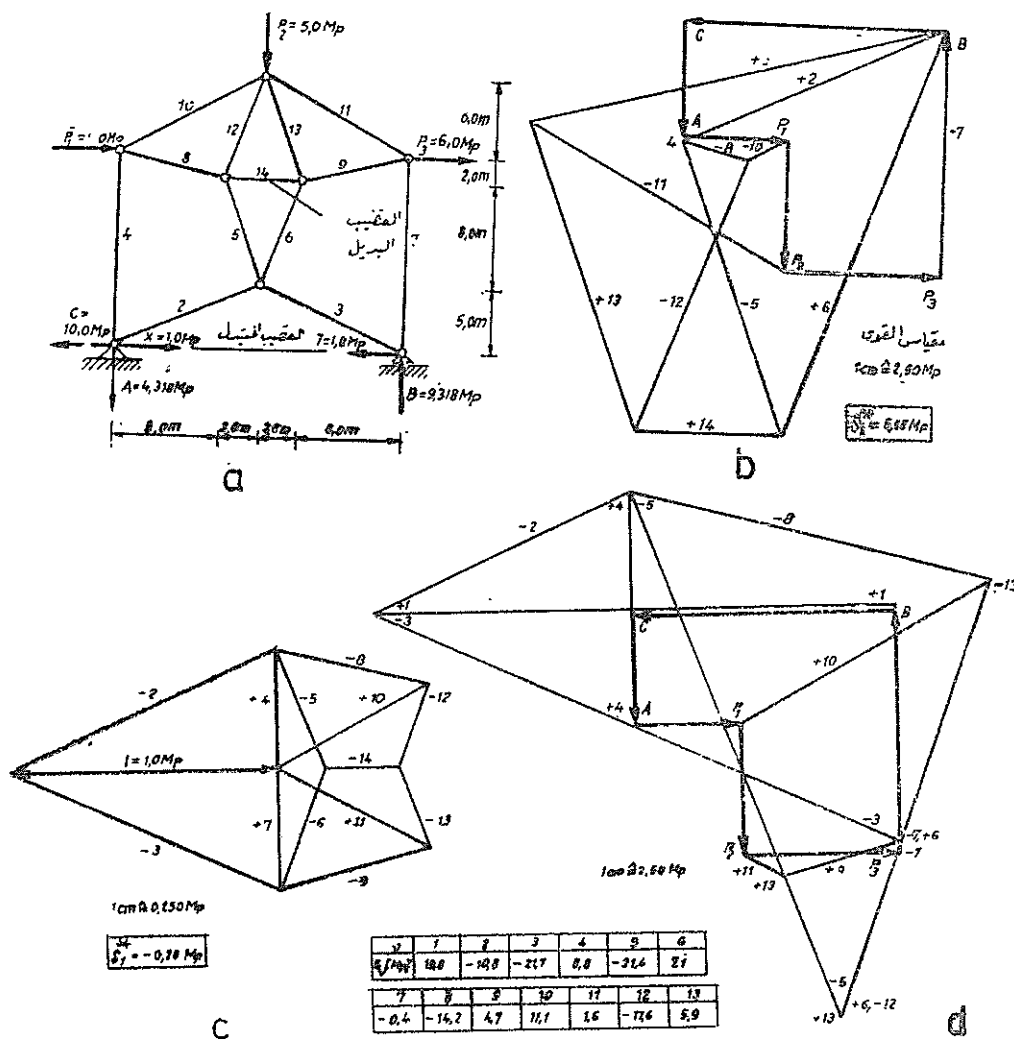
• - يمكن حساب القوة S_i النهائية في أي قضيب من العلاقة التالية :

$$S_i = S_{iL} + X S_{i1} \quad (2-21)$$

بالامكان ايضاً وبطريقة تخطيطية ايجاد القوى S_i . فبالاستعانة بقوة القضيب X التي اصبحت

مثال 99 :

المطلوب : إيجاد قوى القضبان في الجائر الشبكي الممثل في الشكل (a-202) .



شکل 2-202

الحل :

ان الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-202 a) هو جائز شبكي معقد .

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجائز الشبكي ككل يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = 4,318 \text{ Mp} , \quad B = 9,318 \text{ Mp} , \quad C = 10,0 \text{ Mp}$$

٢ - قوى القضبان :

سوف يتم ايجاد قوى القضبان باستخدام طريقة هنيبرغ (طريقة تبديل القضيب) : سوف يختار القضيب 1 قضيباً مستبدلاً ويحذف من الجائز الشبكي ، بعد ذلك يضاف اليه القضيب البديل (القضيب الاضافي) وهو القضيب 14 .

لقد تم في الشكل (2-202 b) ومن اجل المحولة A , G , P₁ , P₂ , P₃ , B رسم مخطط ماكسويل - كريمونا للجائز الشبكي المعدل .

لقد تم حتى الان في الفقرات السابقة نقل اتجاه قوى القضبان الى مخطط المكان ، أما هنا ، وفي هذه الفقرة ، فقد الحقت ، في مخطط القوى ، اشارة كل قوة الى جانب رقم القضيب .

من مخطط ماكسويل - كريمونا (شكل 2-202 c) يتم قياس قوة القضيب البديل (القضيب 14) والتي تبلغ في هذا المثال $S_L^* = 5,55 \text{ Mp}$. لقد تم في الشكل (2-202 c) ومن اجل قوة القضيب المستبدل $X = 1,0 \text{ Mp}$ واعتبارها هي المحولة رسم مخطط ماكسويل - كريمونا . هنا تبلغ قوة القضيب البديل (القضيب 14) $S_1^* = - 0,28 \text{ Mp}$. بتبديل هذه القيم في العلاقة (2-20) يتم تعيين المجهول المطلوب :

$$X = - \frac{S_L^*}{S_1^*} = - \frac{5,55}{-0,28} = 19,8$$

الذي يمثل قوة القضيب 1 الفعلية من الجائز الشبكي المعقد الاصلي .

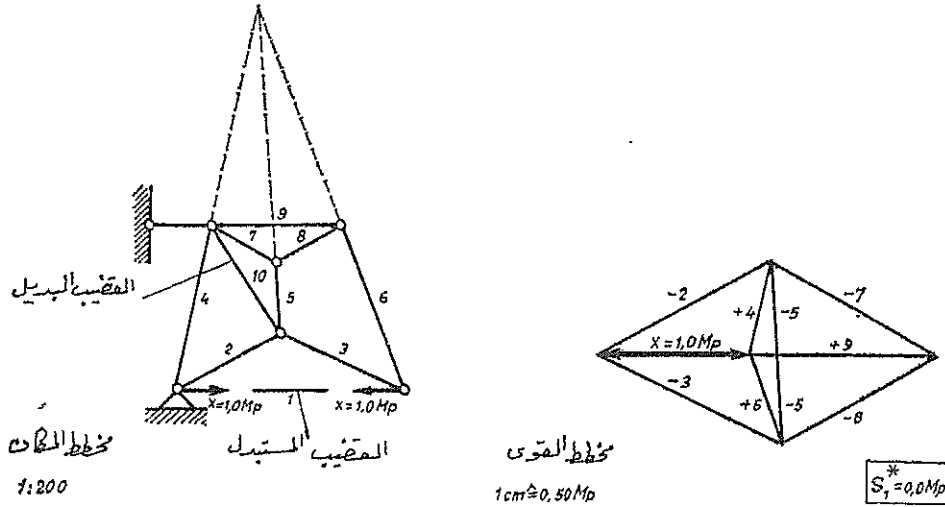
ولقد تم في الشكل (2-202 d) تمثيل مخطط ماكسويل - كريمونا للجائز الشبكي المعقد .

مثال 100 :

المطلوب : تعيين قوى قضبان الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-203) .

الحل :

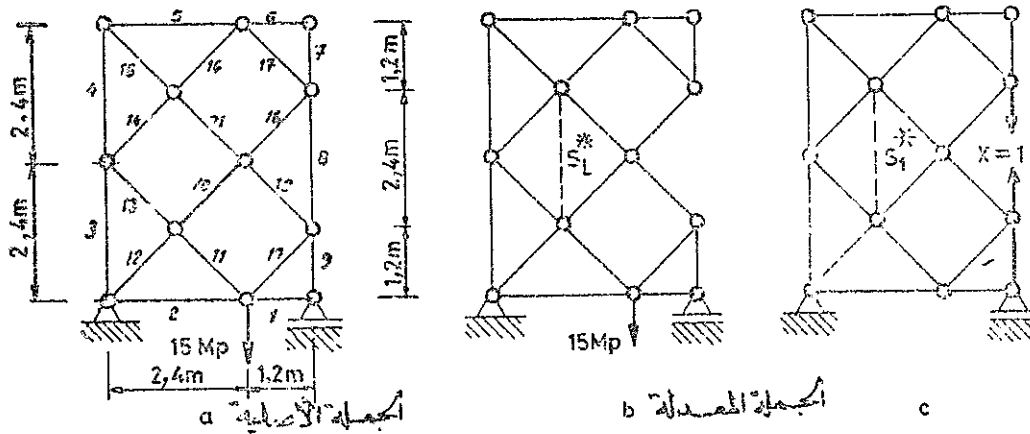
ان الجائز الشبكي المذكور هو جائز معقد وفي نفس الوقت ذو حركة صغيرة (جائز معقد وحر ج) . اما الظاهرة الدالة على الحركة فهي تقاطع القضبان الثلاثة 4 , 5 , 6 في نقطة واحدة (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كبرياء المؤلف) . من اجل الجائز الشبكي المعدل والمحمّل بالجولة $X=1,0 \text{ Mp}$ فان القضيب البديل ايا كان موضعه هو قضيب صفر ، وبذلك فان انعدام القوة فيه $(S_1^*=0)$ يؤدي لان يأخذ المجهول X قيمة لانهاية لهذا السبب فان المضلع الرئيسي (الجائز الشبكي المعقد) ليس صلباً بل هو جائز شبكي استثنائي .



شكل 3 2-2

مثال 101 :

المطلوب : استخدام طريقة هينبرغ لحل التركيب الشبكي الممثل في الشكل (a 204 2) .

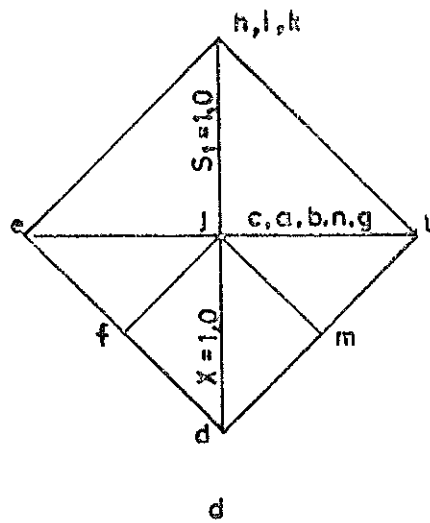
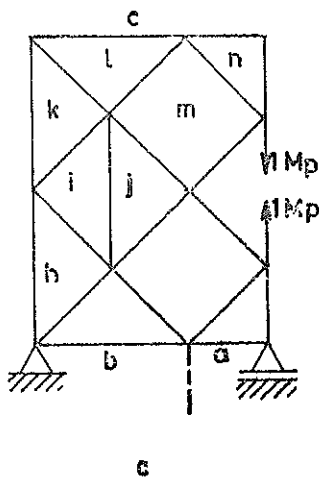
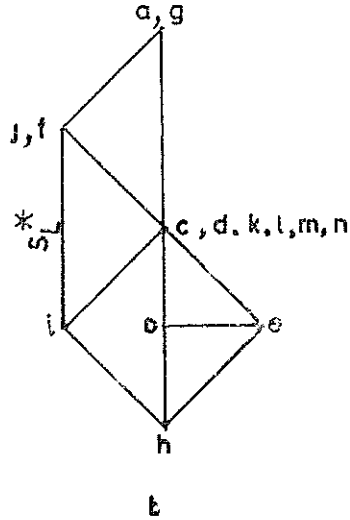
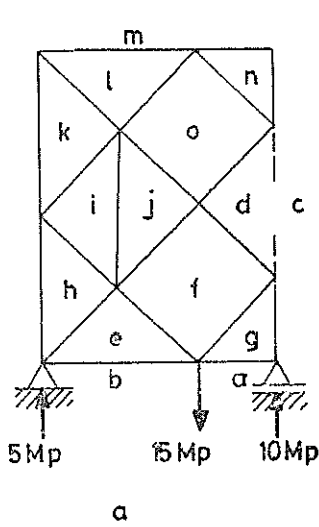


شكل 2-204

الحل :

١ - بحذف القضيب (n-d) وإضافة القضيب (i-j) يتم الحصول على التركيب الشبكي المعدل الممثل في الشكل (2-204 d) والمبين أيضا في الشكل (2-204 c). ويلاحظ ان هذا التركيب يصبح من النوع البسيط .

٢ - بين الشكل (2-205 b) مضلع القوى (مخطط ماكسويل - كريغونا) للتركيب الشبكي المعدل الممثل في الشكل (2-205 a) تحت تأثير الحمل الخارجي وهي 15 Mp ويعطي هذا



شكل 2-205

الشكل قيم القوى الداخلية (قوى القضبان) S_{iL} ومنه يتبين ان القوة الداخلية في القضيب البديل (القضيب الاضافي) (i-j) هي :

$$S_L^* = S_{(i-j)L} = 10 \text{ Mp}$$

٣ - يؤثر على التركيب المعدل بقوة شد تساوي 1.0 Mp في مكان القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) (c-d) كما في الشكل (c-205) . ويرسم مضع القوى (مخطط ماكسويل - كريغونا) لهذا التحميل كما في الشكل (d-205) . ويعطي هذا الشكل القيم S_{i1} للقوى الداخلية في القضبان ومنه يرى ان القوة الداخلية في القضيب البديل (القضيب الاضافي) (i-j) هي :

$$S_{i1}^* = S_{(i-j)1} = -1.0 \text{ Mp}$$

٤ - تحسب القوة الداخلية في القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) واللازمة لكي تنعدم القوة في القضيب البديل (القضيب الاضافي) (i-j) وذلك من العلاقة التالية :

$$X = -\frac{S_L^*}{S_{i1}^*} = -\frac{10}{-1.0} = +10 \text{ Mp}$$

٥ - تحسب القوة النهائية في القضبان كما هو مبين بالجدول (e-205) كما يمكن حسابها برسم مضع القوى (مخطط - ماكسويل - كريغونا) النهائي للتركيب الشبكي المعقد .

مثال 102 :

المطابوب : استخدام طريقة هنيبرغ لحل التركيب الشبكي المعقد الممثل في الشكل (e-206) .

الحل :

١ - لقد تم في الشكل (b-206) استبدال التركيب الشبكي المعقد بتركيب شبكي بسيط وذلك بحذف القضيب I-VI والاستعاضة عنه بالقضيب III-V .

٢ - يرسم جزء من مضع القوى (شكل d-206) نتيجة للحمولة الخارجية وهي $P=10 \text{ Mp}$ عند c . ويتم منه إيجاد القوة S_L^* في القضيب البديل (القضيب الاضافي،القضيب المستحدث) III-V :

$$S_L^* = 8.6 \text{ Mp}$$

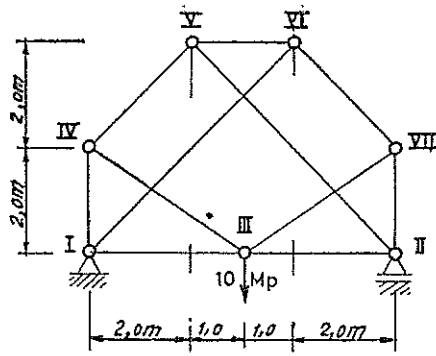
القضيب رقم	S_L	S_I	$S = S_L + 10S_I$
a - g	0, 0	0, 0	0, 0
b - e	5, 0	1, 0	5, 0
c - b	10, 0	1, 0	0, 0
c - k	0, 0	1, 0	10, 0
c - l	0, 0	1, 0	10, 0
c - n	0, 0	0, 0	0, 0
c - d	0, 0	1, 0	10, 0
c - g	10, 0	0, 0	10, 0
g - f	$5\sqrt{2}$	$0, 5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$
f - e	$10\sqrt{2}$	$-0, 5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
e - b	$5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
h - i	$5\sqrt{2}$	0, 0	$5\sqrt{2}$
j - f	0, 0	$-0, 5\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
f - d	$5\sqrt{2}$	$-0, 5\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
d - m	0, 0	$-0, 5\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
m - j	$5\sqrt{2}$	$-0, 5\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
k - l	0, 0	$-\sqrt{2}$	$-10\sqrt{2}$
m - l	0, 0	$-0, 5\sqrt{2}$	$-5\sqrt{2}$
m - n	0, 0	$0, 5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
i - k	$5\sqrt{2}$	0, 0	$-5\sqrt{2}$

الجدول 2-205 e

٣ - يرسم جزء من مضع القوى (الشكل 2-206 e) نتيجة لقوة شد $X_1 = 1,0 \text{ Mp}$ تعمل محل القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) I-VI ، ومنه يرى ان :

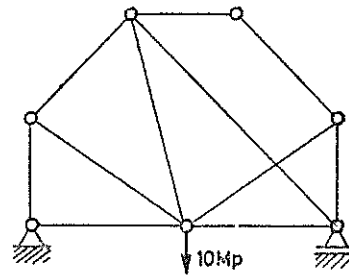
$$S_I^* = - 8,0 \text{ Mp}$$

٤ - لذلك تكون القوة الداخلية في القضيب I-VI هي :



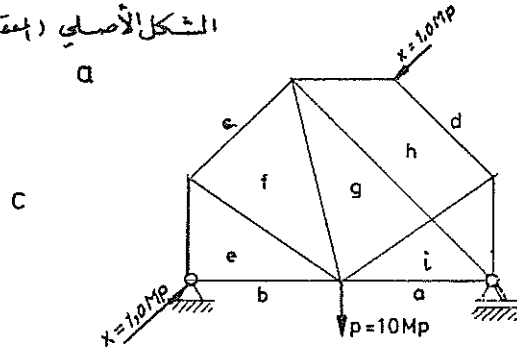
الشكل الأصلي (المعقد)

a



الشكل المبسط (البسيط)

b



c

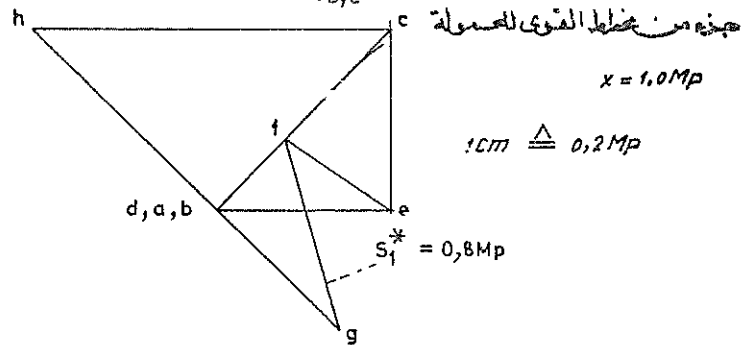
d

$$S_L^* = 8,6 \text{ Mp}$$

جهد من خطوط القوى المحسولة

$$P = 10 \text{ Mp}$$

$$1 \text{ cm} \triangleq 2 \text{ Mp}$$



e

جهد من خطوط القوى المحسولة

$$X = 1,0 \text{ Mp}$$

$$1 \text{ cm} \triangleq 0,2 \text{ Mp}$$

$$S_L^* = 0,8 \text{ Mp}$$

شكل 2-206

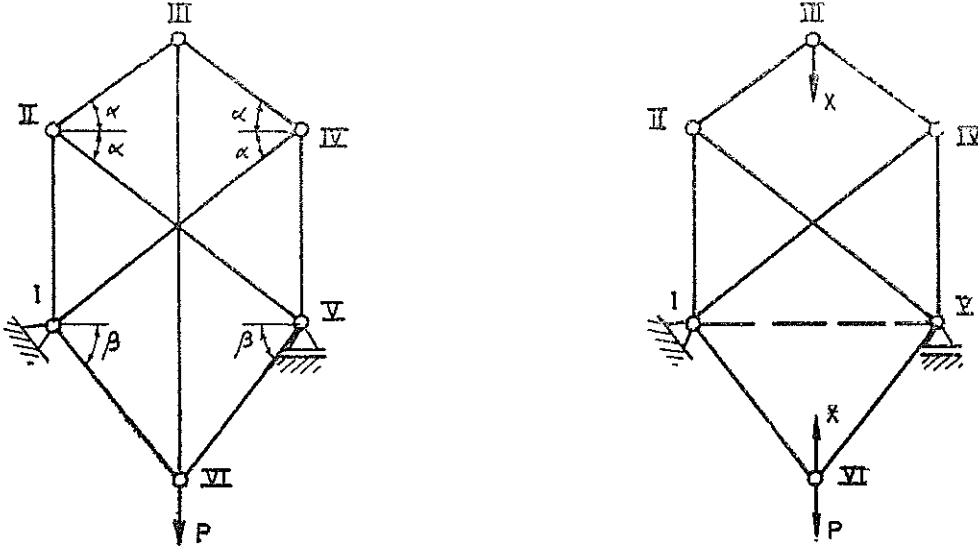
$$X = - \frac{8,6}{-8,0} = + 1,070 \text{ Mp}$$

ومن السهل الان رسم مضع القوى للتركيب الشبكي المعقد بعد معرفة القوة X .

مثال 103 :

المعطى $\sin \alpha = 0,6$ و $\sin \beta = 0,8$.

المطلوب : تعيين قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-08a) .



شكل 2-208

الحل :

لا يحتوي الجائز الشبكي المدروس على أية عقدة ، يبلغ عدد قضبانها أقل من ثلاثة وهذا يعني ان الجائز الشبكي هو جائز معقد ويمكن حله باتباع طريقة هنريغ (طريقة تبديل القضيب) .

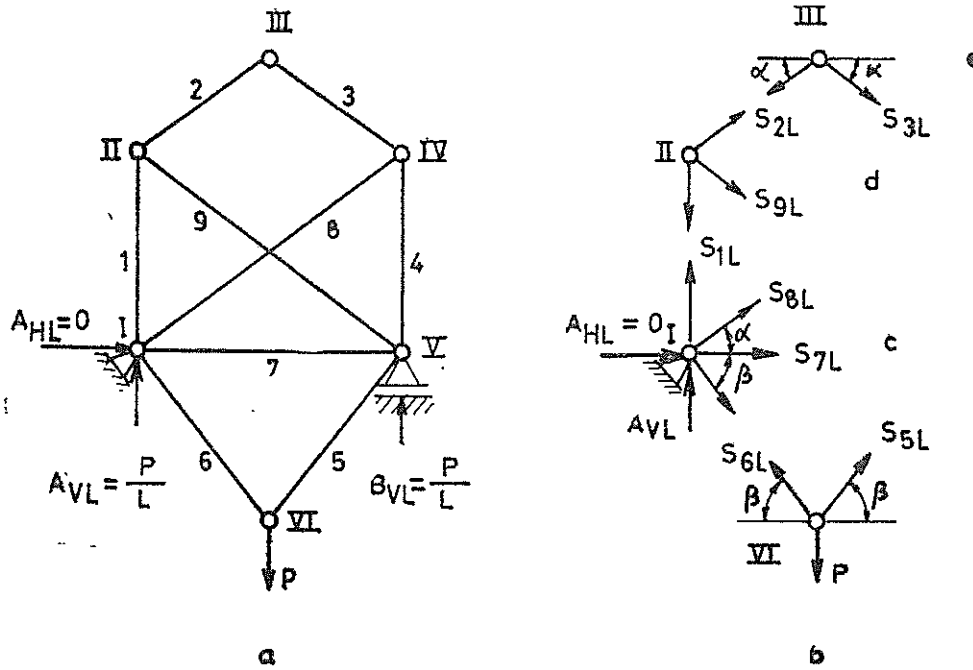
١ - يعدل الجائز الشبكي المعقد الى الصورة البسيطة (شكل 2-208 b) وذلك بحذف القضيب III-VI والاستعاضة عنه بالقضيب I-V .

٢ - تعيين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل (شكل 2-209 a) نتيجة للحمولة الخارجية P عند VI (سنستخدم هنا طريقة القطع الدور) .

ردود افعال المساند :

لاسباب التناظر ولانعدام القوى الافقية فان ردود افعال المساند تبلغ :

$$A_{HL} = 0 \quad ; \quad A_{VL} = 0 \quad ; \quad B_{VL} = \frac{P}{2}$$



شكل 2-209

قوى القضبان :

لأسباب التناظر يكفي إيجاد قوى القضبان في نصف الجملة فقط حيث أن :

$$S_{1L} = S_{4L} ; S_{2L} = S_{3L} ; S_{8L} = S_{9L} ; S_{5L} = S_{6L}$$

العقدة VI (شكل b 2-209) .

بتطبيق شرطي توازن القوى ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{6L} \cos \beta - S_{5L} \cos \beta = 0$$

$$S_{6L} = S_{5L}$$

$$\Sigma V = 0 : S_{6L} \sin \beta + S_{5L} \sin \beta = 0$$

$$S_{6L} = \frac{P}{2 \sin \beta} = \frac{P}{1,6} = \frac{5}{8} P = S_{5L}$$

العقدة III (شكل e 2-209) :

بتطبيق شروط توازن القوى على العقدة III ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{2L} = S_{3L}$$

$$\Sigma V = 0 : S_{2L} + S_{3L} = 0$$

من المعادلتين ينتج ان :

$$S_{2L} = S_{3L} = 0$$

العقدة II (شكل d 2-209) :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة II ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{9L} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : S_{1L} = 0$$

العقدة I (2-209 c) :

يعطي تطبيق شرطي توازن القوى على العقدة I المقطعة من الجائز بواسطة قطع ودور العلاقات التالية :

$$\Sigma V = 0 : S_{8L} \sin \alpha - S_{6L} \sin \beta + \frac{P}{2} = 0$$

$$S_{8L} = \frac{1}{\sin \alpha} (S_{6L} \sin \beta - \frac{P}{2})$$

$$\Sigma H = 0 : S_{8L} \cos \alpha + S_{7L} + S_{6L} \cos \beta = 0$$

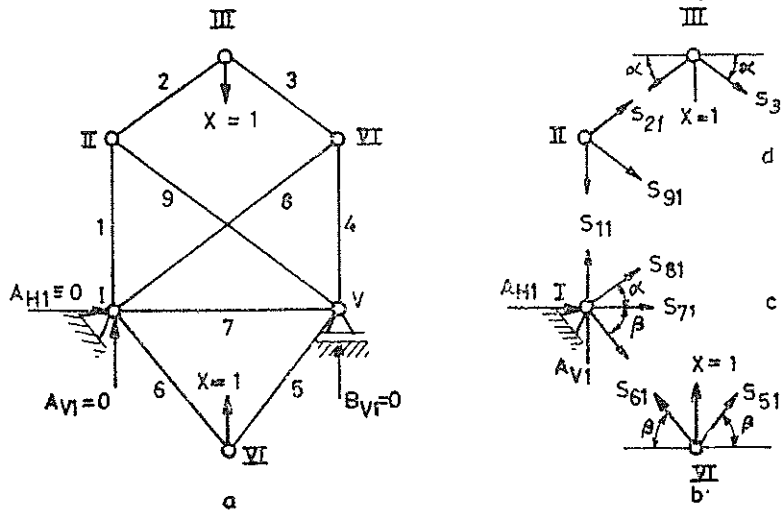
$$S_{7L} = - (S_{8L} \cos \alpha + S_{6L} \cos \beta) = - \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \beta$$

من $\sin \beta = 0,8$ يرى ان $\beta = 53^\circ 10'$ وان $\operatorname{ctg} \beta = 0,75$.

بالتبديل في العلاقة الاخيرة ينتج :

$$S_{7L} = - \frac{3}{8} P$$

٣ - يؤثر على التركيب الشبكي المعدل بقوة خارجية تمثل قوة شد داخلي في القضيب المحذوف III-VI مقدارها 1,0 Mp (شكل a 2-210) . بعد ذلك تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل نتيجة لهذه الحولة وذلك باستخدام طريقة القطع المدور التحليلية .



شكل 2-210

ردود افعال المساند :

للتناظر الهندسي للجملة وللتناظر المحولة ولانعدام القوى الاقضية الخارجية فان ردود افعال المساند تبلغ :

$$A_{H1} = 0 ; A_{V1} = 0 ; B_{V1} = 0$$

(النتيجة متوقعة وذلك بسبب تشكيل القوى المؤثرة جملة توازنية).

قوى القضبان :

لاسباب التناظر الهندسي والمحولي يكفي بحساب قوى القضبان في نصف الجملة فقط ، حيث ان :

$$S_{11} = S_{41} ; S_{21} = S_{31} ; S_{81} = S_{91} ; S_{61} = S_{51}$$

العقدة VI (شكل 2-210 b) :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة VI ، المقطعة من الجائز الشبكي بواسطة قطع مدور ، ينتج :

$$\sum H = 0 : S_{61} = S_{51}$$

$$\sum V = 0 : S_{61} = -\frac{5}{8} P = S_{51}$$

العقدة III (2-210 e) :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة III بعد اقتطاعها من الجائز بواسطة قطع مدور ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{2,1} = S_{3,1}$$

$$\Sigma V = 0 : (S_{2,1} + S_{3,1}) \sin \alpha + 1 = 0$$

$$S_{2,1} = S_{3,1} = -\frac{1}{2 \sin \alpha} = -\frac{5}{6} \text{ Mp}$$

العقدة II (شكل 2-210 d) :

بتطبيق شرطي توازن القوى على العقدة II المقنطرة من الجائز بواسطة قطع مدور ينتج :

$$\Sigma H = 0 : S_{9,1} = -S_{2,1} = +\frac{5}{6}$$

$$\Sigma V = 0 : S_{1,1} = (S_{2,1} - S_{9,1}) \sin \alpha = -1 \text{ Mp}$$

العقدة 1 (شكل 2-210 c) :

يعطي تطبيق شرطي توازن القوى العلاقات التالية :

$$\Sigma V = 0 : S_{1,1} + S_{8,1} \sin \alpha - S_{6,1} \sin \beta + A_{v,1} = 0$$

$$S_{8,1} = \frac{1}{\sin \alpha} (S_{6,1} \sin \beta - S_{1,1} - A_{v,1}) = \frac{5}{6} \text{ Mp}$$

$$\Sigma H = 0 : S_{8,1} \cos \alpha + S_{6,1} \cos \beta + S_{7,1} + A_{H,1} = 0$$

$$S_{7,1} = -S_{8,1} \cos \alpha - S_{6,1} \cos \beta - A_{H,1} = -\frac{1}{2} \text{ ctg} \alpha + \frac{1}{2} \text{ dg} \beta$$

بالاستعانة بالمعطيات التالية :

$$\sin \alpha = 0,6 : \alpha = 36^\circ 50' ; \quad \text{ctg} \alpha = 1,34$$

$$\sin \beta = 0,8 : \beta = 53^\circ 10' ; \quad \text{ctg} \beta = 0,75$$

بالتبديل في المعادلة الاخيرة ينتج :

$$S_{8,1} = -\frac{7}{24} \text{ Mp}$$

تكتب بعد حساب القوة X

قوى القضبان الفعلية في الجائز الاصلي	قوى القضبان نتيجة لاحمولة X_1	قوى القضبان نتيجة لاحمولة الفعلية P	قوى القضبان نتيجة لاحمولة $X=1$	قضيب رقم
$S_{iL} + X_1 S_{i1}$	$X_1 S_{i1}$	S_{iL}	S_{i1}	
$+ \frac{15}{14} P$	$-\frac{5}{6} X = \frac{15}{14} P$	0	$-\frac{5}{6}$	2 أو 3
$+ \frac{9}{7} P$	$+\frac{9}{7} P$	0	- 1	1 أو 4
$-\frac{15}{14} P$	$-\frac{15}{14} P$	0	$+\frac{5}{6}$	9 أو 8
$+\frac{10}{7}$	$+\frac{45}{56} P$	$+\frac{5}{8} P$	$-\frac{5}{8}$	6 أو 5
0	$+\frac{3}{8} P$	$-\frac{3}{8} P$	$-\frac{7}{24}$	7

$$X_1 = - \frac{-\frac{3}{8} P}{-\frac{7}{24} P} = - \frac{9}{7} P$$

مثال 104 :

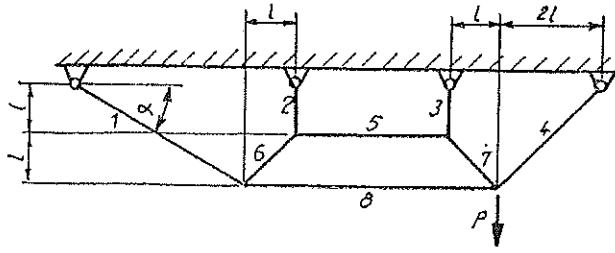
المطلوب : إيجاد قوى القضبان في الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-211).

الحل :

ان الجائز الشبكي المدروس هو جائز معقد ولا يستطيع فيه مباشرة الابتداء برسم مخطط القوى (مخطط ماكسويل - كريونا) عن طريق تحليل القوة P ولا حتى بالاستعانة برودود افعال المساند (التي مازال مجهولة) ولذلك سوف يلجأ لطريقة تبديل القضيب .

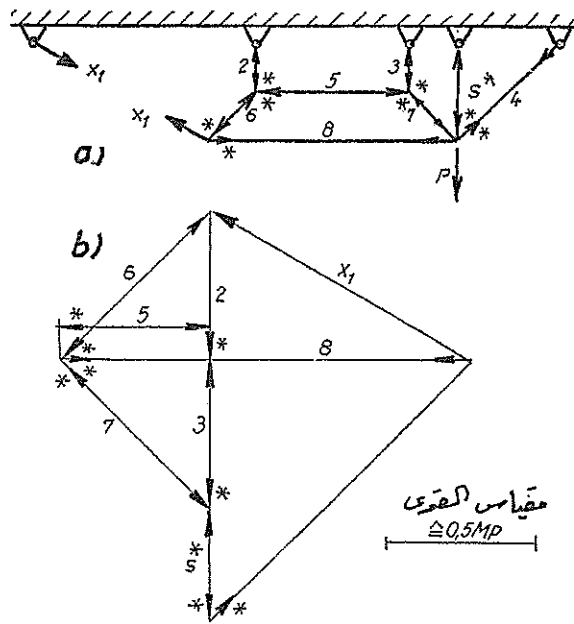
١ - بحذف القضيب 1 وبناء القضيب البديل 5' ، على سبيل المثال في المكان المرسوم في الشكل (2-212a) ، يتم اعادة التركيب الشبكي المعقد الى تركيب شبكي بسيط (وهو في نفس الوقت مقرر ستاتيكيًا وغير متحرك) .

٢ - يحمل الجائز الشبكي الجديد ذو البناء البسيط بالقوة الخارجية P فقط (بحيث تكون $X_1=0$) ثم تحسب فيه قوى القضبان الناتجة عن ذلك والتي يرمز لها بالرمز S_{iL} .



شكل 2-211

٣ - يحمل الجانز الشبكي البسيط وعند عقدي القضيب المستبدل (القضيب المحذوف) بالقوة $X_1 = 1 \text{ Mp}$ فقط (دون السماح للقوة P بالتأثير) والتي تتجه باتجاه القضيب المحذوف . بعد ذلك تحسب فيه قوى القضبان الناتجة عن هذا التحميل والتي يرمز لها بالرمز S_{i1} (شكل 2-212 والجداول التالي)



شكل 2-212

بالاستعانة بالعلاقة (2-21) يتم إيجاد قوى القضبان الحقيقية في الجانز الشبكي المعقد ، هكذا :

$$S_i = S_{iL} + X_1 S_{i1}$$

اما القيمة المجهولة X_1 فيتم الحصول عليها من شرط انعدام القوة في القضيب البديل وذلك عندما تطبق القوة الفعلية ١ والجهولة X_1 على الجانز دفعة واحدة ، هكذا :

$$S^* = S_L^* + x_1 S_{11}^* = 1 - 0,366X_1 = 0 :$$

$$X_1 = \frac{1}{0,366} = 2,732$$

قضيـب رقـم	قوى القضبان الناجمة عن التحميل		قوى القضبان النهائية
	P	$X_1 = 1$	
	$S_{iL} [Mp]$	$S_{i1} [Mp]$	$S_i [Mp]$
1	0	1,000	2,732
2	0	— 0,500	— 1,366
3	0	— 0,500	— 1,366
4	0	+ 1,225	+ 3,346
5	0	— 0,500	— 1,336
6	0	— 0,707	— 1,932
7	0	— 0,707	— 1,932
8	0	+ 1,366	+ 3,732
S*	1	— 0,366	0

يوضح الشكل (2-220) بعض الجيزان الشبكية المعقدة كما يوضح الجيزان الشبكية المعدلة (البسيطة) التابعة لها .

٢ - ١٤ - ٧ الجيزان الشبكية المعقدة بدرجة عالية - طريقة هنيبرغ

قد يكون اتركيب الشبكي معقدًا بحيث لا يكفي لحله بطريقة هنيبرغ أن يعدل التركيب الشبكي بحذف أحد قضبانه والاستعاضة عنه بقضيب آخر يضاف بين عقدتين (نقطتي اتصال) وإنما يلزم أن يحذف من التركيب قضبان أو أكثر على أن يضاف عدد مساو من القضبان في المواضع المناسبة وذلك لكي يحول التركيب الشبكي المعقد الى تركيب آخر بسيط . ومثل هذه هذه الجيزان الشبكية المعقدة تسمى بالجيزان الشبكية المعقدة بدرجة عالية . وسيرى الآن كيفية استعمال طريقة هنيبرغ لحل هذه الجيزان عالية التعقيد وذلك بالتطبيق على المثال التالي :

مثال 105 :

المطلوب : إيجاد القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعقد من الدرجة الثانية (شكل 2-213) .

بعض الجمل الشبكية المعقدة والجمل المعدلة التابعة لها

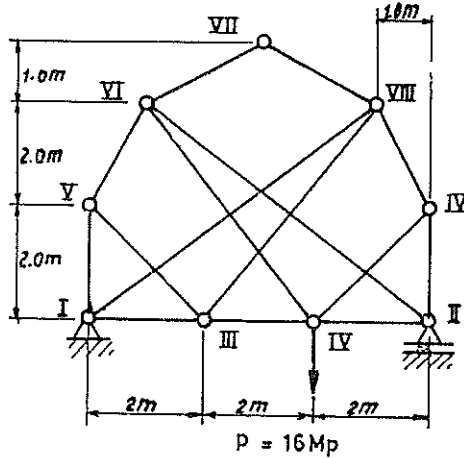
الجمل المعدلة (البسيط)	الجمل الأساسية (المعقدة)

تغير خطوط --- إلى القضيب البديل و $X=1$ إلى القضيب المستبدل

شكل 2-220

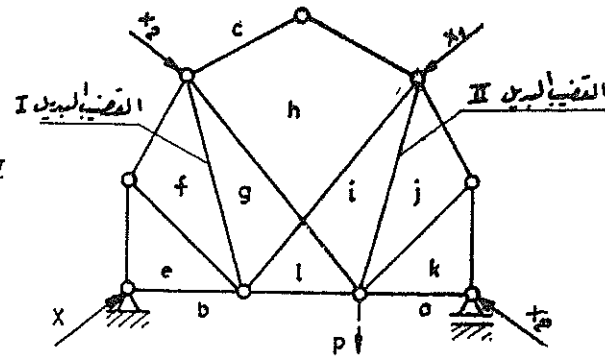
الحل :

١ - يعدل هذا التركيب الشبكي الى الصورة البسيطة المبينة في الشكل (2-213 b) وذلك بحذف القضيبين I-VIII و II-VI واستبدالهما بالقضيبين البديلين III-VI و III-VI . وسيرمز دائماً للقضيب III-VI بالرمز (1) وللقضيب IV-VIII بالرمز (2) .



الشكل الأصلي (المعقد)

a



الشكل المعدل (البسيط)

b

شكل 2-213

٢ - تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل (شكل 2-214) نتيجة للحمولة الخارجية ($P=16 \text{ Mp}$) عند IV . وبين الشكل (2-214) مضاع القوى لهذه الحالة وسيرمز لهذه القوى بالرمز (S_L) على ان يسبق الرمز L عدد يدل على القضيب الذي توجد فيه القوة ، أي أن القوة الناتجة عن هذه الحمل في القضيب III-VI سيرمز لها بالرمز S_{1L} والقوة الناتجة في القضيب الثاني IV-VIII سيرمز لها بالرمز S_{2L} ومن شكل مضاع القوى يرى أن :

في القضيب III-VI :

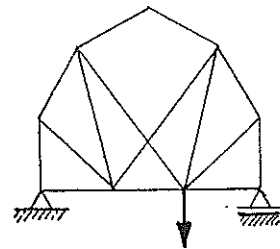
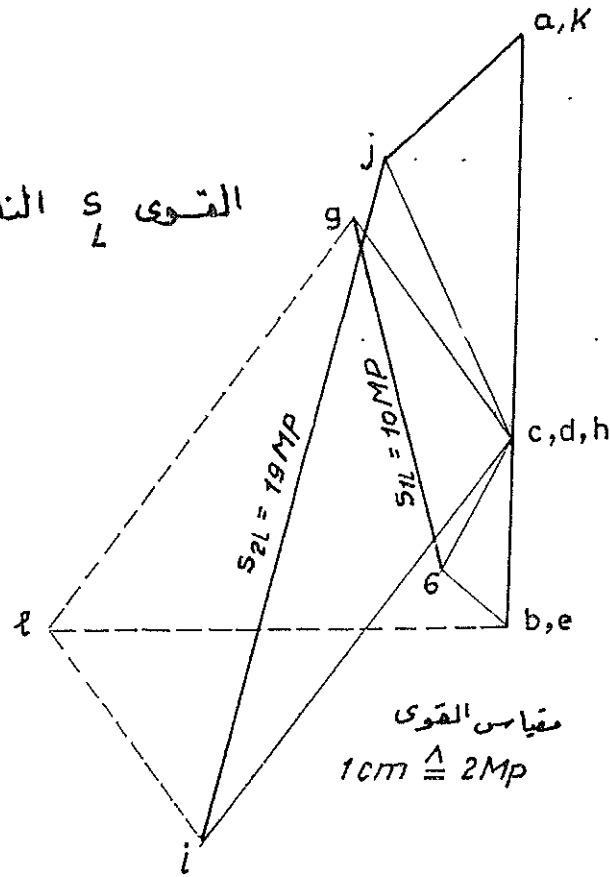
$$S_{1L} = 10,0 \text{ Mp}$$

وفي القضيب IV-VIII :

$$S_{2L} = 19,0 \text{ Mp}$$

القوى S_L الناتجة عن الحمل

$$P = 10 \text{ Mp}$$



$$p = 16 \text{ Mp}$$

شكل 2-214

٣ - يؤثر على التركيب المعدل بقوة خارجية تمثل قوة شد داخلي في القضيب المحذوف I—VIII مقدارها 1,0 Mp وتسمى هذه القوة $X_1 = 1,0$ ثم تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل نتيجة لهذه الحمل ، وذلك برسم شكل مضلع القوى كما في الشكل (2-215b)

وسيرمز لهذه القوى بالرمز P_1 وكما في الفقرة السابقة يسبق الرمز (1) عدد آخر يدل على القضيب الذي تولدت فيه القوى ، بمعنى أن القوة الناتجة في القضيب III—VI وهو القضيب (1) سيرمز لها بالرمز S_{11} والقوة الناتجة في القضيب IV—VIII وهو القضيب (2) سيرمز لها بالرمز S_{21} . ومن شكل مضلع القوى يرى أن :

في القضيب III—VI :

$$S_{11} = + 1,05 \text{ Mp}$$

في القضيب IV—VIII :

$$S_{21} = + 0,63 \text{ Mp}$$

٤ - يؤثر على التركيب الشبكي المعدل بقوة خارجية تمثل قوة شد داخلي في القضيب المحذوف II—VI مقدارها $1,0 \text{ Mp}$ وتسمى هذه القوة $X_2 = 1,0$ ثم تعين القوى الداخلية في قضبان التركيب الشبكي المعدل نتيجة لهذا التحميل . ونظراً للتناظر الهندسي للشكل فلا حاجة لرسم هذا الشكل وإنما يمكن استنتاجه من الشكل السابق (شكل b 2-215) . وتسمى هذه القوى الناتجة في هذه الحالة S_2 ويسبق الرمز 2 عدد يدل على القضيب الذي تولدت فيه القوى . ومن الشكل يرى أن :

في القضيب III—VI :

$$S_{12} = + 0,63 \text{ Mp}$$

في القضيب IV—VIII :

$$S_{22} = + 1,05 \text{ Mp}$$

٥ - لكي تتلاشى القوة الداخلية في كل من القضبان البديلة (المستحثة) III—VI و IV—VIII والتي لا وجود لها في الحقيقة ، يلزم أن تكون قيم القوى الداخلية X_1 و X_2

بحيث يصبح

$$S_1 = S_{1L} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} = 0$$

(a)

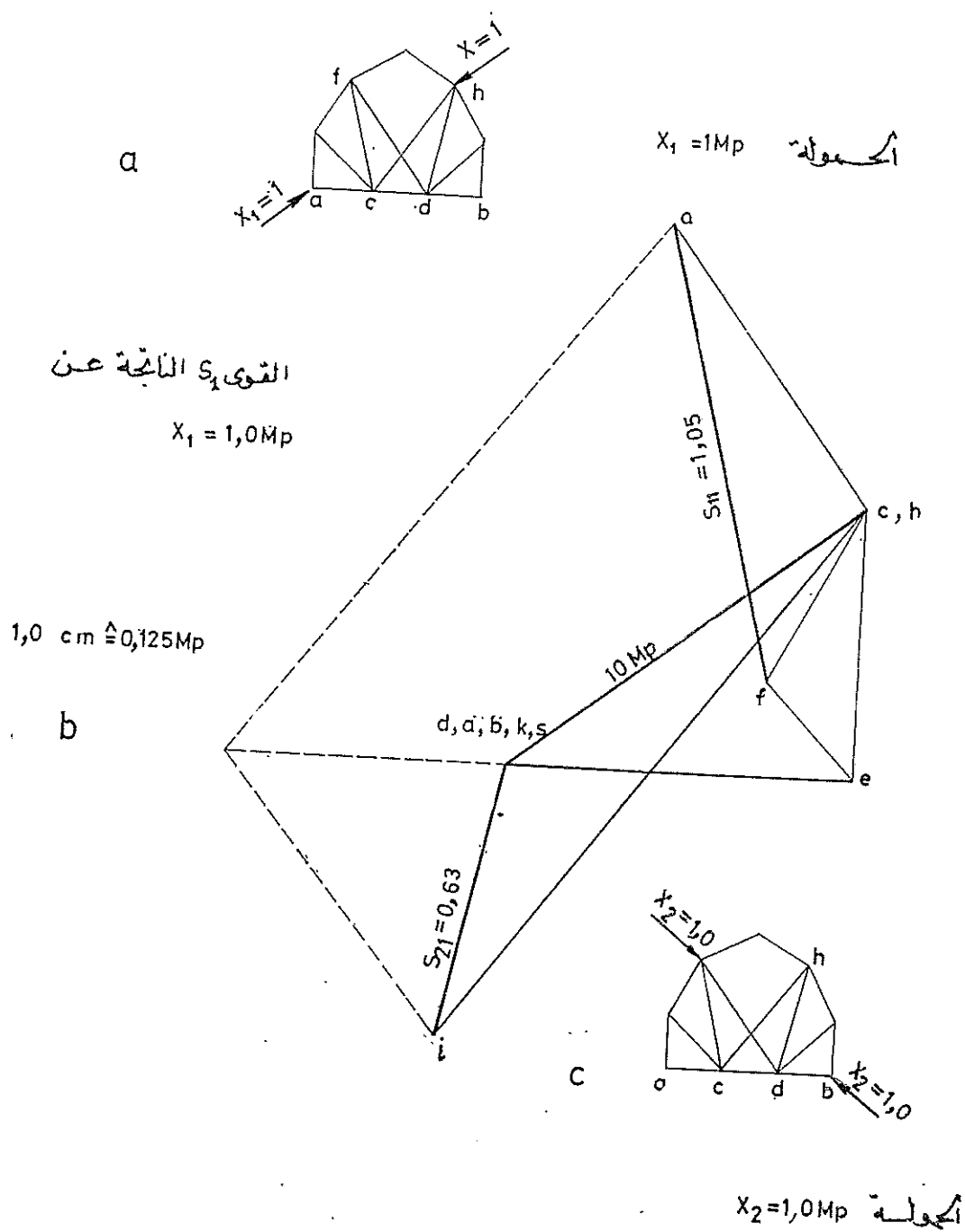
$$S_2 = S_{2L} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} = 0$$

(b)

ومنها ينتج أن :

$$X_1 = - \frac{S_{1L} S_{22} - S_{2L} S_{12}}{S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}} \quad (1)$$

$$X_2 = - \frac{S_{2L} S_{11} - S_{1L} S_{21}}{S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12}} \quad (2)$$



شكل 2-215

وبتعويض القيم التي تم الحصول عليها في الفقرات ٢ و ٣ و ٤ في هذه المعادلات ينتج ان :

$$x_1 = - \frac{10 \cdot 1,05 - 19,0 \cdot 0,63}{1,05 \cdot 1,05 - 0,63 \cdot 0,63} = 2,15 \text{ Mp}$$

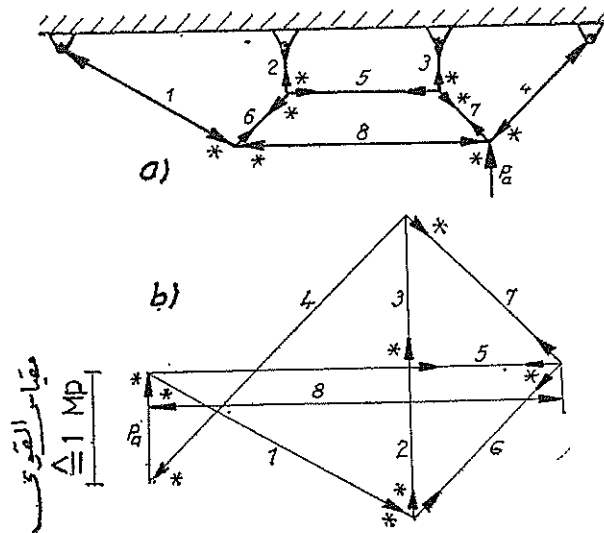
$$\dot{X}_2 = - \frac{191.1,05 - 10 \cdot 0,63}{1,05 \cdot 1,05 - 0,63 \cdot 0,63} = - 18,8 \text{ Mp}$$

٦ - والان سيتم حساب قوى القضبان في الجائز الشبكي المعقد باستخدام العلاقة التالية :

$$S_i = S_{iL} + X_1 S_{i1} + X_2 S_{i2}$$

٢ - ١٤ - ٨ الجيزان الشبكية المعقدة - طريقة المقياس غير المحدد

سوف يتعلق لشرح هذه الطريقة من جائز شبكي معقد معطى وليكن هـ-و الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-216 a) . تحل المسألة من الداخل . يرسم مخطط ماكسويل - كريونا بالاعتماد على قوة قضيب مجهولة . وفي النهاية يصار لتحديد مقياس القوى . فعلى مبدل المثال يبدأ بالقضيب 5 ثم يرسم مخطط ماكسويل - كريونا (شكل 2-216 b) . تعوض في نهاية الانشاء المسافة $P_a = 1 \text{ Mp}$ (لان المعطى في نص المسألة هو $P = 1 \text{ Mp}$) وبها يتحدد مقياس القوة . علاوة على ذلك ينبغي عكس اشارة كل من قوى القضبان وذلك لان القوى الفعلية P تماكس القوة P_a .

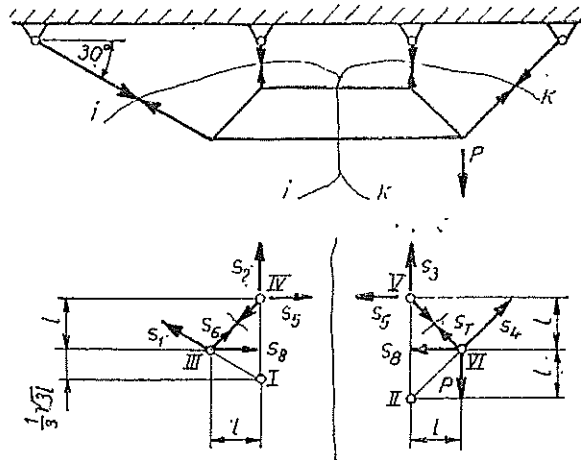


شكل 2-216

i	\dot{S}_i مقاسة بالـ M_p
1	+ 2,732
2	- 1,366
3	- 1,366
4	+ 3,346
5	- 1,366
6	- 1,932
7	- 1,932
8	+ 3,732

٢ - ١٤ - ٩ الجيزان الشبكية المعقدة - طريقة القطع المزدوج

سوف نطلق هنا أيضاً لشرح هذه الطريقة من جائز شبكي معقد معطى وليكن هو الجائز الشبكي الممثل في الشكل (2-217a) وبجمله تتضح الطريقة . باجراء القطعين $i-i$ و $k-k$ (شكل 2-217 a) ينشا عن الجائز الشبكي قرصان تؤثر عليهما ستة قوى قضبان (شكل 2-217 b) . من اجل كل قرص يمكن كتابة ثلاثة شروط للتوازن وبذلك يستطيع تعيين المجاهيل المذكورة .



شكل 2-217

$$\Sigma M_I = 0 : -S_3 \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} l\right) - S_8 \frac{1}{3} \sqrt{3} l = 0$$

$$\Sigma M_{II} = 0 : +S_5 \cdot 2l + S_8 l - P l = 0$$

$$S_5 = - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) P = - 1,366 \text{ Mp}$$

$$S_8 = (2 + \sqrt{3}) P = + 3,732 \text{ Mp}$$

$$\Sigma M_{III} = 0 : -S_5 l + S_2 l = 0$$

$$\Sigma M_{IV} = 0 : +S_8 l - \frac{1}{2} S_1 l - \frac{1}{2} \sqrt{3} S_1 l = 0$$

$$\Sigma M_V = 0 : -S_8 l - P l + S_4 \sqrt{2} l = 0$$

$$\Sigma M_{VI} = 0 : +S_5 l - S_3 l = 0$$

$$\Sigma H_{IV} = 0 : +S_5 - \frac{1}{2} \sqrt{2} S_7 = 0$$

$$\Sigma H_V = 0 : -S_5 + \frac{1}{2} \sqrt{2} S_7 = 0$$

بحل مجموعة المعادلات يتم تعيين قوى القضبان المطلوبة :

$$S_1 = (1 + \sqrt{3}) P = + 2,732 \text{ Mp}$$

$$S_2 = - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) P = - 1,366 \text{ Mp}$$

$$S_3 = - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) P = - 1,366 \text{ Mp}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \sqrt{2} (3 + \sqrt{3}) P = + 3,346 \text{ Mp}$$

$$S_6 = - \frac{1}{2} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) P = - 1,932 \text{ Mp}$$

$$S_7 = - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) P = - 1,932 \text{ Mp}$$

٢ - ١٤ - ١٠ التكوين الحرج للجيزان الشبكية

يقصد بالتكوين الحرج لترتيب شبكي تلك الحالة التي لا يتم فيها توازن التركيب الشبكي إلا تحت حمولات معينة . أما في الحالة العامة للتحميل فإن التركيب الشبكي يتعرض الى حركات بالغة عند بعض عقده تغير نوعاً ما من شكل التركيب وتولد في قضبانها قوى تصل نظرياً الى ما لا نهاية لو لا هذه الحركات المفرطة عند العقد . وعلى كل حال يلاحظ ما يلي :

١ - لا يصلح مثل هذا التكوين الحرج لأن يكون تركيباً شبكياً هندسياً قادراً على تحمل القوى الخارجية عامة .

٢ - التكوين الحرج ليس تركيباً منهاراً . فهو لا يتهاوى كلية تحت تأثير الحمولات دون ان تولد قوى داخلية في قضبانها كما هو الحال في التراكيب المنهارة ، لكنه لا يستطيع أن يقاوم الحمولات الخارجية الا بعد ان يتعرض لتحركات بالغة في عقده .

٣ - تحقق التكوينات الحرجة عادة العلاقة اللازمة بين عدد القضبان وعدد العقد وكذلك تحقق علاقة الشرط التعدادي .

تمثل الشبكيات المرسومة في الشكل (2-218) تكوينات حرجة بالمعنى المذكور ، فالشكل (2-218 a) يبين تركيباً شبكياً ، ولكن تكوينه أصبح حرجاً لوجود قضيبين cd و de على استقامة واحدة بحيث لو تعرض التركيب لقوة شاقولية P عند d لتحركت هذه النقطة حركة مفرطة الى الاسفل بحيث يميل كل من القضيبين de و dc . ومثل هذا الميل ضروري لكي تساعد المركبات الشاقولية للقوى الداخلية على حفظ توازن النقطة d . ولولا هذه الحركة لازم أن تصل القوى الداخلية الى قيمة لانهائية . ان عدد قضبان هذا التركيب هو 7 وعدد عقده هو 5 وعدد ردود افعال مسانده هو 3 وعلاقة الشرط التعدادي :

$$n = a + s - 2k = 3 + 7 - 2.5 = 0$$

محققة كما وأن العلاقة بين عدد القضبان والعقد :

$$7 = 2(5) - 3$$

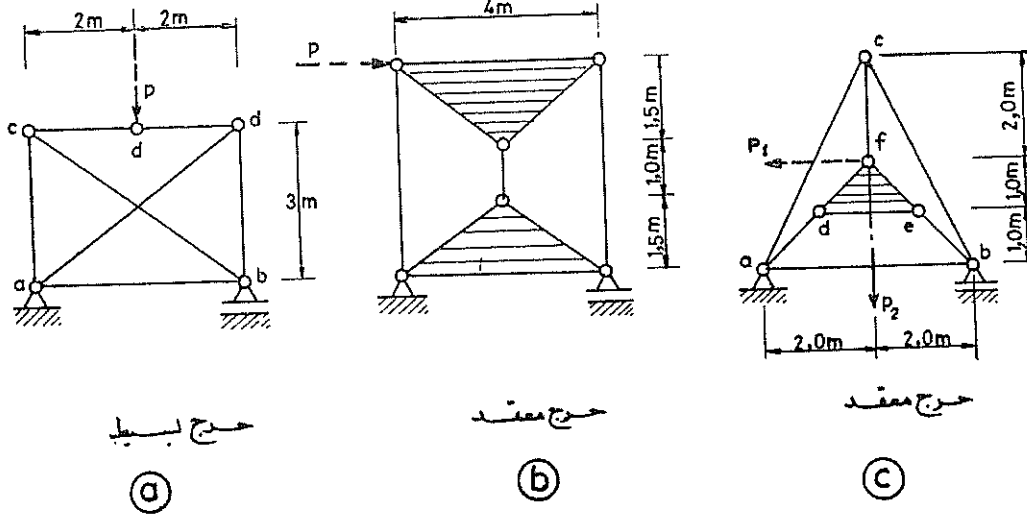
محققة ايضاً . ومن الواضح انه يكفي لكي يعود التركيب الشبكي الى تكوين سليم غير حرج ان ترتفع العقدة d او تنخفض بحيث لا يكون القضيبان de , dc على استقامة واحدة . أما الشكل (2-118 b) فيبين صورة حرجة لترتيب شبكي من النوع المركب وقد نشأ الحرج هنا لان القضبان الثلاثة da , cf , be متوازية . كذلك الحال في الشكل (2-218 c) الذي يعطي صورة لترتيب شبكي معقد وذلك لان القضبان الثلاثة التي تربط الجزئين البسيطين وهي da , be , cf تتلاقى في نقطة واحدة . وفي كل من هذين الترتيبين يرى أن :

$$a = 3 , s = 9 , k = 6$$

وبذلك يصبح الشرط التعدادي :

$$n = 3 + 9 - 2 \cdot 6 = 0$$

وهذا يعني ان كلاً من التركيبين مقرر ستاتيكيًا ولكنه خرج (وهذا تقع الحالة الامتثالية لعلم السكون وتسمى امثال هذه الجمل بالجل الشبكية الامتثالية) .



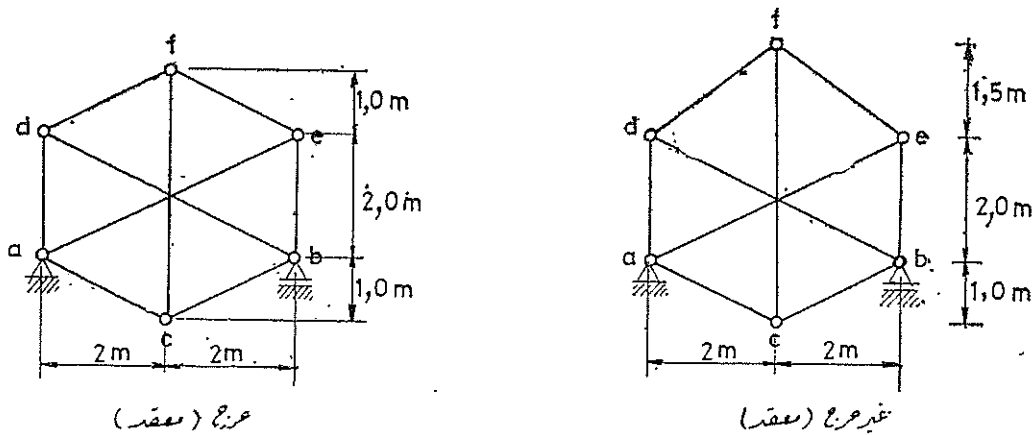
شكل 2.218

ان من السهل في حالة الشبكيات البسيطة ان يعرف لاول وهلة هل هي شبكيات ذات تكوين خرج أم لا ولكن الامر يختلف في حالة الشبكيات المعقدة حيث لا يستطيع بسهولة ودون دراسة أن يحكم على طبيعة التركيب من ناحية كونه خرجاً ويتضح هذا من التركيبين الشبكيين المعقدين (شكل 2-219) واللذان يبدوان لاول وهلة متشابهين في حين أن الامر ليس كذلك اذ ان اولهما (شكل 2-219 a) تركيب ذو تكوين خرج أما الثاني (شكل 2-219 b) فليس ذا تكوين خرج على الاطلاق ، والان - كيف يستطيع ان يعرف اذا كان هذا التركيب الشبكي المعقد ذا تكوين خرج أم لا ؟

الجواب ، يمكن ان يعرف هذا باحدى الطرق الرئيسية التالية :

- ١ - طريقة المخطط القطعي ٢ - طريقة شكل F' (طريقة السرعة المدورة بزاوية 90°)
- ٣ - طريقة المعينة المخرجة ٤ - طريقة تبديل القضيب .

تعتبر الطريقتين الأولى والثانية طرائق حركية . ان الطرائق الأولى والثانية والثالثة هي وسائل كافية لتحديد خرج الجمل اما الطريقة الرابعة فهي وسيلة غير كافية (انظر كتاب مقاومة المواد للصف الثاني كهرباء ، للمؤلف) .



شكل 2-219

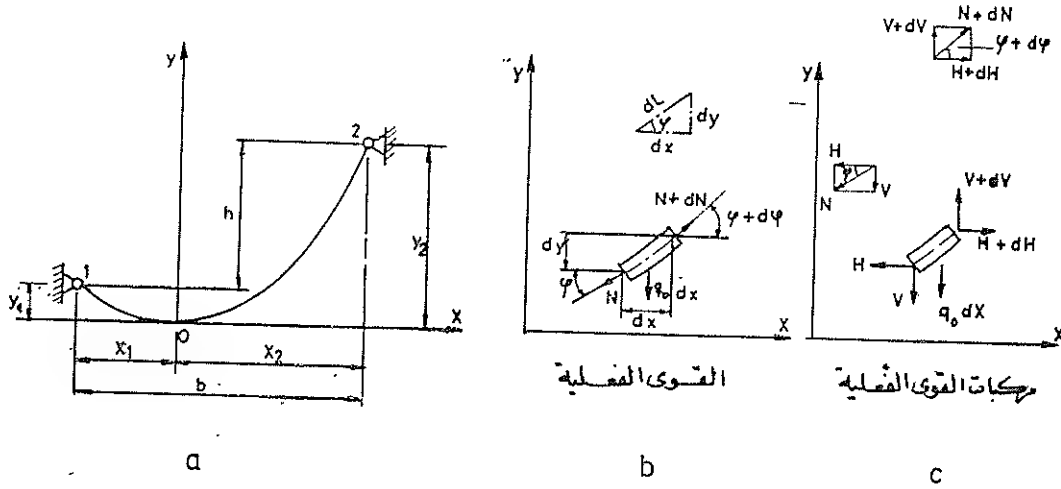
٢ - ١٥ الجبال والسلاسل (Seile und Ketten)

الجبال والسلاسل هي ، من وجهة نظر حساب الانشاءات ، عناصر حاملة رخوة بالنسبة للانعطاف لا تستطيع الا حمل قوى شادة باتجاه محورها فقط . بسبب شكلها الهندسي والسبب السابق يمكن اعتبارها حالة خاصة للاقواس لا تحمل الا قوى محورية شادة ، أي أن $M=Q=0$ وان $N>0$. اما شكلها الهندسي فغير محدد بل يمثل خط الاستناد (stützlinie) . سيفترض في الجبال التي ستم دراستها بأنها عديمة الاستطالة ، أي ان تمددها (تغير طولها النسبي) معدوم $\epsilon=0$ (اذاً فهي صلبة بالنسبة للتغير الطولي) . سوف يقتصر في هذا البحث على معالجة الجبال والسلاسل المحملة بمحمولة شاقولية فقط .

٢ - ١٥ - ٢ الحمولات الشاقولية ذات الشدة الثابتة بالنسبة للمسقط الافقي

$$q_v(x) = q_0 = \text{const.}$$

ترمز q_0 لشدة الحمولة لكل واحدة طول من المحور x (واحدتها kp/cm) . ليقطع من الجبل المعلق (المثبت) بين النقطتين 1 , 2 (شكل 2-221 a) عنصراً صغيراً طولها dL ثم لتطبق عليه شروط التوازن (شكل 2-221 c) :



شكل 2-221

$$\Sigma V = 0 : -V - q_0 dx + V + dV = 0 : dV = q_0 dx$$

$$\Sigma H = 0 : -H + H + dH = 0 : dH = 0$$

من هذه العلاقات ينتج :

$$H = \text{const.} \quad (2-22)$$

$$dV = q_0 dx \quad (2-23)$$

هناك علاقات تربط بين القوة الشاقولية V والقوة الأفقية H وقوة الجبل N من جهة وبين أطوال العنصر dx , dy , dL من جهة ثانية (أما هذه العلاقات فتتم قراءتها من الشكلين 2-221 b,c) وهي التالية :

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx} \quad (2-24a)$$

وباستخدام قانون فيثاغورث ينتج :

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = H \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2} = H \sqrt{1 + y'^2} \quad (2-24b)$$

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2} \quad (2-24c)$$

بكاملة العلاقة (2-23) ينتج :

$$V = q_0 x + C_1 \quad (2-15)$$

بتحقيق النتيجة السابقة لشروط البداية ينتج :

$$V(x=0) = 0 \quad : \quad C_1 = 0$$

وبالتبديل في المعادلة الاخيرة (2-25) فلها تأخذ الشكل التالي :

$$V = q_0 x$$

من هذه العلاقة ومن العلاقة (2-24a) ينتج :

$$V = q_0 x = Hy'$$

بكاملة المعادلة الاخيرة يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} + C_2$$

وبتحقيقها لشروط البداية يتم تعيين ثابت التكامل

$$y(x=0) = 0 \quad : \quad C_2 = 0$$

وبذلك تأخذ العلاقة الاخيرة الشكل التالي :

$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} \quad (2-25)$$

يمثل الشكل الهندسي للحبل خط الاستناد وهو يمثل هنا بمعادلة قطع مكافئ (Parabel) منسوب الى جملة الاحداثيات x, y التي ثبت مبدأها في قمة الحبل (العلاقة 2-26) .
ان ايجاد ثوابت التكامل هو في الحقيقة اصعب بكثير من المكاملة ذاتها . لينطلق الآن سعياً وراء ايجاد العلاقة التي تربط بين القيم :

$$H, N_1, N_2, x_1, x_2, y_1, y_2$$

دون معرفة مسبقة للقيم المعطاة والقيم المطلوبة منها . مبدئياً يرى ان :

$$|x_1| + |x_2| = b \quad ; \quad y_2 - y_1 = h \quad (2-27)$$

هي قيم محددة . من العلاقة (2-24b) وبلاستعانة بالعلاقة (2-26) ينتج ان :

$$N_1 = N(x=x_1) = \sqrt{H^2 + V^2(x=x_1)} = \sqrt{H^2 + (q_0 x_1)^2} \quad (2-28)$$

$$N_2 = N(x=x_2) = \sqrt{H^2 + V^2(x=x_2)} = \sqrt{H^2 + (q_0 x_2)^2}$$

من العلاقة (2-26) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$y_1 = y(x=x_1) = \frac{q_0 x_1^2}{2H} ; y_2 = y(x=x_2) = \frac{q_0 x_2^2}{2H} \quad (2-29)$$

والتي تنتج عنها العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} 2H(y_2 - y_1) &= 2Hh = q_0(x_2^2 - x_1^2) = q_0(|x_2| + |x_1|)(|x_2| - |x_1|) \\ &= q_0 b(|x_2| - |x_1|) \end{aligned}$$

من هذه النتيجة ومن العلاقة (2-27a) يتم التوصل الى ابعاد القمة :

$$|x_1| = \frac{b}{2} - \frac{hH}{q_0 b} ; |x_2| = \frac{b}{2} + \frac{hH}{q_0 b} \quad (2-30)$$

حسب العلاقة (2-29) يرى ان ارتفاعات القمة y_1 , y_2 هي توابع للتغير H وبذلك فان كافة المقادير هي توابع لنفس المتغير (H) (الا وهو H) . لكن للاسف ، ان H على العموم ليست من البداية قيمة محددة . فمن الممكن ان يكون المعطى هو N_1 (او بالأحرى N_2) او طول الجبل الممثل بالعلاقة التالية :

$$\begin{aligned} L = \int dL &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-|x_1|}^{|x_2|} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-|x_1|}^{|x_2|} \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x \sqrt{1 + \left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2} + \frac{H}{q_0} \text{Ar sinh } \frac{q_0 x}{H} \right] \Big|_{-|x_1|}^{|x_2|} \end{aligned}$$

حيث ان x_1 , x_2 هي فصول نقاط التثبيت (إحداثيات نقاط التثبيت على المحور x) (ولذلك فهي تؤخذ مع إشارتها) . كما وقد يكون التبدلي (Durchhang) y_1 (بالأحرى y_2) هو المعطى . كمثال على ايجاد الثوابت سوف يتم حساب H كتابع لـ y_1 , y_2 . حسب العلاقة (2-30) يستطاع كتابة ما يلي :

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 \left[\frac{b^2}{2} + \left(\frac{bH}{q_0 b} \right)^2 \right]$$

وبالاستعانة بالعلاقة (2-29) ينتج :

$$\frac{y_1 + y_2}{H} = \frac{q_0}{2H} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{q_0 b^2}{h H} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{h H}{q_0 b^2} \right)^2 \right] \quad (2.30 c)$$

باجراء إدخال القيمة عديمة الواحدة :

$$\zeta = \frac{h H}{q_0 b^2} \quad (2.31)$$

وبواسطة المعادلة :

$$\frac{1}{2} (y_1 + y_2) = f$$

فان العلاقة (2-30 c) تعطي معادلة من الدرجة الثانية من اجل ζ :

$$\zeta - \frac{2f}{h} \zeta + \frac{1}{4} = 0$$

والتي يكتب حلها كما يلي :

$$\zeta = \frac{f}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{h} \right)^2 - \frac{1}{4}}$$

او بالاستعانة بالعلاقة (2-27b) ايضاً كما يلي :

$$\zeta = \frac{1}{h} \left[f \pm \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - (y_2 - y_1)^2} \right] = \frac{f \pm \sqrt{y_1 y_2}}{h}$$

باستبدال f بقيمتها يمكن ايضاً الكتابة :

$$\zeta = \frac{(\sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2})^2}{2h}$$

وبواسطة المعادلة التالية :

$$h^2 = (\sqrt{y_2^2} - \sqrt{y_1^2})^2$$

وبالاستعانة بالعلاقة (2-31) يتم أخيراً التوصل للعلاقة التالية :

$$H = \frac{q_0 b^3}{2} \frac{1}{(\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1})^2} \quad (2.33)$$

تتعلق الإشارة الموجودة في المخرج من حقيقة كون القمة واقعية (تقع بين نقطتي التثبيت 1 و 2) او خيالية (تقع ، على مسيل المسال ، على يسار النقطة 1) . فمن العلاقات (2-30) و (2-32) ينتج :

$$\frac{|x_2|}{b} = \frac{1}{2} - \zeta = - \frac{y_1 + \sqrt{y_1 y_2}}{h}$$

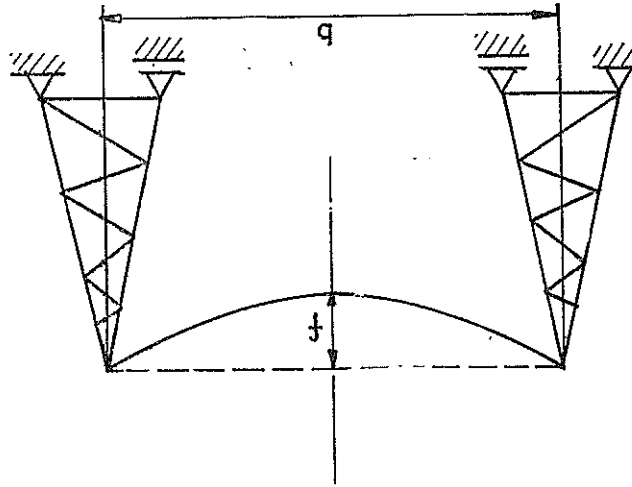
وهذه النتيجة موجبة (النقطة 1 تقع على يسار القمة) من اجل الإشارة السفلية ومسالبة (النقطة 1 تقع على يمين القمة) من اجل الإشارة العلوية .

حالة خاصة :

$$h = 0 \quad , \quad y_1 = y_3 = f$$

من العلاقة (2-33) ينتج :

$$H = \frac{q_0 b^2}{8 f} \quad (2-33 \text{ b})$$



شكل 2-222

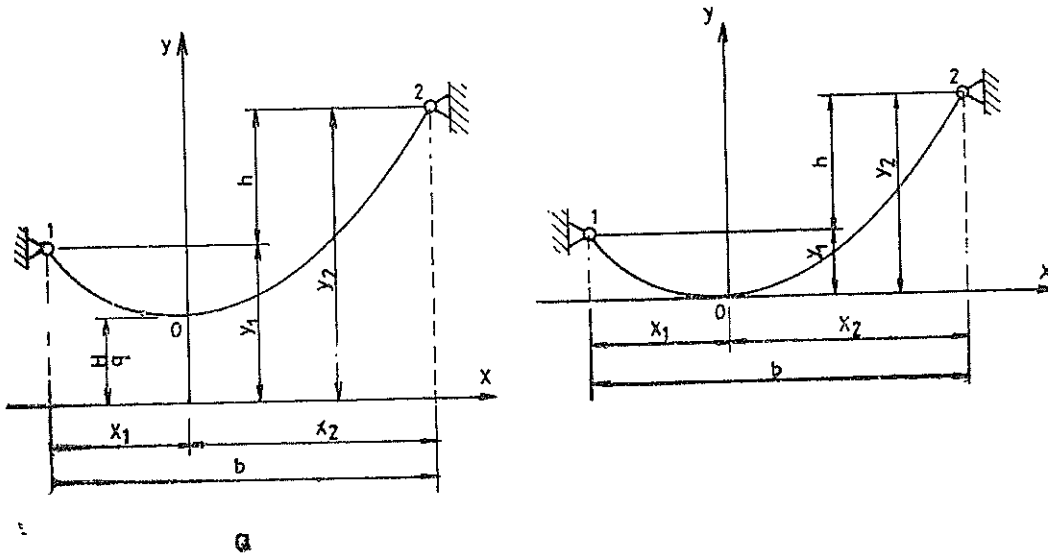
يحمل ، جبل طوله 100m ويبلغ تدليله الاعظمي (السهم) 50 cm ، بحمولة شاقولية مقدارها $q_0 b = 20 \text{ kp}$ (على سبيل المثال وزنه الذاتي) . يبلغ الشد الافقي الذي ينبغي ان يتحمسه الجبل القيمة التالية :

$$H = \frac{20 \cdot 100}{8 \cdot 0,5} = 500 \text{ kp}$$

بذلك يتحمل كل من الأبراج المرسومة في الشكل (2-222) قوة شاقولية مقدارها 10kp وقوة أفقية مقدارها 500 kp .

٢ - ١٥ - ٢ الحملات الشاقولية ذات الشدة الثابتة بالنسبة لطول الجبل ،
 $q_v(s) = q = \text{const}$.

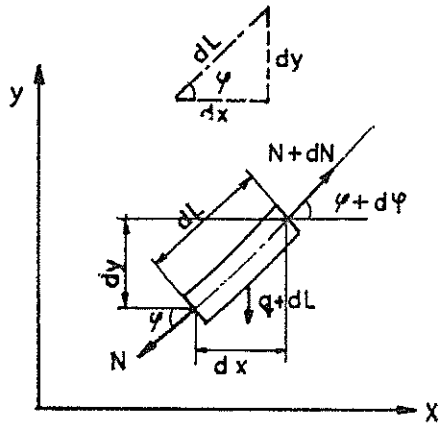
تشير q الى شدة الحمل لكل واحدة طول من الجبل (واحدتها kp/cm) (على سبيل المثال الوزن الذاتي للجبل) .



شكل 2-223

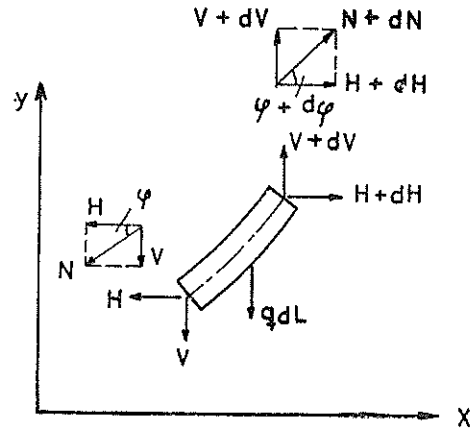
سيتم الآن حساب القوى المتشكلة في الجبل المحمل بوزنه الذاتي q (kp/cm) فقط او بقوة مشابهة للوزن الذاتي وكذلك التدلي الناجم عن ذلك .

ليقتطع من الجبل المثبت (المعلق) بين النقطتين 1 و 2 (شكل 2-223) عنصراً صغيراً طوله dL .



القوى الفعلية

(a)



مكونات القوى الفعلية

(b)

شكل 2-224

يعطي تطبيق شروط التوازن على العنصر الممثل في الشكل (2-224) المعادلات التالية :

$$\sum V = 0 : -V - q dL + V + dV = 0$$

$$\sum H = 0 : -H + H + dH = 0$$

منها ينتج أن :

$$H = \text{const.} \quad (2-34)$$

$$\frac{dV}{dL} = q \quad (2-35)$$

تكتب العلاقات التي تربط بين القوة الشاقولية V والقوة الأفقية H وقوة الجبل N من جهة وبين أطوال العنصر dx , dy , dL من جهة أخرى كما يلي :

$$\frac{V}{H} = \frac{dy}{dx} = \tan \phi = y'$$

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = H \sqrt{1 + (V/H)^2} = H \sqrt{1 + y'^2} \quad (2-36)$$

$$N = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

من العلاقة (2-35) ينتج :

$$dV = q dL$$

وبادخال العلاقة (2-36 c) فيها فلنأخذ الشكل التالي :

$$dV = q dx \sqrt{1+y'^2}$$

أو :

$$\frac{dV}{dx} = q \sqrt{1+y'^2} \quad (2-37)$$

من العلاقة (2-36a) ينتج :

$$V = Hy'$$

باشتقاق هذه المعادلة وبمراعاة العلاقة (2-34) يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$\frac{dV}{dx} = Hy'' \quad (2-38)$$

بمقارنة العلاقتين (2-37) و (2-38) يرى أن

$$\frac{dV}{dx} = q \sqrt{1+y'^2} = Hy'' \quad (2.39)$$

لايجاد التبدلي يستعان بالمعادلة التفاضلية لمنحني الجبل التالية :

$$y'' = \frac{q}{H} \sqrt{1+y'^2} \quad (2.40)$$

إن المعادلة (2-40) هي معادلة تفاضلية لا خطية (من الدرجة الثانية) ومن المرتبة الثانية ،لحلها يجرى التعويض التالي :

$$y' = p \quad ; \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} \quad (2.41)$$

وبالتبديل في المعادلة (2-40) وبعد فصل المتغيرات (Trennung der Veränderlichen) ينتج :

$$\frac{q}{H} dx = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} \quad (2.42)$$

باجراء عملية المكاملة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{q}{H} (x - x_0) = \text{Ar sinh } p$$

أو

$$p = \sinh \frac{q}{H} (x - x_0) \quad (2.43)$$

وأخيراً تعطى العلاقة السابقة بعد مراعاة الاختصارات (2-41) وبعد المكاملة ما يلي :

$$y - y_0 = \frac{H}{q} \cosh \frac{q}{H} (x - x_0) \quad (2.44)$$

تتعلق ثوابت التكامل x_0 و y_0 من موضع مجموعة الاحداثيات . ولذلك يرى من الانسب جعل الاحداثي y ير من اخفض نقطة في منحنى الجبل وذلك بحيث يصبح هناك (شكل 2-221) :

$$y' (x = 0) = 0$$

وبذلك يرى من العلاقة (2-43) أن $x_0 = 0$. بالتعويض في العلاقتين (2-43) و (2-44) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$y' = p = \sinh \frac{q}{H} x \quad (2.45)$$

$$y - y_0 = \frac{H}{q} \cosh \frac{q}{H} x$$

α - الاحداثيات كما في الشكل (2-223 a) :

لو ثبت مبدأ الاحداثيات بالشكل الذي ينعدم فيه ثابت التكامل $y_0 = 0$ ، لاصبحت العلاقة (2-45) كما يلي :

$$y = \frac{H}{q} \cosh \left(\frac{q}{H} x \right) \quad (2.46)$$

ولبلغ ارتفاع الجبل في أخفض نقطة منه وفوق المحور x القيمة H/q . بالاستعانة بالعلاقة (2-36) يتم الحصول من العلاقة (2-46) على مايلي :

$$\dot{V} = H \sinh \left(\frac{q}{H} x \right) ; \quad dL = dx \cosh \left(\frac{q}{H} x \right) \quad (2.47)$$

$$N = H \cosh \left(\frac{q}{H} x \right) ; \quad L = \frac{H}{q} \left[\sinh \left(\frac{q}{H} x_2 \right) + \sinh \left(-\frac{q}{H} x_1 \right) \right]$$

حيث أن x_1 و x_2 هي احداثيات نقاط التثبيت (التعليق) على المحور x (ولذلك تؤخذ مع اشارتها) . بهذه العلاقات يمكن اعتبار المشكلة قد أصبحت محلولة .

٢ - الاحداثيات كما في الشكل (2-223 b) :

لو ثبت مبدأ الاحداثيات في أخفض نقطة من الجبل لأصبحت العلاقة (2-45) بعد تطبيق شرط البداية :

$$y(x=0) = 0 : y_0 = -\frac{H}{q}$$

كما يلي :

$$y = \frac{H}{q} \left[\cosh \left(\frac{q}{H} x \right) - 1 \right] \quad (2.48)$$

تسمى هذه العلاقة (2-48) بمعادلة السلسلة (وذلك لأن السلسلة المنتظمة تأخذ هذا الشكل تحت تأثير وزنها الذاتي) .

بالاستعانة بالعلاقة (2-48) يتم الحصول من المعادلة (2-36) على ما يلي :

$$N = H \sqrt{1+y'^2} = H \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{q}{H} x \right)} = H \cosh \left(\frac{q}{H} x \right)$$

$$V = H y' = H \sinh \left(\frac{q}{H} x \right)$$

$$dL = dx \sqrt{1+y'^2} = dx \cosh \left(\frac{q}{H} x \right)$$

$$L = \int_{x1}^{x2} dL = \int_{x1}^{x2} \cosh \left(\frac{q}{H} x \right) dx = \frac{H}{q} \sinh \left(\frac{q}{H} x \right) \Big|_{x1}^{x2} \quad (2.49)$$

$$= \frac{\ddot{H}}{q} \left[\sinh\left(\frac{q}{H} x_2\right) - \sinh\left(\frac{q}{H} x_1\right) \right] = \frac{\ddot{H}}{q} \left[\sinh\left(\frac{q}{H} x_2\right) + \sinh\left(-\frac{q}{H} x_1\right) \right]$$

$$= \frac{H}{q} \left[\sinh\left(\frac{q}{H} |x_2|\right) + \sinh\left(\frac{q}{H} |x_1|\right) \right]$$

بمقارنة العلاقة (2-49) مع العلاقة (2-47) يتبين أن موضع الاحداثيات لم يغير من النتائج وهذا شيء صحيح . ان ايجاد ثوابت منحنى السلسلة هو اصعب بكثير منه بالنسبة لمنحنى القطع المكافئ .

في حالة التبدلي الكبير (große Durchhang) (حيث أن H صغيرة) يختلف منحنى السلسلة عن القطع المكافئ اختلافاً كبيراً. اما في حالة التبدلي الصغير (حيث ان H كبيرة) فان نشر معادلة المنحنى (2-48) يعطي المعادلات التقريبية التالية :

$$y = \frac{H}{q} \left[\left(1 + \frac{q^2 x^2}{2H^2} + \frac{q^4 x^4}{24H^4} + \dots + \frac{q^{2n} x^{2n}}{2n! H^{2n}} + \dots \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{H}{q} \left[\frac{q^2 x^2}{2H^2} + \frac{q^4 x^4}{24H^4} + \dots + \frac{q^{2n} x^{2n}}{2n! H^{2n}} + \dots \right] \quad (2-50)$$

كما ان المعادلة (2-49 a) التي تعطي قوة الشد N تأخذ الشكل العام :

$$N = H \left[1 + \frac{q^2 x^2}{2H^2} + \frac{q^4 x^4}{24H^4} + \dots + \frac{q^{2n} x^{2n}}{2n! H^{2n}} + \dots \right] \quad (2-51)$$

بما ان H كبيرة لذلك يمكن الاكتفاء بالحد الاول من السلسلة وذلك لصغر بقية الحدود بالنسبة له وبذلك فان معادلة المنحنى تأخذ الشكل التالي :

$$y \approx \frac{H}{q} \frac{q^2 x^2}{2H^2} = \frac{q x^2}{2H} \quad (2-52)$$

إذا فنتيجة نشر معادلة المنحنى الفعلية هي معادلة القطع المكافئ (2-26) . اما معادلة الشد فتصبح كالتالي :

$$N \approx H \quad (2-53)$$

حالات خاصة :

آ - السلسلة غير المتناظرة (نقاط التعليق لاتقع على ارتفاع واحد) :

يبين الشكل (2-223a) خطأ معلقاً من نقطتين (1) و (2) واقعيتين على ارتفاعات مختلفة ، وتعلو

عن بعضها بالمقدار h . بفرض ان (0) هي النقطة السفلى من الخط حيث يكون أفقياً ، فإن (01) تمثل سلسلة نصف طولها x_1 وان (02) تمثل سلسلة نصف طولها x_2 . ويمكن تطبيق معادلات السلسلة (2-48) و (2-49a) على كل قسم ، فينتج :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{H}{q} \left[\cosh \left(\frac{q x_1}{H} \right) - 1 \right] \\ y_2 &= \frac{H}{q} \left[\cosh \left(\frac{q x_2}{H} \right) - 1 \right] \\ N_1 &= H \cosh \left(\frac{q x_1}{H} \right) \\ N_2 &= H \cosh \left(\frac{q x_2}{H} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-54)$$

ومن الواضح ان قوة الشد العظمى تكون عند نقطة التعليق المرتفعة (2) ، نظراً لبسعد المسافة x_2 . ان الكميات المعطاة عادة هي q و h والبعد بين الاعمدة $(x_1 + x_2)$. من العلاقات (2-54) ينتج :

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{H}{q} \left[\cosh \left(\frac{q x_2}{H} \right) - \cosh \left(\frac{q x_1}{H} \right) \right] = h \\ N_2 &= H \cosh \left(\frac{q x_2}{H} \right) \end{aligned} \quad (2-55)$$

$$x_1 + x_2 = b$$

ومن هذه المعادلات الثلاثة ، يمكن حساب المجهول الثلاثة x_1 , x_2 , H ثم استنتاج السهم وقوة الشد ويمكن حل هذه المعادلات بطريقة التقريب المتتالي ولكن يستحسن الحصول على حل تقريبي باستعمال العلاقات التقريبية للسلسلة كما يلي :

$$N \approx H$$

$$y_1 \approx \frac{q x_1^2}{2 N} \approx \frac{q x_1^2}{2 H}$$

$$y_2 \approx \frac{q x_2^2}{2 N} \approx \frac{q x_2^2}{2 H}$$

$$y_2 - y_1 = h \approx \frac{q}{2N} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{q}{2N} (x_2 + x_1) (x_2 - x_1) \\ \approx \frac{q b}{2N} (x_2 - x_1)$$

ومننه :

$$x_2 - x_1 = \frac{2 N h}{q b}$$

ولكن :

$$x_2 + x_1 = b$$

لذلك :

$$\left. \begin{aligned} x_2 &\approx \frac{1}{2} b + \frac{N h}{q b} \\ x_1 &= \frac{1}{2} b - \frac{N h}{q b} \end{aligned} \right\} \quad (2-56)$$

ومننه تستنتج قيمة السهم .

ب - السلسلة المتناظرة (نقاط التعليق تقع على إرتفاع واحد) .

إذا وقعت نقطتا التثبيت (1) و (2) على نفس الارتفاع (مسلسلة متناظرة) (الشكل 2-225) وكان البعد الأفقي (باتجاه المحور x) بينهما يساوي b ، فإن الاحداثيات الأفقية عند نهايتي الناقل هي :

$$x_1 = -\frac{b}{2} \quad , \quad x_2 = +\frac{b}{2}$$

من العلاقة (2-49) يتم الحصول على قوة الشد N في الجبل :

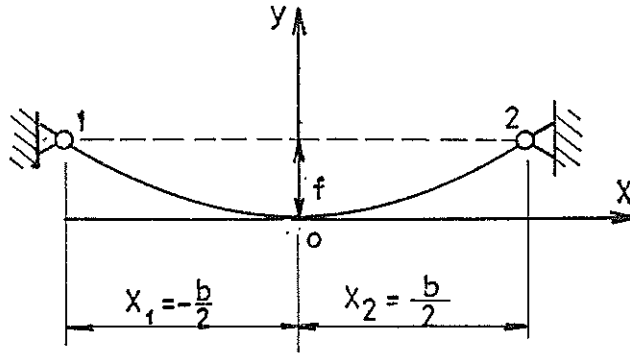
$$N = H \cosh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right) \quad (2-57 a)$$

أما السهم (القيمة العظمى للتدلي) فيساوي ترتيب (البعد باتجاه الاحداثي y) نقطتي التعليق ويعطى بالعلاقة :

$$f = y \left(x = \frac{b}{2} \right) = \frac{H}{q} \left[\cosh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right) - 1 \right] \quad (2-57 b)$$

وأما طول منحنى السلسلة فيتم الحصول عليه بتبديل $x_1 = -b/2$ و $x_2 = +b/2$ في العلاقة (2-49 d) :

$$L = \frac{H}{q} \left[\sinh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right) + \sinh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right) \right] = 2 \frac{H}{q} \sinh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right) \quad (2-57 c)$$



شكل 2-225

في حالة كون H هو المطلوب وليس f عندئذ ينبغي حل معادلة جبرية من النوع المسمى بالـ (transzendente Gleichung) وذلك بواسطة التجريب أو بطريقة تخطيطية (إن كان ذلك ممكناً). كذلك هو الحال عندما يكون L (طول السلسلة) هو المعطى وليس f ، عندئذ تعطي العلاقة (2-49 b) ما يلي :

$$V \left(x = \frac{b}{2} \right) = q \frac{L}{2} = H \sinh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right)$$

وهو يساوي نصف وزن الجبل . وبذلك ينتج :

$$\frac{qL}{2H} = \sinh \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right) \quad (2-57d)$$

يعطي حل هذه المعادلة H (transzendente Gleichung)

المعادلات التقريبية :

قوة الشد :

$$N \approx H \quad (2-57e)$$

السمم :

$$f = y \left(x = \frac{b}{2} \right) \approx \frac{q b^2}{8 H} \approx \frac{q b^2}{8 N} \quad (2-57 \text{ f})$$

طول الجبل :

$$L = 2 \frac{H}{q} \left[\frac{q}{H} \frac{b}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right)^{2n+1} + \dots \right]$$

$$L \approx 2 \frac{H}{q} \left[\frac{q}{H} \frac{b}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H} \frac{b}{2} \right)^3 \right] = b + \frac{q^2 b^3}{24 H^2} \quad (2-57 \text{ g})$$

لقد افترض ، في كل الاعتبارات السابقة ، كما قد تم التنويه عنه سابقاً ، ان الجبل عديم الاستطالة (عديم التمدد) ولكنه في الحقيقة يعاني استطالاتٍ مما ينقص (يخفض) قيمة الشد الافقي وذلك عندما تكون القيم L, q, x_2, x_1, y_2, y_1 معطاة مسبقاً .

٢ - ١٥ - ٣ الجبال ذات التدلي الضئيل

يقال عن الجبال انها ذات تدلي ضئيل عندما يكون تقعرها بسيطاً ونتيجة لذلك فهي ذات اجهادات شد كبيرة (الشكل 2-226) . بالامكان كتابة حل تقريبي من اجل الجبال ذات التدلي الضئيل كما يلي :

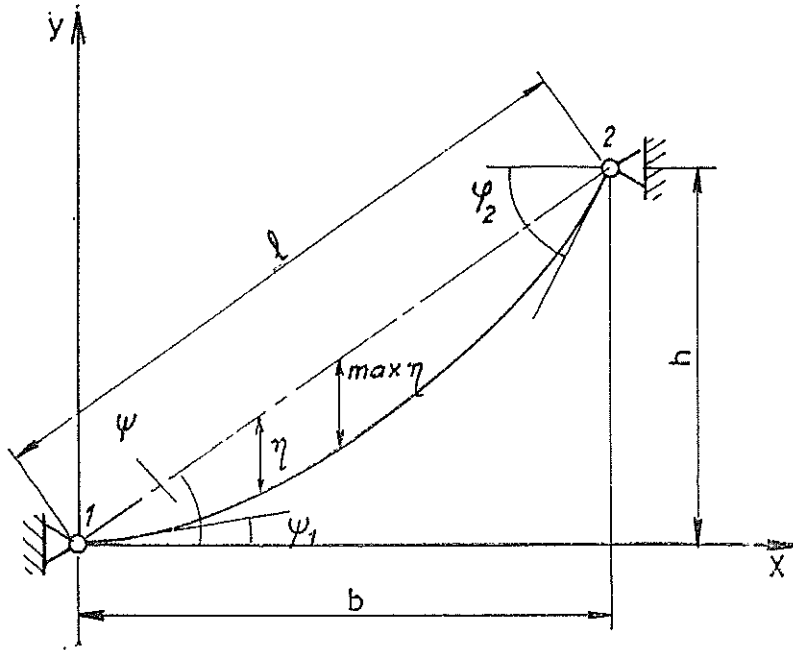
يفترض ان المسقط الشاقولي لواحدة الطول ثابت وذلك لان زاوية التماس (وهي الزاوية التي يشكها التماس مع الافق) تتغير تغيراً طفيفاً ، اي يمكن الاستعاضة عن الزاوية φ بزاوية ميل وتر الامتداد ψ وبذلك يستطاع الكتابة كما يلي :

$$\frac{q}{\cos \varphi} \approx \frac{q}{\cos \psi} = \bar{q}$$

حيث ان

$$\cos \psi = \frac{b}{l} = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

سوف يثبت مبدأ مجموعة الاحداثيات x, y في نقطة التعليق السفلية اليسارية (النقطة 1) وبذلك ينتج :



شكل 2-226

$$q \, dL = \bar{q} \, dx \Rightarrow dV = Hy'' \, dx \quad (2-58)$$

من هذه العلاقة يتم التوصل لما يلي :

$$y'' = \frac{\bar{q}}{H}$$

وبالمكاملة ينتج :

$$y' = \frac{\bar{q}}{H} x + C_1$$

$$y = \frac{\bar{q}}{H} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (2-59)$$

شرط الاطراف (شروط البداية والنهاية) :

من الشكل (2-226) يرى ان

$$y(x=0) = 0 \quad ; \quad y(x=b) = h$$

بعد تحقيق المعادلة (2-59) لشروط الاطراف يمكن كتابتها كما يلي :

$$y = \frac{\bar{q}}{2H} x (x - b) + \frac{h}{b} x = \eta + \frac{h}{b} x \quad (2-60)$$

حيث أن η هو تدلي الجبل والذي يعني هنا الانحراف (الحيدان) عن المستقيم $x (h/b)$. اما القيمة الاعظمية للتدلي فهي :

$$\max \eta = \eta \left(x = \frac{b}{2} \right) = \frac{\bar{q} b^2}{8 H}$$

يبلغ ميل الجبل ، الذي افترض في البداية أنه ثابتاً ، القيمة التالية :

$$y' = \frac{\bar{q}}{2H} (2x - b) + \frac{h}{b} = \eta' + \frac{h}{b}$$

$$y' (x = 0) = \frac{h}{b} - \frac{\bar{q} b}{2 H} \quad (2-61)$$

$$y' (x = b) = \frac{h}{b} + \frac{\bar{q} b}{2 H}$$

يتم حساب طول الجبل من العلاقة التالية :

$$L = \int_0^b dL = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2-62)$$

بادخال العلاقات (2-61) بعين الاعتبار ، ينتج :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^b \sqrt{1 + (h/b)^2 + 2 (h/b) \eta' + \eta'^2} dx \\ &= \frac{l}{b} \int_0^b \sqrt{(b/l)^2 + (b/l)^2 (h/b)^2 + 2 h/b (b/l)^2 \eta' + (b/l)^2 \eta'^2} dx \\ &= \frac{l}{b} \int_0^b \sqrt{\frac{b^2 + h^2}{l^2} + 2 \eta' \frac{bh}{l^2} + \eta'^2 \frac{b^2}{l^2}} dx \end{aligned}$$

من الشكل (2-226) وحسب قانون فيثاغورث يمكن كتابة ما يلي :

$$l^2 = b^2 + h^2$$

بالتبديل في العلاقة الأخيرة ينتج :

$$L = \frac{l}{b} \int_0^b \sqrt{1 + 2 \eta' \frac{bh}{l^2} + \eta'^2 \frac{b^2}{l^2}} dx$$

$$L \approx \frac{l}{b} \int_0^b \left(1 + \eta' \frac{bh}{l^2} + \frac{1}{2} \eta'^2 \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \eta'^2 \frac{(bh)^2}{l^4} \right) dx$$

$$L \approx l + \left(\frac{\bar{q}}{H} \right)^2 \frac{b^6}{24 l^3} \quad (2-63)$$

حيث ان l هو طول المستقيم $\overline{I2}$:

$$l = \frac{b}{\cos \psi} = \frac{h}{\sin \psi}$$

٢ - ٥ - ٤ تأثير الرياح والجليد

حين تنخفض حرارة الجو الى ($-3,5^\circ \text{C}$) تصبح الظروف الجوية مناسبة لتشكيل البرد او الجليد وتتراكم سماكة معتبرة من الجليد على الجبال (النواقل الكهربائية او كابلات الجسور) وفي التصميم يجب أخذ سماكة جليد مقدارها 9,5 mm في خطوط التوتر العالي و 4,8 mm في خطوط التوتر المنخفض بعين الاعتبار ، وذلك إستناداً الى النظم القياسية (المواصفات) البريطانية . وبالإضافة الى ذلك فان قوة الرياح تعمل على مسقط الناقل المتعامد مع اتجاه الرياح وعليه طبقة الجليد وحين التصميم ، يجب السماح لضغط رياح مقداره 40 kp/m^2 ، الناتج عن رياح سرعتها 85 km/h ، فاذا كان وزن الجليد وضغط الرياح بالمتر من طول الناقل يساوي w_i و w_w على التوالي فان القوة الكلية q بالمتر الواحد من طول الناقل تساوي :

$$q = \sqrt{(g + w_i)^2 + w_w^2} \quad (2-64)$$

(حيث ان g هو الوزن الذاتي لمتر من طول الناقل) وتعمل باتجاه يصنع زاوية α مع الاتجاه الشاقولي (شكل b 2-227) ، حيث :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_w}{g + w_i} \quad (2-65)$$

وينتج عن ذلك ان الناقل يتخذ شكل السلسلة في ذلك المستوي المائل ويتبع معادلتها فاذا كان D هو القطر الاجمالي للناقل وكانت R هي سماكة الجليد (شكل 2-227) فان :

$$\begin{aligned} w_i &= 10^3 \cdot \pi \left[\left(\frac{D}{2} + R \right)^3 - \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right] \\ &= \pi R (D+R) \cdot 10^3 \text{ kp / m} \end{aligned} \quad (2.66)$$

إذ ان وزن المتر المكعب من الجليد يساوي (10^3 kp) ، كما أن :

$$w_w = 40 (D + 2R) \text{ kp / m} \quad (2.67)$$

٢ - ١٥ - ٥ أمثلة :

مثال 106 :

المطلوب : حساب السهم الاعظمي لناقل متناظر ، طول فتحة 196 m ووزنه بوحدة الطول 0,72 kp/m وذلك عندما تكون القيمة العظمى المسموح بها لقوة الشد تساوي 1360 kp باستخدام العلاقات الدقيقة ثم العلاقات التقريبية وإجراء مقارنة بين النتائج .

الحل :

١ - باستعمال العلاقات الدقيقة :

$$\frac{b}{2} = \frac{196}{2} = 98 \text{ m}$$

$$q = 0,72 \text{ kp / m}$$

وبالتعويض في العلاقة (2-57 a) التي تعطي القيمة العظمى للشد ينتج :

$$1360 = H \cosh \frac{98 \cdot 0,72}{H} = H \cosh \frac{71}{H}$$

ويمكن إيجاد قيمة H بطريقة تجريبية (باستعمال الجداول قطع الزائدية مثلا) او بطريقة تخطيطية او بنشر السلسلة في العلاقة (2-57 a) كما يلي :

$$\frac{N}{H} = \cosh \frac{qb}{H^2} = 1 + \frac{q^2 b^2}{8 H^2} + \frac{q^4 b^4}{384 H^4} + \dots$$

وبما ان النسبة qb/H^2 صغيرة ، لذلك ينتج :

$$\frac{N}{H} \approx 1 + \frac{q^2 b^2}{8 H^2}$$

ومنه :

$$H^2 - H N + \frac{1}{8} q^2 b^2 = 0$$

أي ان :

$$H = \frac{1}{2} N + \frac{1}{2} \sqrt{N^2 - \frac{q^2 b^2}{2}} = \frac{1}{2} N \left[1 + \sqrt{1 - \frac{q^2 b^2}{2N^2}} \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} N \left[1 + 1 - \frac{q^2 b^2}{4 N^2} \right] = N - \frac{q^2 b^2}{8 N}$$

$$H \approx 1360 - \frac{71^2}{2 \cdot 1360} = 1360 - 1,83 = 1358,17 \text{ kp}$$

وبالتعويض في العلاقة (2-57 b) يتم تعيين السهم :

$$f = \frac{1358}{0,72} (1,00136 - 1) = 2,6 \text{ m}$$

ب - باستعمال العلاقة التقريبية (2-57 f) :

بسبب :

$$N \approx H$$

ينتج :

$$f \approx \frac{q b^2}{8 H} \approx \frac{q b^2}{8 N} = \frac{0,72 \cdot (196)^2}{8 \cdot 1360} = 2,55 \text{ m}$$

ويلاحظ ان الفرق بين القيمتين يساوي:

$$2,6 - 2,55 = 0,05 \text{ m}$$

ويمادل :

$$\frac{0,05}{2,6} \cdot 100 = 2,2 \%$$

مثال 107 :

ناقل قطره 19,6 mm ووزنه 1,03 kp/m مغطى بالجليد بسماكة 12,6 mm ويقع تحت ضغط رياح قدره 40 kp/mm² وقوة تحمله 8000 kp .

المطلوب : حساب ارتفاع نقاط التعليق اللازم كيلا تزيد قوة الشد في الناقل عن نصف قوة التحمل ، اذا كان التباعد بين الاعمدة يساوي 270 m وكان ارتفاع النقطة السفلى من الناقل عن سطح الارض يزيد عن 6,6 m تحت تلك الظروف .

الحل :

حسب العلاقة (2-66) والعلاقة (2-67) ينتج :

$$w_i = \pi \cdot 12,6 (19,6 + 12,6) 10^3 = 0,36 \text{ kp / m}$$

$$w_w = 40 \left(\frac{19,6 + 25,4}{10^3} \right) = 0,53 \text{ kp / m}$$

وحسب العلاقة (2-64) :

$$q = \sqrt{(1,03 + 0,36)^2 + 0,53^2} = 2,72 \text{ kp/m}$$

وقوة الشد العظمى في الناقل :

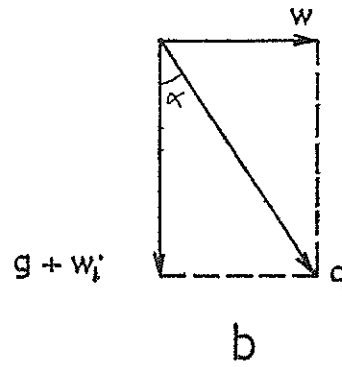
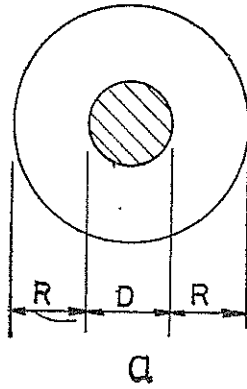
$$N = \frac{1}{2} \cdot 8000 = 4000 \text{ kp}$$

وباستعمال العلاقة التقريبية (2-57 f) لحساب السهم ينتج :

$$f \approx \frac{q b^2}{8H} \approx \frac{q b^2}{8N} = \frac{2,72 \cdot 2,75^3}{8 \cdot 4000} = 6,2 \text{ m}$$

اما باستعمال الطريقة الاكثر دقة ، كما في المثال السابق ، فينتج :

$$H = N - \frac{q^2 b^2}{8N} = 4000 - \frac{(2,72 - 270)^2}{8 \cdot 4000} = 3989 \text{ kp}$$



شكل 2-164

وبالتعويض في العلاقة (2 57 b) ينتج :

$$f = \frac{H}{q} \left[\cosh \left(\frac{q b}{2H} \right) - 1 \right] = \frac{3980}{2,72} \left[\cosh \left(\frac{2,72 \cdot 270}{2 \cdot 3980} \right) - 1 \right] = 6,24 \text{ m}$$

ويلاحظ أن القيمتين متقاربتين . وارتفاع نقاط التعليق هو

$$6,24 + 6,60 = 12,84 \text{ m}$$

أي يجب ان لا يقل عن (13 m) .

مثال 108 :

يمر خط هوائي نهراً ، ويستند على عمودين ارتفاعها 45 m ، 90 m فوق سطح الماء على التوالي ، والبعد بينهما 330 m . فإذا كانت القيمة العظمى لقوة الشد في الخط 1940 kp ووزن الخط 0,9 kp/m .

المطلوب : إيجاد ارتفاع الناقل عن سطح الماء في النقطة المتوسطة بين العمودين .

الحل :

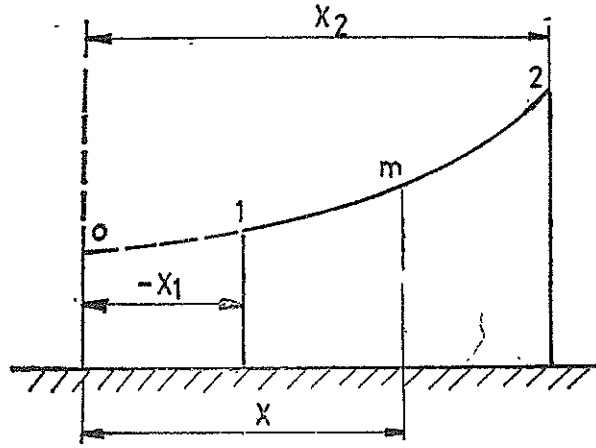
يعين أولاً الحل التقريبي باستعمال العلاقات (2-56) فينتج :

$$x_2 = \frac{330}{2} + \frac{1940 \cdot 45}{0,9 \cdot 330} = 115 + 293 = 408 \text{ m}$$

$$x_1 = 115 - 293 = - 178 \text{ m}$$

وتدل الإشارة السالبة لـ x_1 على أن النقاط 2,1 تقعان على نفس الطرف بالنسبة للنقطة 0 (شكل 2-228) . وقيمة x عند النقطة المتوسطة m تساوي :

مقاومة المواد م ٣٠



شكل 2.228

$$x = \frac{1}{2} (408 + 178) = 298 \text{ m}$$

لذلك فإن ارتفاعها فوق النقطة 0 يساوي :

$$y = \frac{q x^2}{2H} \approx \frac{q x^2}{2N} = \frac{0,9 \cdot 298^2}{2 \cdot 1940} = 19,9 \text{ m}$$

وارتفاع النقطة 2 فوق النقطة 0 يساوي :

$$y_2 = \frac{q x_2^2}{2N} \approx \frac{q x_2^2}{2H} = \frac{0,9 \cdot 408^2}{2 \cdot 1940} = 48,6 \text{ m}$$

لذلك فإن النقطة m تنخفض عن النقطة 2 بمقدار :

$$48,6 - 19,9 = 28,7 \text{ m}$$

أي أن إرتفاعها عن سطح الماء هو :

$$90 - 28,7 = 61,3 \text{ m}$$

ولاحصول على الحل الدقيق ، يفضل كتابة المعادلة الأولى (a 2.55) كما يلي :

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= h = \frac{H}{q} \left(\cosh \frac{q x_2}{H} - \cosh \frac{q x_1}{H} \right) \\ &= \frac{2H}{q} \sinh \frac{q(x_2 - x_1)}{2H} \sinh \frac{q(x_2 + x_1)}{2H} \end{aligned}$$

أى أن :

$$h = \frac{2H}{q} \sinh \frac{qb}{2H} \sinh \frac{q(x_2 - x_1)}{2H} \quad (2-68)$$

ثم تستعمل طريقة التقريب المتتالي كما يلي :
تعوض قيمة x_2 الناتجة عن الحل التقريبي في المعادلة الثانية من العلاقات (2-55 d) فيتم الحصول على قيمة تقريبية أولى (H) فينتج :

$$1940 = H \cosh \frac{0,9 \cdot 408}{H} = H \cosh \frac{367}{H}$$

وهذه من الصيغة

$$\cosh y = 5,3 y$$

حيث

$$y = \frac{367}{H}$$

يعطي حل المعادلة الجبرية (transzendente Gleichung) الذي يتم اما بطريقة تجريبية عددية أو بطريقة تخطيطية النتيجة التالية :

$$y = 0,193$$

لذلك فإن :

$$H = \frac{367}{0,193} = 1840 \text{ kp}$$

ثم تعوض هذه القيمة في العلاقة (2-67) بعد ان تكتب بالشكل التالي :

$$\sinh \left[\frac{q(x_2 - x_1)}{2H} \right] = \frac{qb}{2H \sinh \frac{qb}{2H}}$$

فينتج :

$$\begin{aligned} \sinh \left[\frac{0,9(x_2 - x_1)}{2 \cdot 1890} \right] &= \frac{0,9 \cdot 45}{2 \cdot 1890 \cdot \sinh \left(\frac{0,9 \cdot 330}{2 \cdot 1890} \right)} \\ &= \frac{0,9 \cdot 45}{2 \cdot 1890 \cdot 0,0785} = 0,1372 \end{aligned}$$

لذلك

$$\frac{q(x_2 - x_1)}{2H} = 0,1368$$

ومنه

$$x_2 - x_1 = \frac{2 \cdot 1890 \cdot 0,1368}{0,9} = 577 \text{ m}$$

ولكن

$$x_2 + x_1 = 330 \text{ m}$$

لذلك

$$x_2 = 454 \text{ m}$$

وهذه هي القيمة التقريبية الثانية لـ x_2 والتي ستستعمل لإيجاد قيمة تقريبية ثانية لـ H فينتج $H=1890 \text{ kp}$ ومنها ينتج $x_2=453 \text{ m}$ التي تقارب القيمة السابقة مما يدل على ان نتائج التقريب الثاني تعتبر مناسبة (يفضل في الحياة العملية استخدام طريقة التصحيح لنيوتن للحصول على قيم دقيقة وبسرعة . لكن للأسف لا يطلب من طلاب هذه المرحلة معرفتها ولذلك لم تستخدم) .

إن فصل النقطة المتوسطة هو :

$$x = 453 - \frac{1}{2} 330 = 288 \text{ m}$$

وعمقها بالنسبة للنقطة 2 :

$$\begin{aligned} \frac{H}{q} \left(\cosh \frac{453 q}{H} - \cosh \frac{288 q}{H} \right) &= \\ &= \frac{2H}{q} \sinh \frac{165 q}{2H} \sinh \frac{741 q}{2H} = 32,2 \text{ m} \end{aligned}$$

أي أن ارتفاعها عن سطح الماء هو :

$$90 - 32 = 58 \text{ m}$$

ويلاحظ ان الفارق بين نتائج الطريقة التقريبية ونتائج الطريقة الدقيقة هو معتبر في هذه الحالة .

٢ - ١٦ الجيزان الفراغية

٢ - ١٦ - ١ ردود أفعال المساند في الجيزان الفراغية

مثال 109 :

حملت بلاطة متجانسة وزنها G وتستند بواسطة القضبان 1 --- 6 بحمولة اضافية تتألف من القوى P_1 , P_2 (شكل 2-229) .

المعطى :

$$G = 100 \text{ kp} ; P_1 = 200 \text{ kp} ; P_2 = 100 \text{ kp}$$

$$a = 4 \text{ m} , b = 4 \text{ m} ; c = 3 \text{ m}$$

المطلوب : إيجاد قوى القضبان .

الحل :

بتطبيق شروط التوازن الفراغية يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$\sum_v P_{xv} = 0 : \frac{4}{5} S_3 - P_2 = 0$$

$$\sum_v P_{yv} = 0 : \frac{4}{5} S_1 - \frac{4}{5} S_5 = 0$$

$$\sum_v P_{zv} = 0 : -P_1 - G - \frac{3}{5} S_1 - S_2 - \frac{3}{5} S_3 - S_4 - \frac{3}{5} S_5 - S_6 = 0$$

$$\sum_v M_{xv} = 0 : -\frac{4}{5} S_1 c - S_6 b - P_1 b - \frac{1}{2} G b = 0$$

$$\sum_v M_{yv} = 0 : \frac{4}{5} S_3 c + S_4 a + S_6 a + \frac{1}{2} G a - P_2 c - \frac{3}{5} S_5 a = 0$$

$$\sum_v M_{zv} = 0 : -\frac{4}{5} S_5 a + P_2 b = 0$$

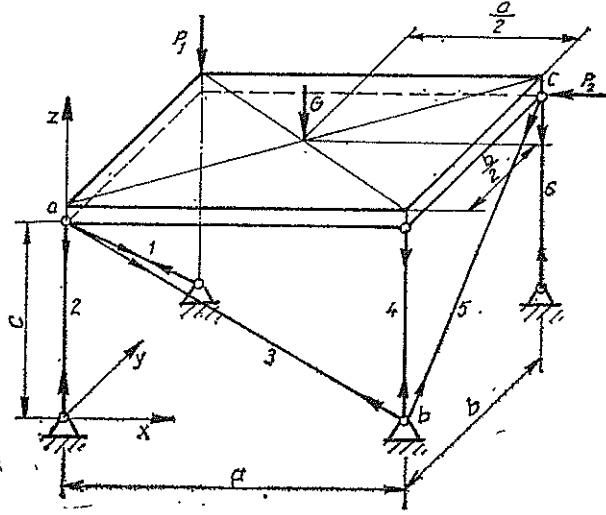
تبلغ أطوال القضبان 1 , 3 , 5 القيم التالية :

$$\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = 5 \text{ m}$$

النتائج :

$$S_1 = + 125 \text{ kp} ; S_3 = + 125 \text{ kp} ; S_5 = + 125 \text{ kp}$$

$$S_2 = - 400 \text{ kp} ; S_4 = + 200 \text{ kp} ; S_6 = - 325 \text{ kp}$$



شكل 2-229

لقد كان بالامكان التوصل بسرعة الى قوى القضبان وذلك باستبدال شروط توازن القوى بشروط توازن عزوم أخرى ، فلو طبقت شروط توازن العزوم بالنسبة للمحاور التي تؤدي لأن تبقى في كل معادلة قوة قضيب واحدة مجهولة يختلف ذراعها عن الصفر ، لنتج ، على سبيل المثال (شكل 2-229) :

$$\sum M_{AC} = 0 : P_1 \frac{1}{2} \sqrt{2} a - S_4 \frac{1}{2} \sqrt{2} a = 0 ; S_4 = P_1$$

$$\sum M_{AB} = 0 : \frac{4}{5} P_1 b + \frac{4}{5} G \frac{1}{2} b + \frac{3}{5} P_2 b + \frac{4}{5} S_6 b = 0 :$$

$$S_6 = - \left(P_1 + \frac{3}{4} P_2 + \frac{1}{2} G \right)$$

٢ - ١٦ - ٢ قيم القطع في الجيزان الفراغية

تطبق على الجيزان المستوية التي تقع تحت تأثير مجموعة القوى المستوية ثلاثة شروط للتوازن هي :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n P_{yv} = 0 \quad ; \quad \sum_{v=1}^n M_{zv} = 0$$

كما وأنها تحتوي على ثلاثة قيم للقطع (هي القوة الناعمية أو ما تسمى أيضاً بالقوة الطولية ، والقوة العرضية وعزم الانعطاف) . أما الجيزان الفراغية الواقعة تحت تأثير مجموعة القوى الفراغية (شكل 2-230) فلها ستة شروط للتوازن هي :

$$\sum_{v=1}^n P_{xv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n P_{yv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n P_{zv} = 0$$

$$\sum_{v=1}^n M_{xv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n M_{yv} = 0 \quad , \quad \sum_{v=1}^n M_{zv} = 0$$

كما وأن المقطع العرضي الواحد يحتوي على ستة قيم قطع (شكل 2-23) .

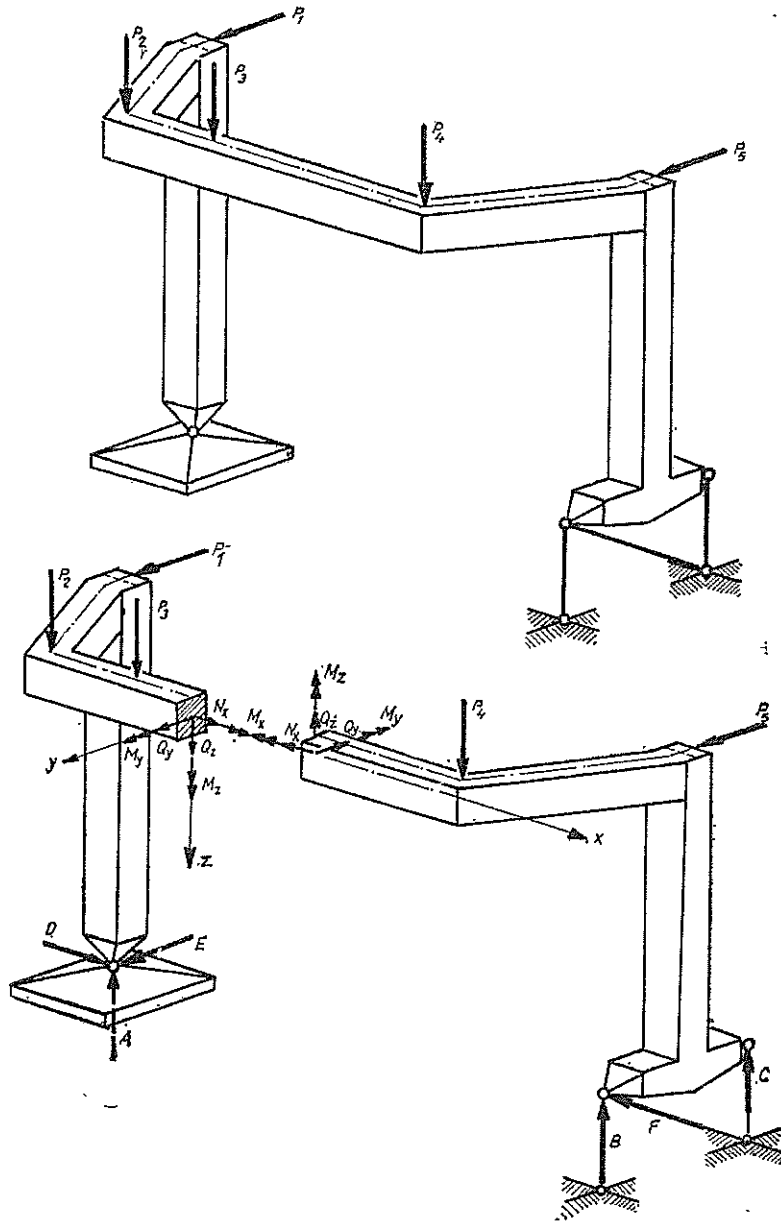
ليرمز لمحور القضيب بالرمز x وليرمز للمحاور المتعامدة عليه بالرموز y , z . بالاستعانة بمجموعة الاحداثيات المذكورة يستطاع بشكل واضح تعيين كافة قيم القطع في اية نقطة من الجائز .

تألف قيم القطع في الجيزان الفراغية من القوى والعزوم الداخلية التالية :

$$(2-69) \quad \left\{ \begin{array}{ll} N_x : & \text{القوة الناعمية (القوة الطولية)} \\ Q_z , Q_y : & \text{القوى العرضية} \\ M_z , M_y : & \text{عزوم الانعطاف} \\ M_x : & \text{وعزم الفتل} \end{array} \right.$$

يعود السبب في تسمية العزم M_x بعزم الفتل لانه مرتبط بفتل القضيب المرن .

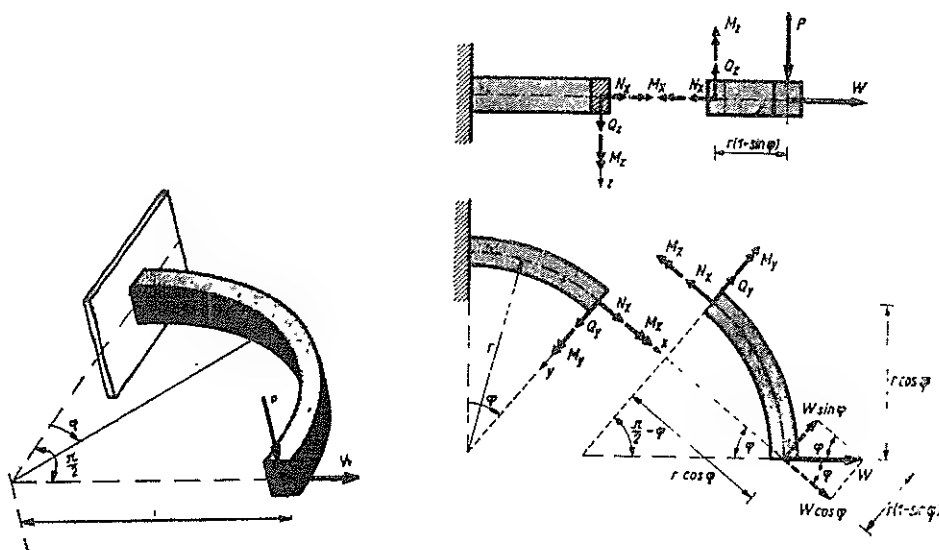
يتم في حالة الجيزان المقررة ستاتيكيًا ، تعيين قيم القطع الستة (العلاقة 2.69) بتطبيق شروط التوازن على الجزء المقتطع من الجائز او بتطبيق شروط التوازن على قطعة صغيرة جداً طولها dx ومقتطعة من الجائز .



شكل 2-230

مثال 110 :

المطلوب : إيجاد قيم قطع الجائز الحلقي الدائري الموثوق من طرف والحر من الطرف الآخر والممثل في الشكل (2-232) وذلك نتيجة لتحميله بالقوتين P و W .



شكل 2-232

الحل :

بتطبيق شروط توازن القوى (توازن مركبات القوى) على الجزء ذو الطول $r \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ المقطع من الجائز يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\sum_{v} P_{xv} = 0 : -N_x + W \cos \varphi = 0$$

$$\sum_{v} P_{yv} = 0 : -Q_y - W \sin \varphi = 0$$

$$\sum_{v} P_{zv} = 0 : -Q_z + P = 0$$

وبحلها يتم الحصول على القوة الناعمية والقوتين العرضيتين :

$$N_x = W \cos \varphi : Q_y = -W \sin \varphi ; Q_z = P$$

أما تطبيق شروط توازن العزوم فيعطي مجموعة المعادلات التالية :

$$\sum_{v} M_{xv} = 0 : -M_x + P r (1 - \sin \varphi) = 0$$

$$\sum_v M_{y_v} = 0 : -M_y - P r \cos \varphi = 0$$

$$\sum_v M_{z_v} = 0 : -M_z + W \sin \varphi \cdot r \cos \varphi - W \cos \varphi \cdot r (1 - \sin \varphi) = 0$$

وبحليها يتم التوصل لعزم الفتل :

$$M_x = P r (1 - \sin \varphi)$$

وعزمي الانعطاف :

$$M_y = -P r \cos \varphi ; \quad M_z = -W r \cos \varphi$$

مثال 111 :

المطلوب : حساب ردود أفعال المساند وقيم القطع للعنصر الانشائي الممثل في الشكل (2.233) .

الحل :

بتطبيق شروط التوازن الستة على الجسم ككل ينتج :

$$A \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$D b - M - P b - 2 P b = 0$$

$$E \frac{\sqrt{2}}{2} 3a = 0$$

$$B - E \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F \cdot 3a + E \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3a + P \cdot 2a + 2P \frac{3}{2} a = 0$$

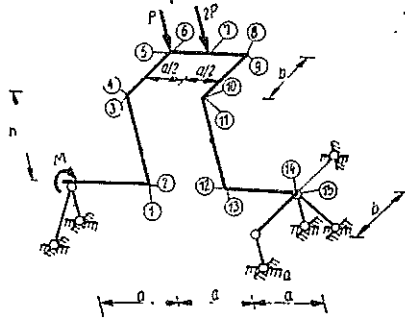
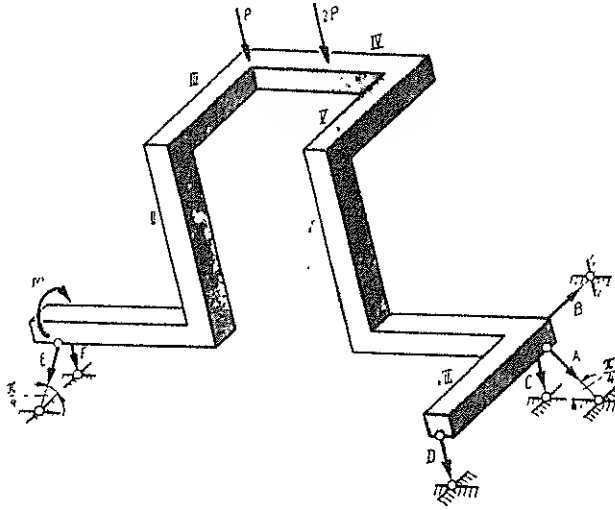
$$F + E \frac{\sqrt{2}}{2} + D + C + A \frac{\sqrt{2}}{2} + 3P = 0$$

بحليها يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A=0; B=0; C=-\frac{13}{2}P-\frac{M}{b}; D=3P+\frac{M}{b}; E=0; F=-\frac{5}{3}P$$

لتعيين قيم القطع الستة سوف يلجأ لاستخدام مجموعات نسب (مجموعة محاور احداثية) حسب الشكل (2-234). تؤثر القوة الناعمية (القوة الطولية) في المجالات الشاقولية فقط ، ففي المجال II تبلغ تلك القوة :

$$N_{II} = F = -\frac{5}{3}P$$



شكل 2-233

أما في المجال VI فتبلغ :

$$N_x = C + D = -\frac{4}{3}P$$

لا تتشكل في أجزاء المنشأ قوى عرضية Q_y ، اما القوة العرضية Q_z فتأخذ الشكل التالي :
المجال I :

$$Q_z = -F = -\frac{5}{3} P$$

وفي المجال III :

$$Q_z = -F = -\frac{5}{3} P$$

يحتوي توزيع القوة العرضية في المجال IV من الجائز على قفزة (الزلاق) . تبلغ قيمة القوة العرضية بين المحولات الوحيدة مايلي :

$$Q_z = -F - P = -\frac{2}{3} P$$

لكنها تبلغ على يمين المحولة الوحيدة :

$$Q_z = -F - P - 2P = -\frac{4}{3} P$$

تظهر هذه القيمة ايضاً في المجالات V , VII . واخيراً فانها تبلغ في المجال VIII :

$$Q_z = D = 3P + \frac{M}{b}$$

يأخذ عزم القتل M_x في المجال I من الجائز قيمة ثابتة وهي :

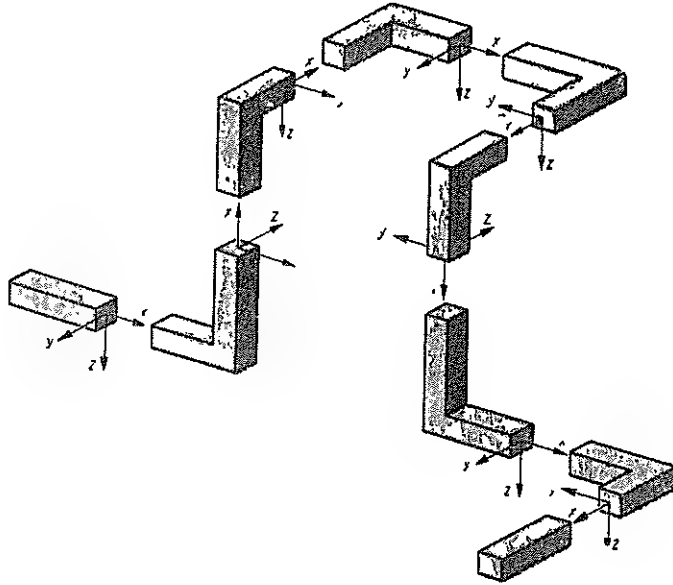
$$M_x = M$$

وينعدم عزم القتل في المجالات الشاقولية II , IV من الجائز ، لأن كافة القوى توازي محور القضيب هناك . اما في المجال III فتصالح العلاقة التالية :

$$M_x = Fa = -\frac{5}{3} Pa$$

وفي المجال IV فانه يأخذ الشكل التالي :

$$M_x = M - Fb = M + \frac{5}{3} Pb$$



شكل 2-234

ومن اجل المجال V ينتج :

$$M_x = -F 2 a + P a - 2 P \frac{a}{2} = \frac{4}{3} P a$$

واخيراً يتم الحصول من اجل المجال IIV على العلاقة التالية :

$$M_x = D b = 3 P b + M$$

ومن اجل المجال VIII :

$$M_x = 0$$

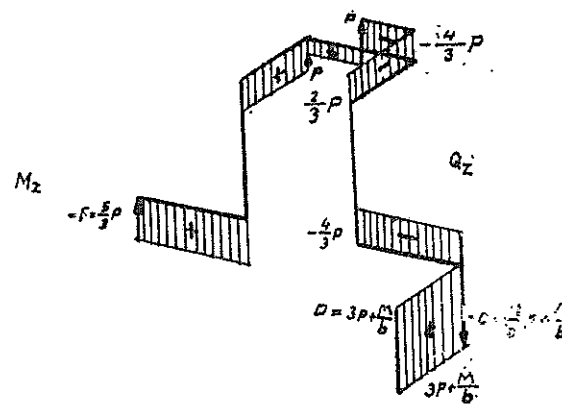
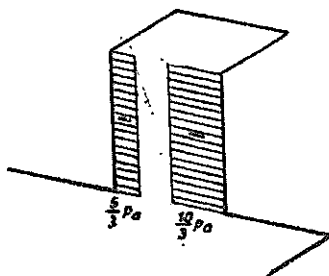
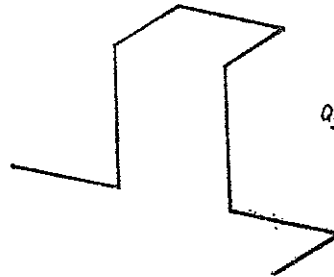
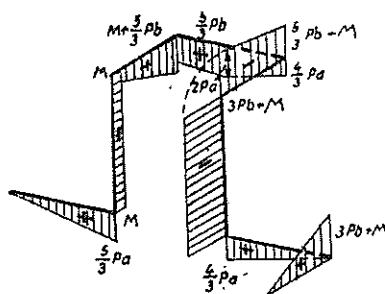
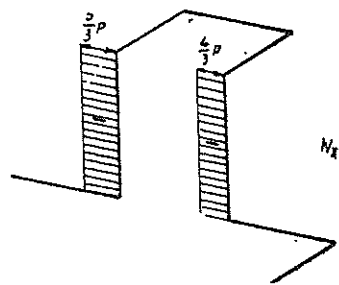
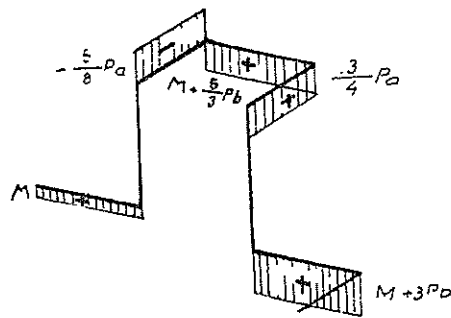
للتمكن من تمثيل عزوم الانعطاف ياجباً لحساب القيم التالية :

$$M_{y1} = -F a = \frac{5}{3} P a$$

$$M_{y2} = M_{y3} = M_{y4} = M$$

$$M_{y5} = M - F b = M + \frac{5}{3} P b$$

$$M_x = 0$$



(2-235) شکل

$$M_{y6} = M_{y1} = \frac{5}{3} Pa$$

$$M_{y7} = -F \frac{3}{2} a - P \frac{a}{2} = 2 Pa$$

$$M_{y8} = -F 2a - Pa - 2 P \frac{a}{2} = \frac{4}{3} Pa$$

$$M_{y9} = F b - M = -\frac{5}{3} Pb - M$$

$$\begin{aligned}
M_{y10} = M_{y11} = M_{y12} &= -3 P b - M \\
M_{y13} = M_{y8} &= \frac{4}{3} P a \\
M_{y14} &= 0 \\
M_{y15} = -D b &= -3 P b - M
\end{aligned}$$

و :

$$M_{z2} = M_{z3} = F a = -\frac{5}{3}$$

$$M_{z11} = M_{z12} = F 2 a = -\frac{10}{3} P a$$

لقد تم في الشكل (2-235) تمثيل مخططات قيم القطع للعنصر الحامل الفراغي .

مثال 112 :

المطلوب : حساب ورسم قيم القطع للعنصر الانشائي الممثل في الشكل (2-236) .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن على الجسم ككل يتم التوصل لمجموعة المعادلات التالية :

$$A \frac{\sqrt{2}}{2} - P_1 = 0$$

$$F \frac{\sqrt{2}}{2} 2 b - P_2 b + P_1 a = 0$$

$$(E + F \frac{\sqrt{2}}{2}) 2 b + p 2 b . b = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (C + F) - P_2 = 0$$

$$[B + \frac{\sqrt{2}}{2} (A + C)] 2 a = 0$$

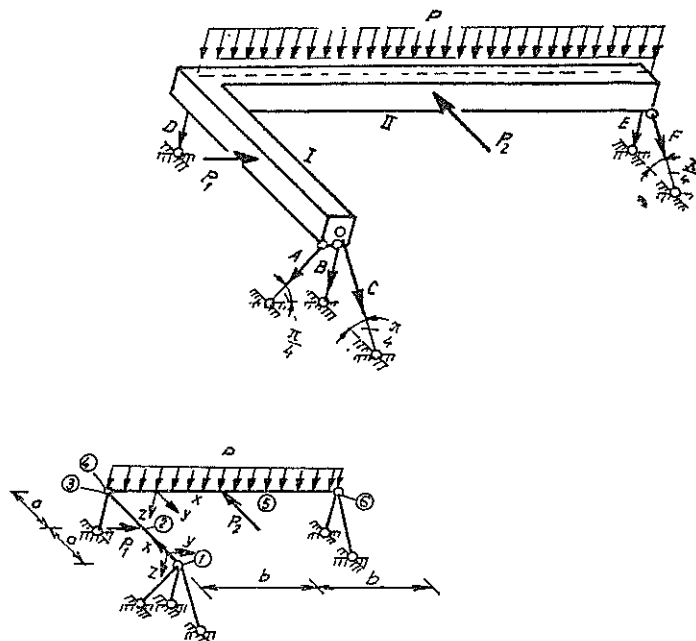
$$D + B + E + \frac{\sqrt{2}}{2} (A + C + F) + p 2 b = 0$$

بجملها يتم تعيين ردود افعال المساند :

$$A = \sqrt{2} P_1, \quad D = -p b$$

$$B = -\left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{b}\right) P_1 - \frac{1}{2} P_2; \quad E = -p b - \frac{1}{2} \left(P_2 - \frac{a}{b} P_1\right)$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(P_1 + \frac{a}{b} P_2\right); \quad F = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(P_2 - \frac{a}{b} P_1\right)$$



شكل 2-236

٢ - قيم القطع :

تشكل القوة الناعمية في المجال I فقط وتبلغ قيمتها :

$$N_x = \frac{\sqrt{2}}{2} C = \frac{1}{2} \left(P_2 + \frac{a}{b} P_1\right)$$

تبلغ تراتيب القوى العرضية القيم التالية :

$$Q_{v1} = Q_{v2} = \frac{\sqrt{2}}{2} A = P_1$$

$$Q_{y4} = Q_{y5l} = -\frac{1}{2} (P_2 + \frac{a}{b} P_1)$$

$$Q_{y5r} = Q_{y6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} C + P_2 = \frac{1}{2} (P_2 - \frac{a}{b} P_1)$$

: و

$$Q_{z1} = Q_{z2} = Q_{z3} = -\left[B + \frac{\sqrt{2}}{2} (A + C) \right] = 0$$

$$Q_{z4} = -D = pb$$

$$Q_{z5} = 0$$

$$Q_{z6} = E + \frac{\sqrt{2}}{2} F = -pb$$

لا تتشكل في الجائز عزوم قتل M_x . للتمكن من اعطاء مخططات عزوم الانعطاف مسـوف
يلجأ لحساب الترتيب التالية :

$$M_{y1} = M_{y2} = M_{y3} = M_{y4} = 0$$

$$M_{y5} = \frac{p(2b)^2}{8} = \frac{pb^2}{2}$$

$$M_{y6} = 0$$

: و

$$M_{z1} = 0 ; M_{z2} = -a P_1 ; M_{z3} = -P_1 a$$

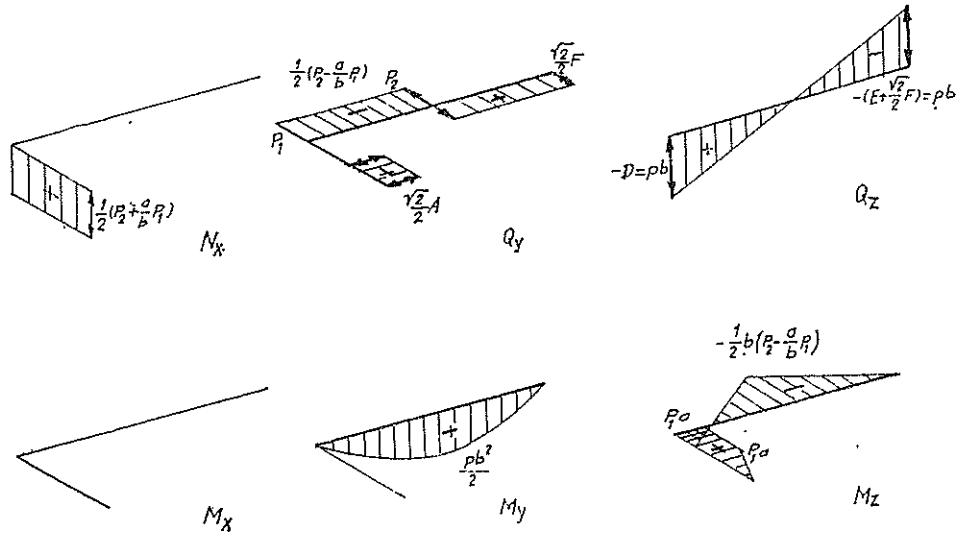
$$M_{z4} = -P_1 a ; M_{z5} = \frac{\sqrt{2}}{2} Fa = \frac{1}{2} b (P_2 - \frac{a}{b} P_1) ; M_{z6} = 0$$

وبذلك يستطاع تمثيل قيم القطع الستة (شكل 2-237) .

مثال 113 :

المعطى : l, P (شكل 2-238) .

المطلوب : إيجاد



شكل 2-237

١ - ردود افعال المساند .

٢ - قيم القطع مع الرسم .

الحل :

١ - ردود افعال المساند :

(تشير الاسهم المرسومة على المساند b , c ، في الشكل (2-238 a) ، الى الاتجاهات التي لا يمكن للمسندين حمل قوى باتجاهها) .

يعطي تطبيق شروط التوازن (شكل 2-238 b) مجموعة المعادلات التالية :

$$\sum_v 1_{xv} = 0 : A_x + B_x = 0$$

$$\sum_v P_{yv} = 0 : A_y = 0$$

$$\sum_v P_{zv} = 0 : A_z + B_z + C - P = 0$$

$$\sum_v M_{xb} = 0 : A_z 2b - P 2l = 0$$

$$\sum_v M_{yb} = 0 : Pl - C 2l = 0$$

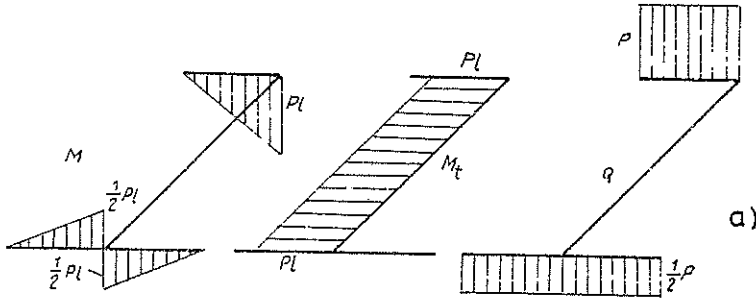
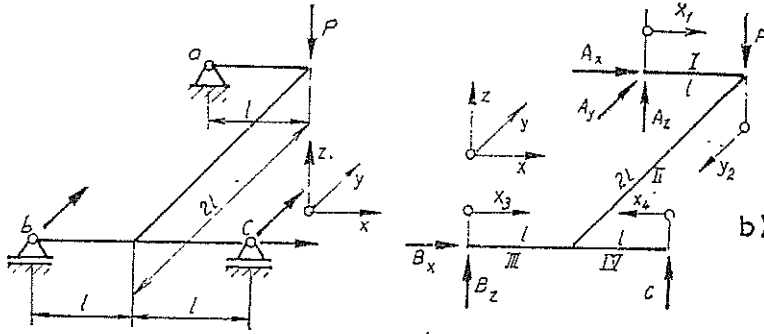
$$\sum_v M_{zb} = 0 : A_x 2l = 0$$

(حيث ان $\sum M_{xb} = 0$ هو شرط توازن العزوم بالنسبة لمحور يوازي المحور x ويمر من b) .
النتائج :

$$A_x = A_y = B_x = 0 ; A_z = P ; B_z = -\frac{1}{2}P ; C = \frac{1}{2}P$$

٢ - قيم القطع (ردود افعال القطع) (شكل c 2-238) :

في المعادلات سوف تعتبر A_x , A_y , B_x وكأنها غير موجودة (فلا داعي لكتابتها ما دامت معدومة القيمة) . ان اشارة الخط (-) تعني غير ممكن .



شكل 2-238

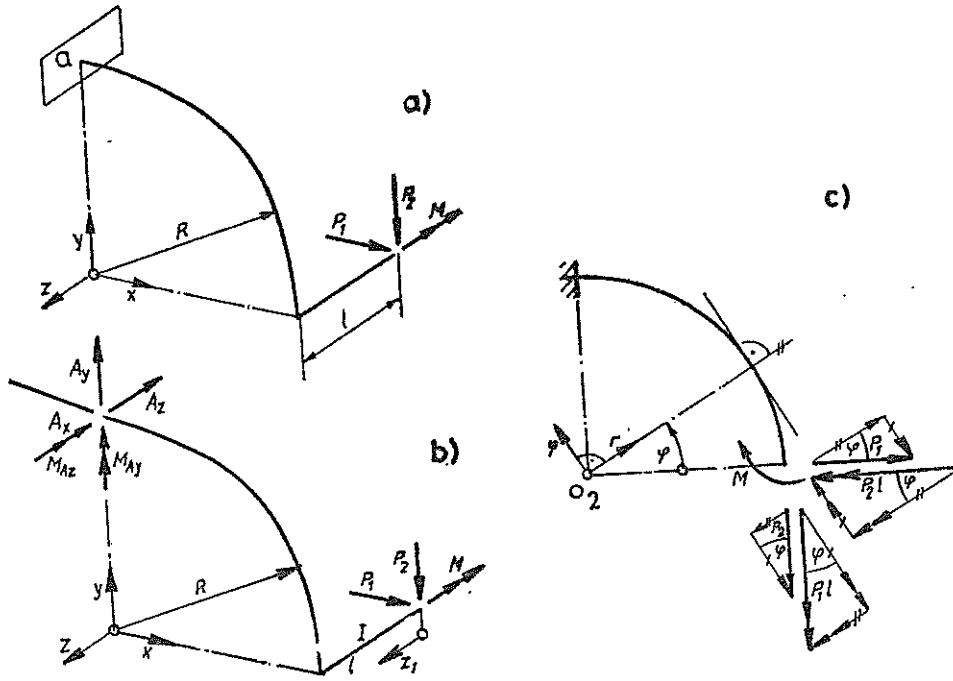
	M_x	M_y	M_z	Q_x	Q_y	Q_z	N_x	N_y	N_z
I	$M_t = 0$	$-A_z x_1$	0	-	0	$-A_z$	0	-	-
II	$(A_z - P)y_2$	$M_t = A_z l$	0	0	-	$A_z - P$	-	0	-
III	$M_t = 0$	$-B_z x_3$	0	.	0	$-B_x$	0	...	-
IV	$M_t = 0$	$-C x_4$	0	-	-	C	0	-	-

مثال 114 :

المعطى : R, l, M, P_2, P_1 (شكل a 2-239) .

المطلوب :

ايجاد قيم القطع (ردود افعال القطع) .



شكل 2-239

الحل :

بتطبيق شروط التوازن في الفراغ على الشكل (b 2-239) ينتج :

$$\sum_v P_{xv} = 0 : A_x + P_1 = 0$$

$$\sum_v P_{yv} = 0 : A_y - P_2 = 0$$

$$\sum_v P_{zv} = 0 : -A_z = 0$$

$$\sum_v M_{x_a} = 0 : M_{ax} - P_2 l = 0$$

$$\sum_v M_{y_a} = 0 : M_{ay} - P_1 l = 0$$

$$\sum_v M_{z_a} = 0 : -M_{ax} - M - P_2 R + P_1 R = 0$$

الناتج :

ردود افعال المساند :

$$A_x = -P_1 ; A_y = P_2 ; A_z = 0$$

$$M_{ax} = -P_1 l , M_{ay} = P_1 l ; M_{az} = (P_1 - P_2) R - M$$

ردود افعال القطع (قيم القطع) :

القطع I (شكل 2-239 b) :

$$M_{x_1} = P_2 z_1 ; M_{y_1} = P_1 z_1 ; M_{z_1} = M_1 = M$$

$$Q_{x_1} = -P_1 ; Q_{y_1} = P_2 ; N_{z_1} = 0$$

القطع II (شكل 2-239 c) :

سوف يرسم القطع المذكور في استوي x و y . ينبغي اعتبار ردود افعال القطع عند النقطة $z_1 = l$ من المجال I كقوى وعزوم خارجية تؤثر في النقطة $\varphi = 0$ من القطع II :

$$M_{z_{II}} = M - P_1 R \sin \varphi + P_2 R (1 - \cos \varphi)$$

$$M_{r_{II}} = P_1 l \sin \varphi + P_2 l \cos \varphi$$

$$M_{\varphi_{II}} = M_1 = P_1 l \cos \varphi - P_2 l \sin \varphi$$

$$Q_{z_{II}} = 0$$

$$Q_{r_{II}} = -P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi$$

$$N_{\varphi_{II}} = P_1 \sin \varphi + P_2 \cos \varphi$$

علم مقاومة المواد

مقدمة

ان هدف مقاومة المواد هو اعطاء الاسس اللازمة لتعيين ابعاد العناصر الانشائية الذي يسمى بتصميم العناصر الانشائية والذي ينبغي ان يتوفر فيه عاملان هما : الامان ضد الانكسار (الانهيار) والاقتصاد .

على العموم يتم تصميم العناصر الانشائية بحيث لا تتعدى الاجهادات الداخلية الاعظمية المتشكلة فيها قيمة الاجهاد المسموح للمادة (الاجهاد الذي يسمح للمادة بتحملة) وكذلك بحيث لا يتعدى تغير الشكل الاعظمي فيها قيمة معينة . بتحقيق هذين الشرطين يضمن عدم انهيار الانشاء كما تبعد تغيرات الشكل الكبيرة غير المسموحة . مما ذكر تملخص الوظائف الرئيسية لمقاومة المواد بما يلي :

١ - حساب الاجهادات الداخلية الاعظمية كتابع للحمولة .

٢ - حساب تغيرات الشكل كتابع للحمولة .

اما هذه الوظائف فيتم حلها بواسطة طرق معينة تتبع فيها الخطوات التالية :

١ - تعيين بواسطة قوانين علم مسكون الاجسام الصلبة ، العلاقة بين القوى الخارجية والاجهادات الداخلية .

٢ - تعيين بواسطة شروط التوافق التي يتم الحصول عليها من الشكل الهندسي للجسم ، العلاقة بين الانتقالات (Verschiebungen) والتشوهات (Verzerrungen) . (تتألف التشوهات من تمددات (Dehnungen وانزلاقات (Gleitungen) .

٣ - يتم الربط بين الاجهادات الداخلية والتشوهات بواسطة قانون المرونة (والذي يعتبر قانون هوك ابسطها) .

غالباً ما يقترن حل مشاكل مقاومة المواد بصعوبات رياضية ، قد تكون في كثير من الحالات غير قابلة للحل المباشر ، لذلك يلجأ لتسهيلها باستخدام بعض الفرضيات ، وبذلك يصبح الحل الذي يتم الحصول عليه حلاً تقريبياً . أما الفرضيات المتبعة فهي :

يتم تطبيق الخمولات (قوى وغزوم) على الجسم المحمل ببطيء ، ابتداء من الصفر وبالتدريج الى ان تصل الى القيمة النهائية (حملات ستاتيكية) .

اما مادة الجسم فيفترض فيها ان تكون متجانسة (Homogen) ومتماثلة المناحي (Isotrop).
التجانس (Homogenität): يقال عن الجسم أنه متجانس عندما لا تتغير ثوابت المادة المكونة
له بشكل مفاجيء (على شكل قفزة). فالتجانس هو ان يكون الجسم مكوناً في جميع
اجزائه من نفس المادة وب نفس الشروط او بتعبير آخر ان تكون كافة العناصر الحجمية المتواجدة
حول جميع نقاط الجسم مكونة من نفس المادة.

تماثل المناحي (Isotropie): يقال عن الجسم انه متماثل المناحي عندما تكون ثوابت المادة
المكونة له مستقلة عن الاتجاه (غير مرتبطة بالاتجاه). فالتماثل في المناحي يعني ان الجسم
يشير في جميع الاتجاهات لنفس الصفات.

في اغلب حالات تعيين الاجهادات يضطر اللجوء الى اعتبارات التغير (عدا الاجهادات في الجمل
المقررة ستاتيكيًا) مما يانزم ترك مفهوم الجسم الصلب (المفهوم المثالي للجسم الصلب). سوف
يفترض ان تغيرات الشكل (Deformation) صغيرة بالنسبة لابعادالعنصر الانشائي وبذلك يصبح
تطبيق شروطالتوازن على الجسم غير المتغير ممكناً (نظرية المرتبة الاولى، Theorie 1. Ordnung).
على العكس من ذلك ينبغي في مشاكل الاستقرار (stabilitätsprobleme) (التحنيب Knickung
والتسمن Beulen) تطبيق شروط التوازن على الجسم المتغير (نظرية المرتبة الثانية Theorie
2. Ordnung). بواسطة قوانين المادة (Stoffgesetze) (التي تسمى في نظرية المرونة بقوانين
المرونة Elastizitätsgesetze) يتم التوصل للعلاقة التي تربط بين الاجهادات والتغيرات الناتجة
عن التحميل. أما أبسط هذه القوانين فهو قانون هوك الذي يربط خطياً بين الاجهادات
والتغيرات وهو يمثل حجر الاساس في نظرية المرونة الرياضية وكذلك في مقاومة المواد
التقنية (الهندسية).

يمكن ان تظهر في الجسم الحمل علاوة على التغيرات المرنة (التي تزول كلياً بزوال المؤثر)
تغيرات لدنة (لا تزول بزوال المؤثر) تتطلب استخدام قانون آخر للمادة وبذلك يتم التحول من
نظرية المرونة الى نظرية اللدونة التي حصلت في الاونة الاخيرة على اهمية كبيرة.

سوف تتم ، في هذا الكتاب ، دراسة مقاومة المواد للأجسام القاسية القابلة للتغير
(deförmierbare, feste körper) الموجودة تحت تأثير القوى الفاعلة او التغيرات الحرارية ،
في حالة مسكون .

بسبب توازن القوى المؤثرة على الجسم المدروس فانها تتبع قواعد وقوانين علم السكون (Statik)
فأثناء تأسيس مقاومة المواد سوف يتم الاعتماد على كثير من نتائج علم السكون وعلاوة على ذلك

سوف يتم ادخال مفاهيم جديدة تساعد على وصف سلوك الجسم المقابل للتغير تحت تأثير القوى المؤثرة التي تطبق عليه ببطء وبالتدريج . فبشكل خاص سوف يتم ادخال مفهومين هامين هما حالة التشوه (Deformationszustand , Verzerrungszustand) وحالة الاجهاد (Spannungszustand) .

يتم تعيين حالة تشوه جسم من خلال التغيرات الطولية (Längenänderungen) التي تعانها المسافات التي تصل بين نقطتين من الجسم ومن خلال التغيرات الزاوية (Winkeländerungen) التي تعانها الزاوية المحصورة بين مسافتين متعامدتين من جسم قبل التغير . أما حالة اجهاد جسم فيتم تعيينها من خلال القوى السطحية الناعمة (المسماة بالاجهادات الناعمة) والقوى السطحية المماسية (المسماة بالاجهادات المماسية) التي تنتقل من سطح الضفة الواحدة الى سطح الضفة الاخرى من ضفاف القطع .

بواسطة الاجهادات المتشكلة في الجسم نتيجة للتحميل يتم تحديد اجهاد المادة (Beanspruchung des Werkstoffes) وهي المسئولة عن انهيار المادة .

تعتمد مقاومة المواد بشكل اساسي على نتائج التجارب التي يتم الحصول عليها مخبرياً كما وتعتمد على نظرية المرونة الرياضية . فالتجارب هي التي توضح سلوك المواد المختلفة اثناء التحميل وهي التي تعطي حيز الاساس للدراسة النظرية . كما وان التجارب هي التي تحدد صلاحية النتائج التي يتم الحصول عليها من النظريات المختلفة ، وهي التي تمكن من القيام ببعض التسهيلات في الدراسة النظرية التي تساعد على اعطاء الحل المناسب للمشاكل التي تعترض المهندس في حياته العملية .

في كل الاحوال يتم حل مشاكل مقاومة المواد بتعيين حالة الاجهاد وحالة التشوه للعناصر الانشائية المحملة . فحالة التشوه تعطي كل ما يطلب معرفته عن تغير الشكل أما حالة الاجهاد فتعطي كل ما يلزم معرفته عن اجهاد العنصر الانشائي .

بمقارنة حالة الاجهاد التي يتم الحصول عليها حسابياً مع قيم الاجهادات المسموحة التي يتم الحصول عليها تجريبياً يصبح بالامكان تصميم العناصر الانشائية .

الفصل الأول

عزوم الدرجة الثانية للسطوح

١ - ١ تعريف عزوم الدرجة الثانية للسطوح

اثناء دراسة نظرية انعطاف الجيزان سوف تظهر تكاملات سيطلق عليها اسم عزوم الدرجة الثانية للسطوح (او ايضاً عزوم عطالة السطوح) . لتسهيل فهم تلك النظرية (نظرية الانعطاف) يفضل مسبقاً دراسة صفات وخصائص تلك التكاملات .

١ - ١ - ١ عزوم العطالة المحورية

يدعى التكامل :

$$\int_F x^2 dF$$

بعزم العطالة المحوري (الخطي) للسطح F (او باختصار عزم عطالة السطح F) بالنسبة للمحور y ويرمز له اما بـ I_{yy} او I_y وهو يحتوي على جداء ناتج عن ضرب مساحة العنصر السطحي dF بمربع بعده (العمودي) عن المحور y ولظهور البعد العمودي عن y بشكل تربيعي في التكامل يطلق عليه ايضاً اسم عزم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة للمحور y وبذلك تكتب علاقته هكذا :

$$I_{yy} = \int_F x^2 dF \quad (1-1)$$

يشير الحرف F الموجود تحت رمز التكامل الى امتداد التكامل على مساحة المقطع العرضي الكلية. اما العلاقة السابقة فتعني ان كل عنصر سطحي dF من عناصر السطح F سوف يضرب بمربع بعده عن المحور y بعد ذلك تجمع كافة القيم الموجودة في المقطع العرضي F . بطريقة مشابهة يدعى التكامل :

$$\int_F y^2 dF$$

بعزم عطالة السطح F بالنسبة للمحور x (اوعزم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة للمحور x)
 اما علاقته فتكتب بالشكل التالي :

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF \quad (1.2)$$

بشير الحرف I الى عزم عطالة السطح F . اما الدليل (فيمكن ان يتألف من حرف واحد ،
 على سبيل المثال I_{xx} او من حرف متكرر على سبيل المثال I_{xxx} ، كلاهما يرمز لعزم العطالة
 بالنسبة للمحور x) فيشير الى المحور الذي تنسب العزوم له (هنا المحور x) .

ان اختيار تسمية هذه التكاملات بعزوم العطالة هو اختيار ليس في محله . وذلك لان عزوم
 الدرجة الثانية لا علاقة لها مطلقاً بالعطالة وقد اخذت التسمية من علم الديناميك وذلك لان
 عزوم عطالة الكتل:

$$\int_V r^2 dm \quad , \quad \int_V x y dm$$

التي تظهر هناك تتطابق مع عزوم الدرجة الثانية للسطح بالشكل الرياضي .

١ - ٢ - ١ جداء العطالة (عزم العطالة النابذ ، عزم العطالة الطارد المركزي) .
 يدعى التكامل :

$$\int_F xy dF$$

بجداء عطالة السطح F (او عزم العطالة النابذ او عزم العطالة المختلط) بالنسبة لنقطة تقاطع
 المحورين x , y (او بالنسبة للمحورين x , y) . يحتوي هذا التكامل على جداء ناتج عن
 ضرب مساحة العنصر السطحي بعدييه (العمودين) عن المحورين x , y (تقع المحاور x , y
 في مستوى السطح F) كما يعطيه ايضاً اسم عزم الدرجة الثانية المختلط للسطح F بالنسبة لنقطة
 تقاطع المحورين x , y ويرمز له كالتالي :

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_F xy dF = - I^{*}_{xy} \quad (1.3)$$

يشير الحرف I لجداء العطالة أيضاً ولكنه يذيل بحرفين (بدليين) مختلفين للدلالة الى محوري
 نسب العزم .

أثناء استخدام الكتابة التنسورية للعلاقات سوف يستخدم الرمز I^*_{xy} بدلاً عن I_{xy} لأنه يؤدي إلى بناء متناظر للعلاقات النهائية .

لاختزال علاقات عزوم الدرجة الثانية للسطوح I_{xx} , I_{yy} , I^*_{xy} يفضل استخدام الكتابة التنسورية ، يسمى الشكل التنسوري لتلك العلاقات بتنسور العطالة وهو يكتب كالتالي :

$$I_{kl} = - \int_F (k l - \delta_{kl} \cdot r^2) dF \quad (1-4)$$

حيث أن δ_{kl} هي دلتا كرونكر (أو رمز كرونكر) وهي تساوي :

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{عندما } k \neq l \\ 1 & \text{عندما } k = l \end{cases}$$

كما أن :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

(لقد نتجت الإشارة السالبة في تعريف I^*_{xy} من الكتابة التنسورية للعلاقات) .

١ - ١ - ٣ عزم العطالة القطبي

يسمى التكامل :

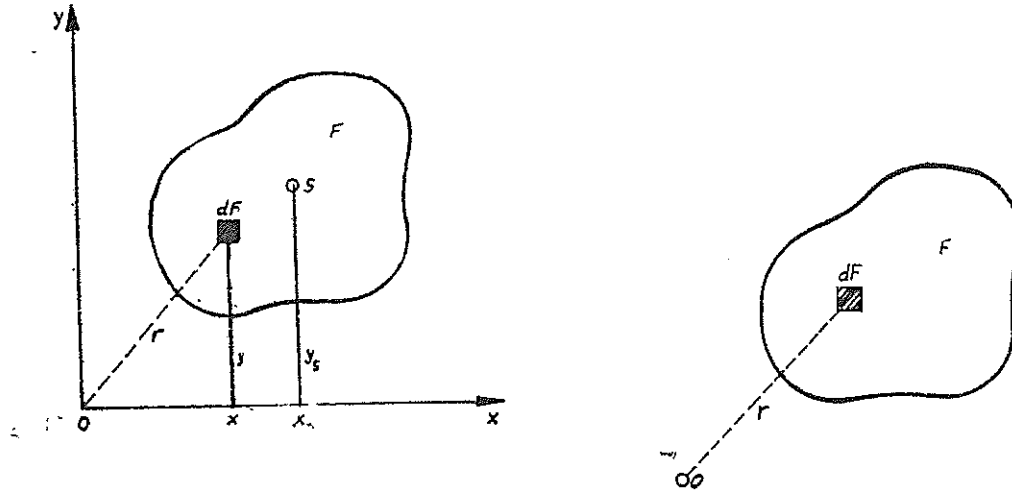
$$\int_F r^2 dF$$

بعزم العطالة القطبي وهو ينسب إلى خط ما عمودي على مستوى السطح F ويعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$I_p = \int_F r^2 dF \quad (1-5)$$

يشير الدليل p إلى أنه عزم عطالة قطبي وقد يستبدل الحرف p بحرف آخر يدل على المحور

الذي ينسب العزم اليه وهو يعبر عن نقطة تقاطع هذا المحور مع مستوى السطح F كأن يكتب I_0 وذلك باعتبار النقطة O هي تقاطع هذا المحور مع مستوى السطح أو I_n اذا سميت هذه النقطة n . أما الحرف r في العلاقة فيشير الى بعد العنصر السطحي عن مبدأ الاحداثيات الواقع في مستوى السطح F (مبدأ الاحداثيات يمثل نقطة تقاطع محور النسب مع مستوى السطح F).



شكل 1-1

باستخدام علاقة فيثاغورث وبالنظر الى الشكل (1-1) يمكن كتابة العلاقة التالية :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

بالتعويض في العلاقة (1-5) يتم الحصول على العلاقة ، التي تربط بين عزوم العطالة I_{xx} و

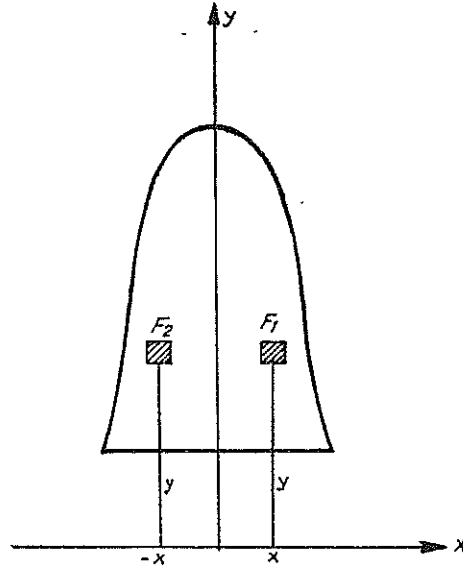
I_{yy} وعزم العطالة القطبي I_p ، التالية :

$$I_p = \int_F r^2 dF = \int_F (y^2 + x^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = I_{xx} + I_{yy} \quad (1-6)$$

١ - ١ - ٤ ملاحظات

ان واحدة عزوم الدرجة الثانية للسطوح هي واحدة الطول من الدرجة الرابعة فباستعمال الـ cm واحدة للطول-مثلا تكون cm^4 هي واحدة عزوم الدرجة الثانية للسطوح .

ان عزوم العطالة I_{xx} , I_{yy} , I_p هي دائماً موجبة وذلك لان بعدا العنصر عن محور النسب يظهر في العلاقة بشكل تربيعي كما انها لا يمكن ان تأخذ قيمة الصفر ابدأ ، اما جداء العطالة فحسبها يكون مكان مجموعة المحاور الاحداثية يكون موجباً او سالباً وقد يأخذ قيمة الصفر ايضاً وذلك لتبديل الاحداثيات y, x الموجودة في التكامل باشارتها . ينعدم جداء عطالة سطح بالنسبة لمحاور التناظر (احد المحاور او كلاهما محور تناظر للسطح) وذلك لان كل حد موجب $xydF$ يقابله حد سالب مساو له $-xydF$ (خواص التناظر) (شكل 1-2) (ينعدم جداء عطالة سطح عندما يكون احد محاور النسب او كلاهما محور تناظر للسطح) .



شكل 1-2

الخلاصة : مما ذكر يستخلص ما يلي :

إن عزوم الدرجة الثانية للسطوح هي مقادير هندسية تتعلق من شكل وكبر سطح المقطع العرضي وكذلك من مكان مجموعة المحاور الاحداثية فقط ، وهي مقادير حسابية تظهر اثناء استخراج معادلات الانعطاف .

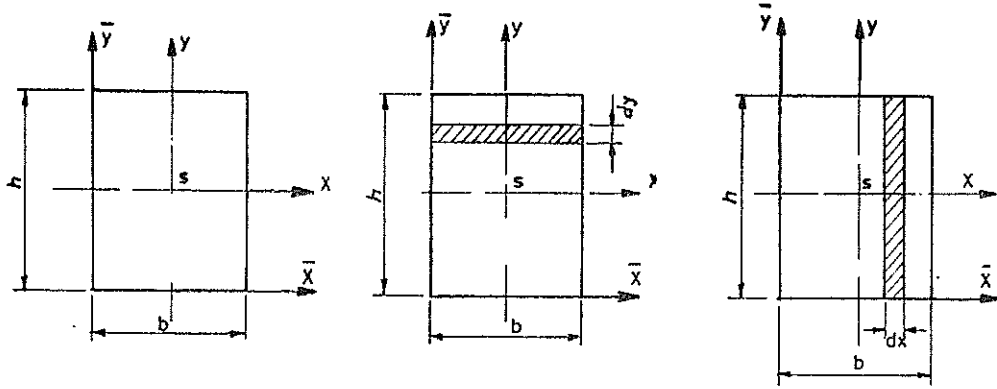
١ - ١ - ٥ امثلة تطبيقية

مثال 1 :

المعطى : ابعاد المستطيل b , h الممثل في الشكل (1-3) .

المطلوب : إيجاد عزوم العطالة التالية :

$$I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} , \bar{I}_{xx} , \bar{I}_{yy}$$



شكل 1-3

الحل:

لحساب عزوم الدرجة الثانية لسطح بالنسبة لمحور ما هناك امكانيتان ، الاولى وهي تقسيم السطح بجوازة ذلك المحور الى شرائح رقيقة والثانية وهي ان يقطع من السطح عنصر تفاضلي صغير .
 آ - الامكانية الاولى : تقسيم السطح بجوازة ذلك المحور الى شرائح رقيقة . وتفضل عندما تكون علاقة ايجاد مساحة الشرائح معلومة .

حساب I_{xx} :

كعنصر سطحي dF يفضل اختيار السطح المهرس (التريجة السطحية المهرسة) الممثل في الشكل (1-3 b) . أي لحساب I_{xx} يقسم المستطيل بجوازة المحور x الى شرائح رقيقة سماكتها dy وطولها $b = \text{const}$ (شكل 1-3 b) .

مساحة التريجة السطحية :

$$dF = b dy$$

حدود التكامل : من $y = + h/2$ حتى $y = - h/2$.

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \frac{b h^3}{12}$$

حساب I_{yy} :

لحساب I_{yy} يقسم المستطيل بجوازة المحور y الى شرائح رقيقة سماكتها dx وطولها $h = \text{const}$ (شكل 1-3 c) .

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = h dx$$

حدود التكامل : من $x = -b/2$ حتى $x = +b/2$.

$$I_{yy} = \int_F x^2 dF = \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12}$$

حساب I_{xy} :

$$I_{xy} = 0 \quad (x, y \text{ محاور تناظر})$$

تمثل هذه النتائج عزوم الدرجة الثانية للمستطيل بالنسبة لمحاوره المركزية x, y التي توازي اضلاعه وتكتب مجتمعة كما يلي :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} ; \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12} ; \quad I_{xy} = 0 \quad (1-7)$$

من هذه النتائج يتم الحصول على عزوم الدرجة الثانية لمربع طول ضلعه a بالنسبة لمحاوره المركزية التي توازي اضلاعه وذلك باعتباره كحالة خاصة للمستطيل . فبتبديل $b=h=a$ فإن العلاقات السابقة تعطي النتائج التالية :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{a^4}{12} \quad (1-8)$$

فيما بعد سوف يبرهن ان هذه العلاقة تصلح لأي محور مركزي من محاور المربع . والان سوف يتم ايجاد عزوم عطالة المستطيل الممثل في الشكل (1-3) بالنسبة للمحاور \bar{x} و \bar{y} . ان تقسيم المستطيل الى شرائح هو نفسه الذي تم اثناء الحصول على عزوم الدرجة الثانية I_{xx} و I_{yy} .

حساب $I_{\bar{x}\bar{x}}$:

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = b d\bar{y}$$

حدود التكامل : من $\bar{y} = 0$ حتى $\bar{y} = +h$.

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \int_0^h \bar{y}^2 b d\bar{y} = \frac{bh^3}{8}$$

حساب $I_{\bar{y}\bar{y}}$:

مساحة الشريحة السطحية :

$$dF = b d\bar{x}$$

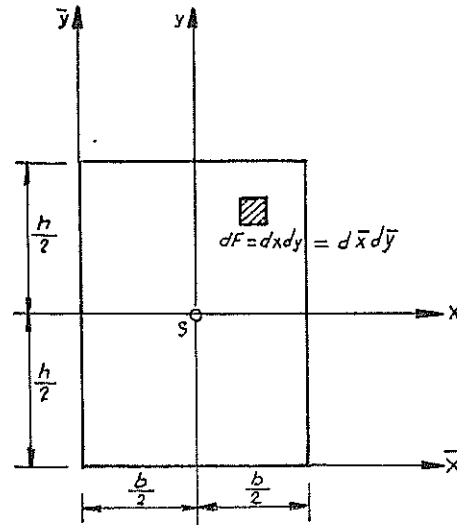
حدود التكامل : $\bar{x} = 0$ حتى $\bar{x} = +b$.

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF = \int_0^{+b} \bar{x}^2 h d\bar{x} = \frac{hb^3}{3}$$

فيما بعد سوف يتم أيضاً حساب $I_{\bar{x}\bar{x}}$ و $I_{\bar{y}\bar{y}}$ باستخدام قواعد أخرى كما هو الحال في الحياة العملية وذلك بالاستفادة من القيم I_{xx} و I_{yy} المعلومة .

ب - الامكانية الثانية : باقتطاع عنصر تفاضلي من السطح (شكل 1-4) .
مساحة العنصر السطحي :

$$dF = dx dy = d\bar{x} d\bar{y}$$



شكل 1-4

عزوم الدرجة الثانية :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \int_0^b d\bar{x} \int_0^h \bar{y}^2 d\bar{y} = \bar{x} \Big|_0^b \cdot \frac{\bar{y}^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF = \int_0^b \bar{x}^2 d\bar{x} \int_0^h d\bar{y} = \frac{\bar{x}^3}{3} \Big|_0^b \cdot \bar{y} \Big|_0^h = \frac{b^3h}{3}$$

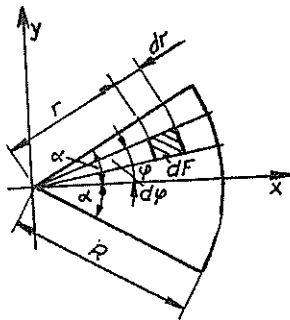
$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\bar{y} dF = \int_0^b \bar{x} d\bar{x} \int_0^h \bar{y} d\bar{y} = \frac{\bar{x}^2}{2} \Big|_0^b \cdot \frac{\bar{y}^2}{2} \Big|_0^h = \frac{b^2h^2}{4}$$

مثال 2 :

مقطع عرضي بشكل قطاع دائري (Kreissektor) (شكل 1-5) .

المعطى : نصف قطر دائرة القطاع R وزاوية فتحة القطاع 2α ، مع العلم بأن القطاع متناظر بالنسبة للمحور x .

المطلوب : إيجاد عزوم الدرجة الثانية (I_{xx} , I_{yy} , I_{xy}) للسطح F .



شكل 1-5

الحل :

يفضل في هذه الحالة الانطلاق من المحاور القطبية .

العلاقات الهندسية التي تربط بين المحاور x , y والمحاور القطبية r , φ هي :

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$dF = r dr d\varphi$$

بواسطة هذه العلاقات يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_F y^2 dF = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha} r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi = \\ &= \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} \int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{R^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha) \end{aligned} \quad (1-8)$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \int_F x^2 dF = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \\ &= \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} \int_{\varphi=-\alpha}^{+\alpha} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{R^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

$$I_{xy} = 0 \quad (\text{المحور } x \text{ محور تناظر})$$

حالة خاصة ($\alpha = \pi$) :

مقطع عرضي دائري الشكل ($\alpha = \pi$) .

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{R^4 \pi}{4} \quad (1-9)$$

مثال 3 :

مقطع عرضي دائري الشكل (شكل 1-6) .

المعطى : نصف قطر الدائرة R (قطرها D) .

المطلوب : إيجاد عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_p للمساحة F .

الحل :

لايجاد القيم المطلوبة يتبين انه من الافضل الابتداء بحساب عزم العطالة القطبي I_p ، والقيام بذلك تستخدم العلاقة (1-5) حيث ان :

$$I_p = \int_F r^2 dF$$

كعنصر سطحي dF تختار حلقة دائرية رقيقة مساحتها dr ونصف قطرها r .

بما ان الحلقة رقيقة قدر الامكان (لا نهائية) فان سطحها يمكن ان يمثل بمحيط الحلقة مضروباً بمساحتها ، اي ان :

$$dF = 2 \pi r \cdot dr$$

حيث ان $2\pi r$ هو محيط الحلقة الدائرية (محيط الخط الاوسط) . بتعويض مساحة الشريحة في علاقة عزم العطالة القطبي (العلاقة 1-5) ، وبمراعاة حدود التكامل التي تبدأ من $r=0$ وتنتهي عند $r=R$ ، ينتج :

$$I_p = 2 \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (1-10)$$

حسب العلاقة (1-6) يمكن الكتابة :

$$I_p = I_{xx} + I_{yy}$$

وبسبب التناظر يرى ان :

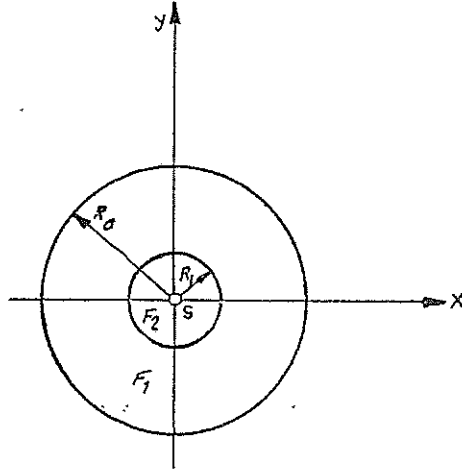
$$I_{xx} = I_{yy}$$

من العلاقتين الاخيرتين ينتج ما يلي :

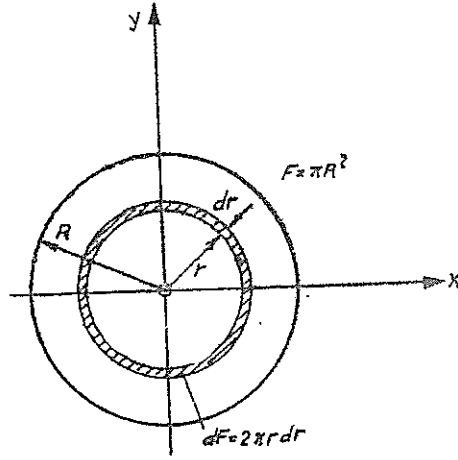
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_p$$

بتبديل قيمة عزم العطالة القطبي في العلاقة الاخيرة يتم الحصول على عزوم العطالة المحورية :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$



شكل 1-6



شكل 1-7

مثال 4 :

مقطع عرضي على شكل حلقة دائرية (شكل 1-7) .

المعطى : نصف قطر الحلقة الخارجي R_a ونصف قطر الحلقة الداخلي R_i .

المطلوب : إيجاد عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_p للسطح F .

الحل :

بالاستفادة من التناظر وادخاله في العلاقة (1-6) بعين الاعتبار ينتج :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_p$$

اما عزم العطالة القطبي I_p فيحسب كما في الدائرة باختلاف واحد هو ان حدود التكامل تبدأ هنا من R_i حتى R_a .

$$I_p = 2\pi \int_{R_i}^{R_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_a^4 - D_i^4)$$

حيث ان $D_a = 2 R_a$ وهو القطر الخارجي للحلقة كما ان $D_i = 2 R_i$ هو القطر الداخلي للحلقة . بعد الحصول على I_p يمكن الكتابة :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{64} (D_a^4 - D_i^4) \quad (1-11)$$

فما بعد سوف يتم الحصول على نفس النتيجة بطريقة أسهل وبلاستفادة من عزوم عطالة الدائرة .

١ - ٢ تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطوح

لقد تم في الفقرة السابقة إيجاد عزوم الدرجة الثانية لبعض السطوح بالنسبة لمحاور تنطبق على القاعدة وبالنسبة لمحاور مركزية توازيها باستخدام علاقات التكامل . ان معظم الحالات العملية تتطلب إيجاد عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمحاور مركزية ، لكن إيجادها في كثير من الأحيان بالنسبة لمحاور لا مركزية أسهل ، لذلك سيفتتح عن طريقة تساعد على تحويل العزوم النسوبة الى محاور لا مركزية الى عزوم منسوبة الى محاور مركزية . بشكل عام يصبح نص السؤال الذي سيتم الاجابة عليه ، كالتالي :

كيف يمكن تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطوح المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية x, y الى عزوم منسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية \bar{x}, \bar{y} .
ستتم الاجابة على هذا السؤال على مرحلتين :

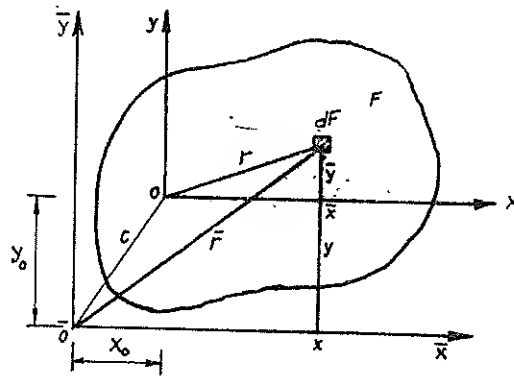
أ - المرحلة الاولى : اعطاء مجموعة المحاور x, y حركة انسحابية (مرة تنقل المحاور بشكل موازي للمحور \bar{x} ومرة اخرى تنقل بشكل موازي للمحور \bar{y}) الى ان ينطبق مركزاً مجموعتي المحاور الاحداثية $0, 0$ فوق بعضها ، بعد ذلك تحول عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لها .

ب - المرحلة الثانية : تدوير مجموعة المحاور x, y (حركة دورانية) الى ان تنطبق على مجموعة المحاور \bar{x}, \bar{y} ، بعد ذلك تحول عزوم الدرجة الثانية للسطوح التي تم الحصول عليها في المرحلة الاولى بالنسبة لها .

١ - ٢ - ١ عزوم الدرجة الثانية للسطوح في حالة انسحاب مجموعة الاحداثيات

سيتم في هذه الفقرة إيجاد علاقات تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x, y وبينها (وبين عزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F) بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية \bar{x}, \bar{y} التي توازي مجموعة المحاور الاحداثية x, y او بتعبير آخر ستتم دراسة التغير الذي يطرأ على عزوم الدرجة الثانية للسطح F عندما تتسحب محاور النسب (تنقل بشكل موازي) .

أ - مجموعتي المحاور الاحداثية x, y وكذلك \bar{x}, \bar{y} ليست محاور مركزية (شكل 1-8) .



شكل 1-8

عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x, y :

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF \quad , \quad I_{yy} = \int_F x^2 dF \quad , \quad I_{xy} = \int_F xy dF \quad (1-12)$$

$$I_p = \int_F r^2 dF$$

عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية \bar{x}, \bar{y} :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF \quad , \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF \quad , \quad I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x} \bar{y} dF \quad (1-13)$$

$$I_{\bar{p}} = \int_F \bar{r}^2 dF$$

من الشكل (1-8) يمكن الحصول على العلاقة التي تربط بين مجموعة الاحداثيات الاولى x, y وبين مجموعة الاحداثيات الثانية \bar{x}, \bar{y} والتي تكتب بالشكل التالي :

$$\bar{x} = x + \bar{x}_0 \quad ; \quad \bar{y} = y + \bar{y}_0 \quad (1-14)$$

$$\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad c^2 = \bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2$$

حيث أن \bar{x}_0 و \bar{y}_0 هي إحداثيات المركز 0 في مجموعة الإحداثيات \bar{x} , \bar{y} . بتبديل هذه العلاقات في العلاقة (1-13) يتم الحصول على النتائج التالية :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \int_F (y + \bar{y}_0)^2 dF = \int_F y^2 dF + \bar{y}_0^2 \int_F dF + 2\bar{y}_0 \int_F y dF$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF = \int_F (x + \bar{x}_0)^2 dF = \int_F x^2 dF + \bar{x}_0^2 \int_F dF + 2\bar{x}_0 \int_F x dF$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x}\bar{y} dF = \int_F (x + \bar{x}_0)(y + \bar{y}_0) dF = \int_F xy dF + \bar{x}_0 \bar{y}_0 \int_F dF + \bar{x}_0 \int_F y dF + \bar{y}_0 \int_F x dF$$

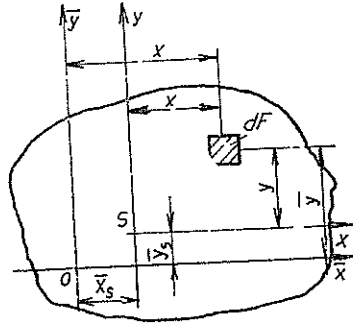
$$I_p = \int_F \bar{r}^2 dF = \int_F [(x + \bar{x}_0)^2 + (y + \bar{y}_0)^2] dF = \int_F r^2 dF + c^2 \int_F dF + 2\bar{x}_0 \int_F x dF + 2\bar{y}_0 \int_F y dF$$

بتبديل العلاقات (2-18 I) , (2-19 I) , (1-12) في المعادلات الأخيرة يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} I_{\bar{x}\bar{x}} &= I_{xx} + \bar{y}_0^2 F + 2\bar{y}_0 S_x \\ I_{\bar{y}\bar{y}} &= I_{yy} + \bar{x}_0^2 F + 2\bar{x}_0 S_y \\ I_{\bar{x}\bar{y}} &= I_{xy} + \bar{x}_0 \bar{y}_0 F + \bar{x}_0 S_x + \bar{y}_0 S_y \\ I_{\bar{p}} &= I_p + c^2 F + 2\bar{x}_0 S_y + 2\bar{y}_0 S_x \end{aligned} \quad (1-15)$$

هذه العلاقات تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لاية مجموعتين من المحاور الاحداثية المتوازية .

ب - مجموعة المحاور الاحداثية x, y هي مجموعة مركزية (شكل 1-9)



شكل 1-9

إذا كانت إحدى مجموعتي المحاور الاحداثية مركزية ولتكن هنا مجموعة المحاور x, y عندئذ تنعدم العزوم الستاتيكية للسطح F بالنسبة لها ، أي ان $S_x = 0, S_y = 0$.

وبالاستعاضة في هذه الحالة الخاصة عن $\bar{x}_0 = \bar{x}_s$ و $\bar{y}_0 = \bar{y}_s$ فان العلاقات (1-15) تصبح بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} I_{\bar{x}\bar{x}} &= I_{xx} + \bar{y}_s^2 F \\ I_{\bar{y}\bar{y}} &= I_{yy} + \bar{x}_s^2 F \\ I_{\bar{x}\bar{y}} &= I_{xy} + \bar{x}_s \bar{y}_s F \\ I_{\bar{p}} &= I_p + c^2 F \end{aligned} \quad (1-16)$$

وبهذا يكون قد تم الحصول على العلاقات التي تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمحاور مركزية وبينها بالنسبة لمحاور لامركزية توازيها وتسمى هذه العلاقات بعلاقة شتاينر (STEINER) وهناك بعض المراجع تسميها بعلاقات هيوجنز (HUYGENS) . يعبر بالكلام عن علاقة شتاينر من أجل عزوم العطالة (العلاقة a,b 1-16) بالشكل التالي :

عزم عطالة السطح F بالنسبة لمحور ما يساوي الى عزم عطالة ذلك السطح بالنسبة

لمحور مركزي يوازي محور النسب مضافاً إليه الجداء الناتج عن ضرب مساحة السطح بمربع البعد (العمودي) بين المحورين .

ويعبر بالكلام عن علاقة شتاينر من أجل جداء العطالة (العلاقة c 1-16) بالشكل التالي :

جداء عطالة السطح F بالنسبة لمجموعة محاور ما يساوي إلى جداء عطالة ذلك السطح بالنسبة لمجموعة محاور مركزية توازي مجموعة محاور النسب مضافاً إليه الجداء الناتج عن ضرب مساحة السطح بالبعدين (العموديين) بين المحاور الاحداثية .

تستخدم علاقة شتاينر لحساب عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمحاور لا مركزية بالاستعانة بعزوم السطوح بالنسبة لمحاور مركزية توازيها أو بالعكس .

هناك جداول عديدة تحتوي على عزوم الدرجة الثانية لكثير من المقاطع العرضية الهامة هندسياً (أمثال : المستطيل ، الدائرة ، المثلث ، البروفيلات والخ) بالنسبة لمحاور مركزية ، لذلك يفضل في حالة الاحتياج لعزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمحاور ما ؛ الاستفادة منها بتطبيق علاقة شتاينر والاستغناء عن استخدام العلاقات التكاملية إلا عند الحالة الملحة .

١ - ٢ - ٢ عزوم الدرجة الثانية للسطوح المركبة

يتم حساب عزوم الدرجة الثانية للسطوح المركبة على العموم ، بتقسيم السطح الكلي F إلى مجموعة سطوح جزئية بسيطة هندسياً F_v وذلك بحيث يمكن كتابة العلاقة التالية (شكل 1-10) :

$$F = \int_{F_1} dF + \int_{F_2} dF + \dots + \int_{F_n} dF = \sum_{v=1}^n F_v$$

بالاستفادة بعزوم الدرجة الثانية للسطوح الجزئية F_v المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية x, y :

$$\begin{aligned}
I_{xxv} &= \int_{F_v} y^2 dF \\
I_{yyv} &= \int_{F_v} x^2 dF \\
I_{xylv} &= \int_{F_v} xy dF \\
I_{pv} &= \int_{F_v} r^2 dF
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} I_{xxv} \\ I_{yyv} \\ I_{xylv} \\ I_{pv} \end{aligned}} \right\} v = 1, 2, \dots, n$$

يتم الحصول على عزوم الدرجة الثانية للسطح المركب F (السطح الكلي) :

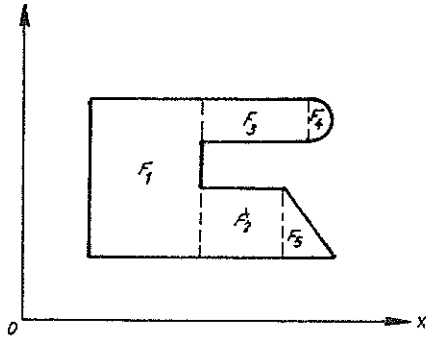
$$I_{xx} = \int_F y^2 dF = \int_{F_1} y^2 dF + \dots + \int_{F_n} y^2 dF = \sum_{v=1}^n I_{xxv}$$

$$I_{yy} = \int_F x^2 dF = \int_{F_1} x^2 dF + \dots + \int_{F_n} x^2 dF = \sum_{v=1}^n I_{yyv}$$

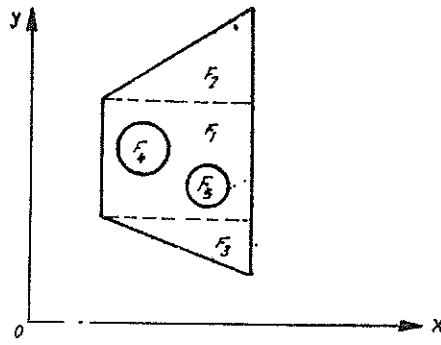
(1-17)

$$I_{xy} = \int_F xy dF = \int_{F_1} xy dF + \dots + \int_{F_n} xy dF = \sum_{v=1}^n I_{xylv}$$

$$I_p = \int_F r^2 dF = \int_{F_1} r^2 dF + \dots + \int_{F_n} r^2 dF = \sum_{v=1}^n I_{pv}$$



شكل 1-10



شكل 1-11

اما هذه النتيجة فتشير الى ان عزوم الدرجة الثانية للسطح المركب (السطح الكلي) F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x, y يساوي مجموع عزوم الدرجة الثانية للسطوح الجزئية F_v (المشكلة للسطح F) بالنسبة لنفس مجموعة المحاور الاحداثية x, y . اما اذا احتوى السطح المركب على بعض الفجوات (او الثقوب) كما يشير الشكل (1-11) وبحيث يمكن تمثيل السطح كالتالي :

$$F = F_1 + F_2 + F_3 - F_4 - F_5$$

عندئذ ينبغي ارفاق عزوم الدرجة الثانية للفجوات (مسطوح الثقوب) باشارة سالبة بحيث تصبح العلاقة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx1} + I_{xx2} + I_{xx3} - I_{xx4} - I_{xx5} \\ I_{yy} &= I_{yy1} + I_{yy2} + I_{yy3} - I_{yy4} - I_{yy5} \\ I_{xy} &= I_{xy1} + I_{xy2} + I_{xy3} - I_{xy4} - I_{xy5} \\ I_p &= I_{p1} + I_{p2} + I_{p3} - I_{p4} - I_{p5} \end{aligned} \quad (1-18)$$

هنا ايضاً يجب الانتباه الى ان كافة عزوم الدرجة الثانية منسوبة الى نفس مجموعة المحاور الاحداثية x, y .

١ - ٢ - ٣ أمثلة

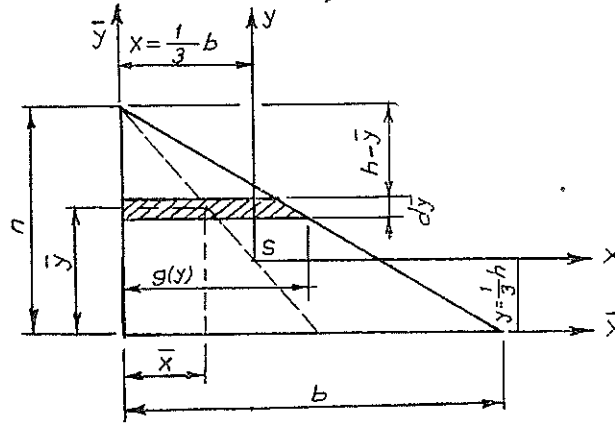
مثال 5 :

مقطع عرضي بشكل مثلث قائم الزاوية (شكل 1-12) .

المعطى : أبعاد المثلث b, h .

المطلوب :

- ١ - حساب جداء المغطاة $I_{x\bar{y}}, I_{\bar{x}y}$.
- ٢ - حساب $I_{\bar{x}\bar{y}}, I_{\bar{y}\bar{y}}, I_{\bar{x}\bar{x}}$ باقتطاع عنصر تفاضلي .
- ٣ - حساب I_{xy}, I_{yy}, I_{xx} بالاعتماد على الطلب الثاني واستخدام علاقات شتاينر .



شكل 1-12

الحل :

- ١ - حساب جداء المغطاة $I_{x\bar{y}}$ و $I_{\bar{x}y}$.

لايجاد جداء المغطاة $I_{x\bar{y}}$ يقسم السطح بموازاة احد المحاور \bar{x} , \bar{y} (هنا يختار بموازاة المحور \bar{x}) الى شرائح رقيقة (قدر الامكان) .

يمكن اعتبار كل شريحة مستطيلا (هنا عرضه $g(\bar{y})$ وسماكته $d\bar{y}$) مساحته :

$$dE = g(\bar{y}) d\bar{y}$$

في هذه العلاقة يرى ان طول الشريحة $g(\bar{y})$ ليس ثابتا بل هو تابع للاحداثي \bar{y} . من تشابه المثلثات يمكن حساب $g(\bar{y})$:

$$\frac{g(\bar{y})}{b} = \frac{h - \bar{y}}{h} \quad : \quad g(\bar{y}) = \frac{h - \bar{y}}{h} b$$

حدود التكامل: من $\bar{y} = 0$ حتى $\bar{x} = h$.

كما وان :

$$\bar{x} = \frac{1}{2} g(\bar{y})$$

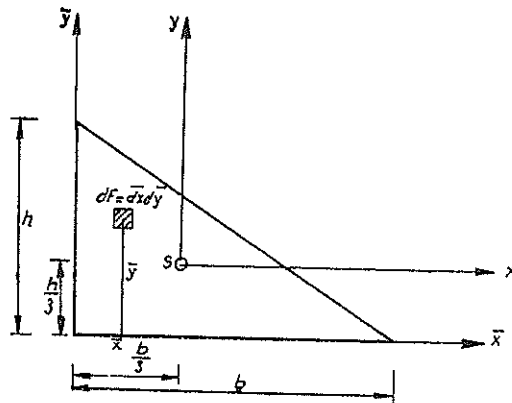
بالتبديل في علاقة إيجاد جداء العطالة ينتج :

$$\begin{aligned} I_{\bar{x}\bar{y}} &= \int_F \bar{x} \bar{y} dF = \int_0^h \frac{1}{2} g(\bar{y}) \cdot \bar{y} \cdot g(\bar{y}) d\bar{y} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h - \bar{y})^2 \bar{y} d\bar{y} \\ &= \frac{b^2 h^2}{24} \end{aligned} \quad (1-19)$$

بتطبيق هذه النتيجة في علاقة شتاينر يمكن حساب جداء عطالة المثلث قائم الزاوية بالنسبة لاية مجموعة من المحاور توازي اضلاعه القائمة (قاعدته وارتفاعه) . وبذلك يمكن إيجاد I_{xy} بالنسبة للمحاور المركزية x, y :

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s \bar{y}_s F = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{1}{3} b \cdot \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} bh = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

٢ - حساب عزوم الدرجة الثانية $I_{\bar{x}\bar{x}}, I_{\bar{y}\bar{y}}, I_{\bar{x}\bar{y}}$ باقتطاع عنصر تفاضلي صغير من المثلث (شكل 1-12 b) .



شكل 1-12 b

مساحة العنصر التفاضلي :

$$dF = d\bar{x} d\bar{y}$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \int_F \bar{y}^2 dF = \int_0^b d\bar{x} \int_0^{h(1-\bar{x}/b)} \bar{y}^2 d\bar{y} = \int_0^b \left. \frac{\bar{y}^3}{3} \right|_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{x} =$$

$$= \frac{h^3}{3} \int_0^b \left(1 - \frac{\bar{x}}{b}\right)^2 d\bar{x} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{x}^2 dF = \int_0^b \bar{x}^2 dx \int_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{y} = \int_0^b \bar{x}^2 \cdot \bar{y} \Big|_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{x} =$$

$$= h \int_0^b \bar{x}^2 \left(1 - \frac{\bar{x}}{b}\right) d\bar{x} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x} \bar{y} dF = \int_0^b \bar{x} d\bar{x} \int_0^{h(1-\bar{x}/b)} \bar{y} d\bar{y} = \int_0^b \bar{x} \left. \frac{\bar{y}^2}{2} \right|_0^{h(1-\bar{x}/b)} d\bar{x} =$$

$$= \frac{h^2}{2} \int_0^b \left(1 - \frac{\bar{x}}{b}\right)^2 d\bar{x} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

٣ - حساب عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} بالاستعانة بنتائج الطلب الثاني واستخدام علاقات شتاينر .

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{hh}{2} = \frac{b^3 h}{36}$$

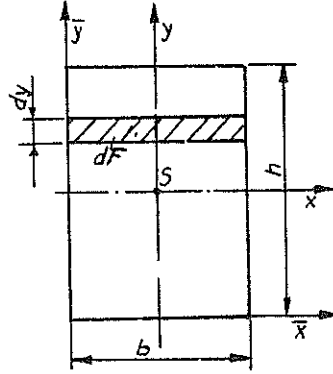
$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b}{3} \frac{h}{3} \frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

مثال 6 :

مقطع عرضي مستطيل الشكل (شكل 1-13) .

المعطى : h, b ، $I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$ و $I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$ ، $I_{xy} = 0$.

المطلوب : إيجاد $I_{\bar{x}\bar{y}}$ ، $I_{\bar{y}\bar{y}}$ ، $I_{\bar{x}\bar{x}}$.



شكل 1-13

الحل :

ان احداثيات مركز الثقل s بالنسبة لمجموعة المحاور \bar{x} ، \bar{y} هي :

$$\bar{x}_s = \frac{b}{2} , \quad \bar{y}_s = \frac{h}{2}$$

باستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_s^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_s^2 F = \frac{hb^3}{12} + \frac{b^2}{4} bh = \frac{hb^3}{3} \quad (1-19)$$

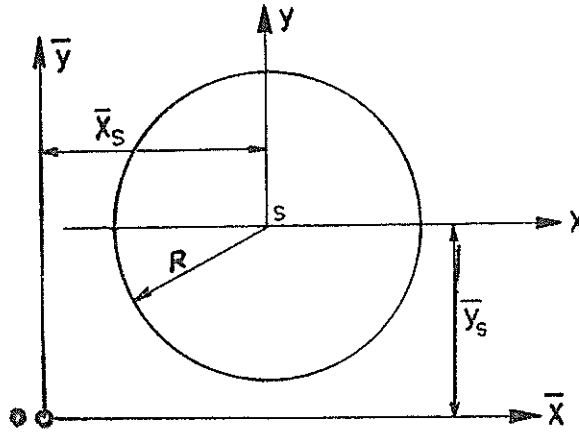
$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} + \bar{x}_s \bar{y}_s F = 0 + \frac{b}{2} \frac{h}{2} bh = \frac{b^2 h^2}{4}$$

مثال 7 :

مقطع عرضي دائري الشكل (شكل 1-14) .

المعطى : R ، $I_{xx} = I_{yy} = \frac{R^4 \pi}{4}$ ، $I_{xy} = 0$ ، \bar{x}_s ، \bar{y}_s .

المطلوب : حساب $I_{\bar{x}\bar{y}}$ ، $I_{\bar{y}\bar{y}}$ ، $I_{\bar{x}\bar{x}}$.



شكل 1-14

الحل :

بأخذ معطيات المسألة في علاقة شتاينر بعين الاعتبار ينتج :

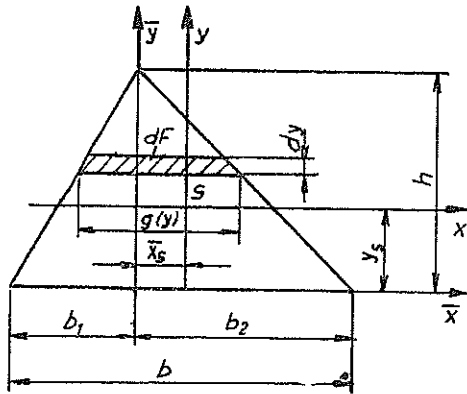
$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{xx} + \bar{y}_s^2 F = \frac{R^4 \pi}{4} + \bar{y}_s^2 R^2 \pi$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} + \bar{x}_s^2 F = \frac{R^4 \pi}{4} + \bar{x}_s^2 R^2 \pi$$

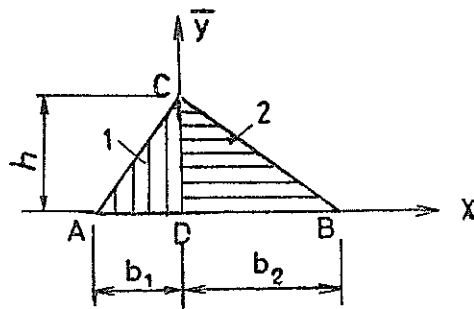
$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{xy} + \bar{x}_s \bar{y}_s F = 0 + \bar{x}_s \bar{y}_s R^2 \pi$$

مثال 8 :

مقطع عرضي مثالي الشكل (شكل 1-15) .



شكل 1-15



شكل 1-16

المعطى : ابعاد المثلث b , b_1 , b_2 , h .

المطلوب : حساب عزوم العطالة التالية :

$$I_{xy}, I_{yy}, I_{yy}, I_{xx}, I_{xx}$$

الحل :

مساحة الشريحة :

$$dF = g(y) \cdot dy$$

حيث ان g هو تابع للمحور y ويحسب من علاقة التناسب :

$$\frac{g(y)}{b} = \frac{h - (y + \bar{y}_s)}{h} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{h}$$

ابعاد مركز الثقل :

$$\bar{x}_s = \frac{b_2 - b_1}{3}, \quad \bar{y}_s = \frac{h}{3}$$

لحساب I_{xx} ينطلق من المعادلة الاصلية، وبذلك ينتج :

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF = \int_{y=-h/3}^{+2h/3} y^2 g(y) dy = \frac{b}{h} \int_{y=-h/3}^{+2h/3} \left(\frac{2}{3}hy^2 - y^3 \right) dy = \frac{bh^3}{36} \quad (1-20)$$

: بتطبيق قاعدة شتاينر يمكن الحصول على I_{xx} :

$$I_{xx} = I_{xx} + \bar{y}_s^2 F = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} \quad (1-21)$$

لحساب عزوم العطالة I_{yy} يجرى المثلث الاصلى الى مثلثين جزئيين يشتركان مع بعض في القاعدة $CD=h$. اما الارتفاعات فهي $AD=b_1$ و $DB=b_2$ (شكل 1-16) . يمكن الحصول على عزوم عطالة كلا المثلثين بالنسبة للمحور \bar{y} مباشرة وذلك باستخدام العلاقة (1-21) :

$$I_{yy_1} = \frac{hb_1^3}{12}, \quad I_{yy_2} = \frac{hb_2^3}{12}$$

اما عزم العطالة $I_{\bar{y}\bar{y}}$ فيمثل مجموع عزوم عطالة كلا المثلثين 1 , 2 :

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{y}_1} + I_{\bar{y}\bar{y}_2} = \frac{hb_1^3}{12} + \frac{hb_2^3}{12} = \frac{h}{12} (b_1^3 + b_2^3) \quad (1-22)$$

من هذه المعادلة وباستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$\begin{aligned} I_{y y} &= I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = \frac{h}{12} (b_1^3 + b_2^3) - \frac{(b_2 - b_1)^2}{9} \frac{b h}{2} \\ &= \frac{h b}{36} (b^2 - b_1 b_1) \end{aligned} \quad (1-23)$$

لحساب جداء العطالة يستخدم نفس التقسيم السابق مستعاناً بجداء عطالة المثلث قائم الزاوية الذي تم ايجاده في المثال 5 (شكل 1-12) وبذلك ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{x}\bar{y}_1} + I_{\bar{x}\bar{y}_2} = -\frac{b_1^2 h^2}{24} + \frac{b_2^2 h^2}{24} = \frac{h^2}{24} (b_2^2 - b_1^2)$$

(قيمة $I_{x y_1}$ سالبة لان احد الاضلاع بعكس اتجاه x) .

في حالة عدم الاستعانة بالنتيجة السابقة والرغبة في ايجاد $I_{\bar{x}\bar{y}}$ بطريقة التكامل ، يحتفظ بفكرة تقسيم المثلث الى مثلثين قائمين .

مساحة العنصر السطحي :

$$dF = d\bar{x} d\bar{y}$$

في حالة اللجوء الى التكامل الزوجين ينبغي اختيار متغير مستقل (unabhängige Variable) وآخر تابع له (abhängige Variable) ، وبذلك ينتج ، من اجل المثلث الايسر 1 (\bar{x} هي تابع المتغير) :

$$I_{\bar{x}\bar{y}_1} = \int_0^h \int_{\bar{x}_1}^0 \bar{x} \bar{y} d\bar{x} d\bar{y} = - \int_0^h \frac{\bar{x}_1^2}{2} \bar{y} d\bar{y}$$

بالاستعانة بعلاقة التشابه :

$$\frac{\bar{x}_1}{b_1} = \frac{h - \bar{y}}{h}$$

ينتج :

$$I_{\bar{x}y_1} = -\frac{b_1^2}{2} \int_0^h \left(1 - \frac{\bar{y}}{h}\right) \bar{y} d\bar{y} = -\frac{b_1^2 h^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{b_1^2 h^2}{24}$$

من اجل الثلث الاخير ينتج بطريقة مشابهة :

$$I_{\bar{x}y_2} = -\frac{b_2^2 h^2}{24}$$

بواسطتها يتم الحصول على جداء العطالة للمثلث الكلي :

$$I_{\bar{x}y} = \frac{h^2}{24} (b_2^2 - b_1^2) \quad (1-24)$$

للحصول على جداء العطالة I_{xy} تستخدم علاقة شتاينر :

$$I_{xy} = I_{\bar{x}y} - \bar{x}_s \bar{y}_s F = \frac{h^2}{24} (b_2^2 - b_1^2) - \frac{b_2 - b_1}{3} \frac{h}{3} \frac{(b_2 + b_1) h}{2}$$

$$= -\frac{h^2 (b_2^2 - b_1^2)}{72}$$

مثال 9 :

مقطع عرضي على شكل نصف دائرة (شكل 1-17) .

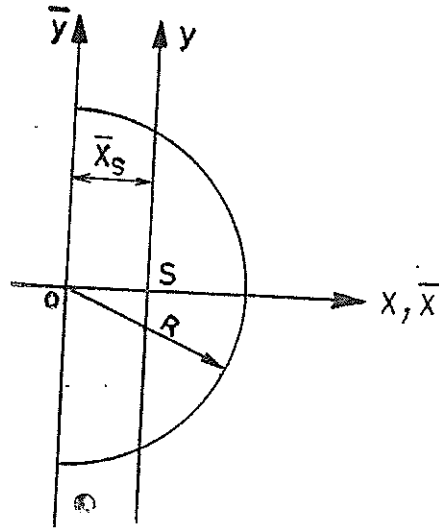
المعطى : نصف قطر الدائرة R وبعد مركز الثقل $\bar{x}_s = 4R/3\pi$ عن المحور \bar{y} .

المطلوب : ايجاد عزوم العطالة I_{yy} , I_{xx} .

الحل :

حسب قواعد حساب عزوم عطالة سطح مركب يرى ان I_{xx} تساوي نصف عزم عطالة الدائرة الكاملة بالنسبة للمحور x :

$$I_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8} \quad (1-25)$$



شكل 1.17

نفس الكلام السابق يصالح بالنسبة المحور \bar{y} وبذلك ينتج :

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8} \quad (1-26)$$

باستخدام علاقة شتاينر يتم الحصول على عزم العطالة I_{yy} :

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \quad (1-27)$$

مثال 10 :

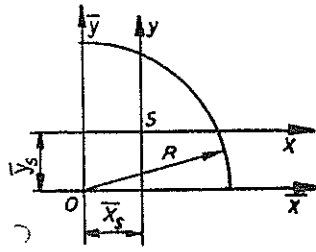
مقطع عرضي على شكل ربع دائرة (شكل 1-18) .

المعطى : نصف قطر الدائرة R وأبعاد مركز الثقل $\bar{x}_s = \bar{y}_s = \frac{4R}{3\pi}$ عن المحاور الاحداثية \bar{x}, \bar{y} .

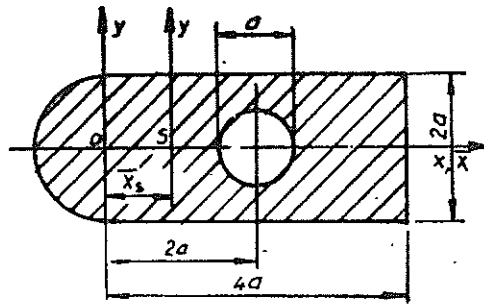
المطلوب : إيجاد جداءات العطالة $I_{xy}, I_{\bar{x}\bar{y}}$.

الحل :

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \int_F \bar{x} \bar{y} dF = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi = \frac{R^4}{8}$$



شكل 1-18



شكل 1-19

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s \bar{y}_s F = \frac{R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi R^2}{4} = \frac{9\pi - 32}{72\pi} R^4$$

مثال 11 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-19) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي .

المطلوب : حساب I_{xy} , I_{yy} , I_{xx} , $I_{\bar{x}\bar{y}}$, $I_{\bar{y}\bar{y}}$, $I_{\bar{x}\bar{x}}$

الحل :

إذا تألف المقطع العرضي المركب من مجموعة سطوح بسيطة عزوم عطالتها معلومة ، بذلك يحسب عزم العطالة الكلي بالنسبة لمحور ما بأنه مجموع عزوم عطالة السطوح الجزئية البسيطة بالنسبة لذلك المحور . تعتبر الثقوب والفجوات سطوحاً سالبة .

ان احداثيات مركز ثقل المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-19) هي :

$$\begin{aligned} \bar{x}_s &= \frac{1}{F} \sum \bar{x}_i F_i = \frac{\left(-\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\right) \frac{1}{2} \pi a^2 + 2a \cdot 4a \cdot 2a - 2a \frac{\pi a^2}{4}}{\frac{1}{2} \pi a^2 + 4a \cdot 2a - \frac{\pi a^2}{4}} \\ &= \frac{-8 + 192 - 6\pi}{96 + 3\pi} a = \frac{184 - 6\pi}{96 + 3\pi} a \\ &= 1,57 a \end{aligned}$$

$$\bar{y}_s = 0$$

بعد الحصول على هذه النتيجة ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \sum_i I_{\bar{x}\bar{x}i} = \frac{4a(2a)^3}{12} + \frac{\pi a^4}{8} - \frac{\pi a^4}{64} = \left(\frac{8}{3} + \frac{7\pi}{64}\right) a^4 = 3,01a^4$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \sum_i I_{\bar{y}\bar{y}i} = \left[\frac{2a \cdot (4a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot 4a \cdot 2a \right] + \frac{\pi a^4}{8} - \left[\frac{\pi (a/2)^4}{4} + (2a)^2 \frac{\pi a^2}{4} \right]$$

$$= \frac{2a(4a)^3}{3} + \frac{\pi a^4}{8} - \left(\frac{\pi a^4}{64} + 4a^2 \frac{\pi a^2}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{128}{3} - \frac{57\pi}{64} \right) a^4 = 39,87 a^4$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = 0 \quad (\text{بسبب التناظر})$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$F = 8a^2 + \frac{\pi a^2}{4} = \left(8 + \frac{\pi}{4}\right) a^2 = 8,785 a^2$$

يتم الحصول على عزوم العطالة المحورية :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_s^2 F = I_{\bar{x}\bar{x}}$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = 39,87 a^4 - 1,57^2 a^2 \cdot 8,785 a^2 = 18,27 a^4$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}_s \bar{y}_s F = 0$$

مثال 12 :

مقطع عرضي على شكل حلقة دائرية (شكل 1.20).

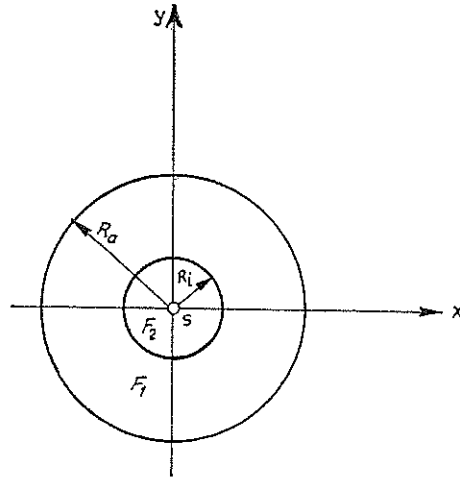
المعطى : نصف قطر الحلقة الخارجي R_a ونصف قطر الحلقة الداخلي R_i .

المطلوب : إيجاد عزوم العطالة I_p, I_{yy}, I_{xx} .

الحل :

لأسباب التناظر :

$$I_p = 2 I_{xx} = 2 I_{yy}$$



شكل 1-20

عزم عطالة الحلقة = عزم عطالة الدائرة الخارجية المليئة - عزم عطالة الدائرة الداخلية المليئة
(عزم عطالة الثقب) :

$$I_{xx} = I_{xx1} - I_{xx2} = \frac{\pi R_o^4}{4} - \frac{\pi R_i^4}{4} = \frac{\pi}{4} (R_o^4 - R_i^4) = I_{yy}$$

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = \frac{\pi R_o^4}{2} - \frac{\pi R_i^4}{2} = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4)$$

مثال 13 :

مقطع عرضي مسدسي الشكل (مضلع سداسي منتظم) (شكل 1.21) .

المعطى : طول ضلع المسدس a .

المطلوب : إيجاد عزم العطالة I_{xx} .

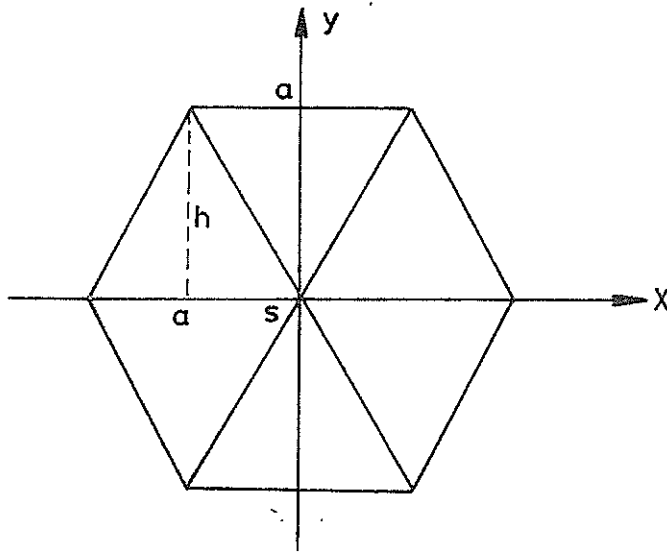
الحل :

بتقسيم المسدس الى ستة مثلثات ، أربعة منها تنطبق قاعدتها على المحور x ، ينتج :

$$I_{xx} = 4 \cdot \frac{a h^3}{12} + 2 \cdot \frac{a h^3}{4} = \frac{5}{6} a h^3$$

وبما أن :

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$



شكل 1-21

فان العلاقة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

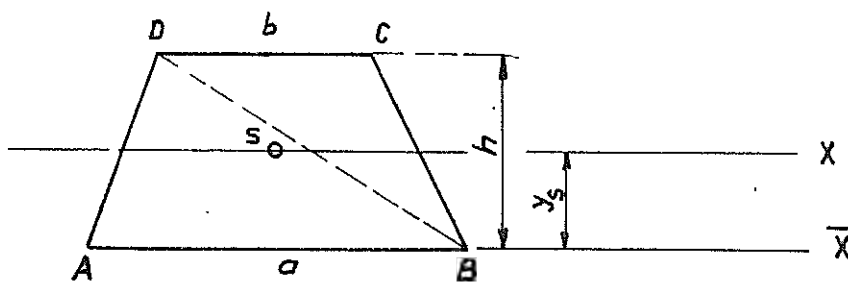
$$I_{xx} = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4$$

مثال 14 :

مقطع عرضي على شكل شبه منحرف (شكل 1.22) .

المعطى : الابعاد a, b, h .

المطلوب : حساب عزوم العطالة I_{xx} و I_{yy} .



شكل 1-22

الحل :

يقسم شبه المنحرف الى المثلثين ABD و BCD . بعد ذلك يحسب عزوم عطالة شبه المنحرف بالنسبة للمحور \bar{x} الذي ينطبق على قاعدة شبه المنحرف السفلية وهو يساوي مجموع عزوم عطالة المثلثين بالنسبة لنفس المحور . بالاستفادة من عزوم عطالة المثلث التي تم حسابها في المثال 8 (الشكل 1.15) ينتج :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{a h^3}{12} + \frac{b h^3}{4} = \frac{h^3}{12} (a+3b)$$

يرمز لبعده المحور \bar{x} عن المحور x بالحرف e أما قيمته فتحسب بطريقة إيجاد مراكز الثقل وهي تساوي :

$$e = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$$

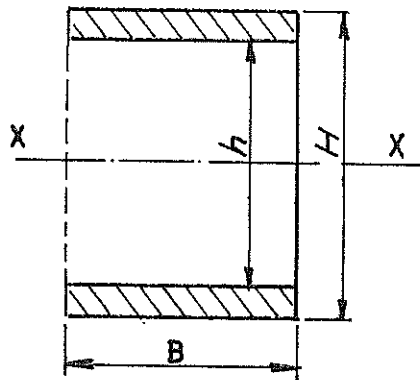
بامستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} + F y_s^2 = \frac{h^3}{12} (a + 3b) - \frac{h}{2} (a + b) \cdot \frac{h^2}{3} \frac{(a+2b)^2}{(a+b)^2}$$

$$I_{xx} = \frac{h^3}{36} \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}$$

مثال 15 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل (..23) .



شكل 1-25

المعطى : h, H, B .

المطلوب : حساب I_{xx} .

باعتبار أن السطح يتألف من مستطيل أبعاده H, B ويحتوي على فجوة أبعاده h و B فإن عزم عطالة الشكل الفعلي يساوي عزم عطالة المستطيل منقوصاً منه عزم عطالة الفجوة مستطيلة الشكل :

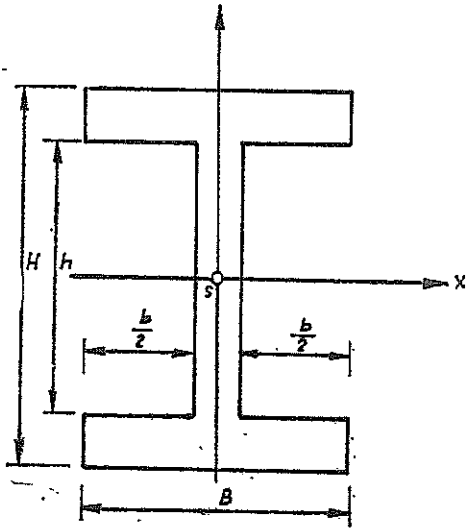
$$I_{xx} = \frac{B H^3}{12} - \frac{B h^3}{12} = \frac{B}{12} (H^3 - h^3)$$

مثال 16 :

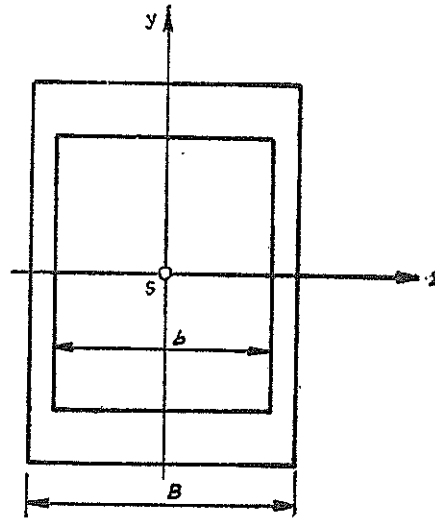
المقاطع العرضية الممثلة في الشكل (1.24) والشكل (1.25) .

المعطى : أبعاد المقاطع العرضية .

المطلوب : حساب عزوم الدرجة الثانية I_{yy}, I_{xx} لهذه السطوح (y, x هي محاور مركزية) .



شكل 1-24



شكل 1-25

الحل :

ان عزم عطالة السطح الممثل في الشكل (1.24) بالنسبة للمحور x هو :

$$I_{xx} = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12} = \frac{1}{12} (B H^3 - b h^3)$$

$$I_{xx} = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12} = \frac{1}{12} (B H^3 - b h^3)$$

اما عزم عطالته بالنسبة للمحور y فهو :

$$I_{yy} = \frac{(H-h) B^3}{12} + \frac{h (B-b)^3}{12} = \frac{1}{12} [(H-h) B^3 + h (B-b)^3]$$

كما ان عزم عطالة السطح الممثل في الشكل (1-25) بالنسبة للمحور x هو نفس عزم عطالة السطح الممثل في الشكل (1-24) . اما عزم عطالته بالنسبة للمحور y فهو :

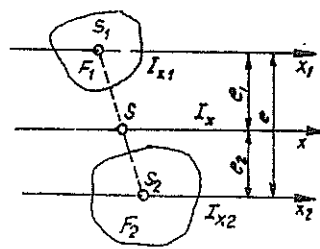
$$I_{yy} = \frac{H B^3}{12} - \frac{h b^3}{12} = \frac{1}{12} (H B^3 - h b^3)$$

مثال 17 :

مقطعان عرضيان كما يشير الشكل (1-26) .

المعطى : مساحة المقطع العرضي الاول F_1 وعزم عطالته بالنسبة للمحور المركزي الذاتي $I_{x_1 x_1}$ وكذلك مساحة المقطع العرضي الثاني F_2 وعزم عطالته بالنسبة للمحور المركزي الذاتي $I_{x_2 x_2}$ وكذلك البعد العمودي بين مركز ثقل السطح الاول عن مركز ثقل السطح الثاني e . المحاور x_1 , x_2 هي محاور متوازية .

المطلوب : ايجاد عزم عطالة كلا السطحين (باعتبارهما سطحاً مركباً واحداً) بالنسبة للمحور المركزي المشترك I_{xx} والذي يوازي كل من x_1 , x_2 .



شكل 1-26

الحل :

بدون معرفة مكان مركز الثقل المشترك s (شكل 1-26) يستطاع ايجاد القيمة المطلوبة :

$$I_{xx} = \sum_i I_{xxi} = I_{xx1} + I_{xx2}$$

ليفترض مبدئياً ان البعد العمودي بين المحورين x_1 , x والذي يرمز له بـ e_1 والبعد العمودي بين المحورين x_2 , x والذي يرمز له بـ e_2 هي قيم معلومة . لذلك يمكن بسهولة إيجاد عزيم العطالة I_{xx} باستخدام العلاقة الاخيرة والاستعانة بعلاقة شتاينز :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= (I_{x_1x_1} + e_1^2 F_1) + (I_{x_2x_2} + e_2^2 F_2) \\ &= I_{x_1x_1} + I_{x_2x_2} + e_1^2 F_1 + e_2^2 F_2 \end{aligned} \quad (1-28)$$

بما ان المحور x يمر من مركز الثقل المشترك للسطحين F_1 و F_2 فان العزم الستاتيكي المشترك للسطحين بالنسبة له يساوي صفراً .

العزم الستاتيكي للسطح F_1 بالنسبة للمحور x يساوي $F_1 e_1$.

العزم الستاتيكي للسطح F_2 بالنسبة للمحور x يساوي $-F_2 e_2$ (اشارة سالبة لان مركز الثقل s_2 يقع تحت المحور x) .

العزم الستاتيكي المشترك للسطحين F_1 و F_2 بالنسبة للمحور x المار من مركز ثقلهما المشترك هو اذاً :

$$F_1 e_1 - F_2 e_2 = 0$$

اي ان

$$F_1 e_1 = F_2 e_2$$

اما الحدود الاخيرة من العلاقة (1-28) :

$$e_1^2 F_1 + e_2^2 F_2 = (e_1 F_1) e_1 + (e_2 F_2) e_2$$

فتكتب بواسطة العلاقة الاخيرة كما يلي :

$$e_1^2 F_1 + e_2^2 F_2 = F_2 e_2 e_1 + F_2 e_2^2 = F_2 e_2 (e_1 + e_2) = F_2 e_2 e \quad (1-29)$$

يمكن حساب بعد مركز ثقل السطح الثاني عن مركز الثقل المشترك للسطحين e_2 كما يلي :

العزم الستاتيكي للسطح F_1 بالنسبة للمحور x_2 يساوي $F_1 e$.

العزم الستاتيكي للسطح F_2 بالنسبة للمحور x_2 يساوي 0 .

العزم الستاتيكي للسطحين F_1 و F_2 بالنسبة للمحور x_2 يساوي $F_1 e$. من جهة ثانية يرى ان العزم الستاتيكي للسطحين F_1 و F_2 بالنسبة للمحور x_2 يساوي $(F_1 + F_2) e_2$ وبما ان كلا العلاقتين تمثل نفس القيمة لذلك يمكن وضع اشارة المساواة بينها اي :

$$(F_1 + F_2) e_2 = F_1 e$$

ومنها يفتج :

$$e_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} e$$

بتبديل هذه القيمة في العلاقة (1-29) وبعد ذلك بتبديل الناتج في علاقة إيجاد I_{xx} يتم الحصول على عزم العطالة المطلوب بدلالة المعطيات :

$$I_{xx} = I_{xx1} + I_{xx2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e^2 \quad (1.30)$$

تحتوي هذه العلاقة فقط على البعد بين المحورين x_1 , x_2 دون الحاجة لمعرفة مركز الثقل المشترك .

مثال 18 :

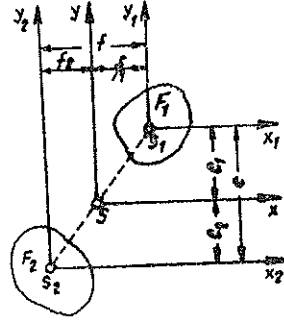
مقطعان عرضيان كما يشير الشكل (1-27) .

المعطى : مساحة المقطع العرضي الاول F_1 وجداء عطالته $I_{x_1 y_1}$ بالنسبة للمحاور الذاتية x_1 , y_1 ومساحة المقطع العرضي الثاني وجداء عطالته $I_{x_2 y_2}$ بالنسبة للمحاور الذاتية x_2 و y_2 وكذلك البعد العمودي بين المحورين x_1 , x_2 الذي يرمز له بـ c وكذلك ايضاً البعد العمودي بين المحورين y_1 , y_2 والذي يرمز له بـ f .

مجموعة المحاور المتعامدة x_1 , y_1 توازي مجموعة المحاور المتعامدة x_2 , y_2 . المطلوب : إيجاد جداء عطالة السطحين باعتبارهما متجانساً مركباً واحداً بالنسبة للمحاور (x, y) الموازية لمجموعتي المحاور (x_1, y_1) و (x_2, y_2) والمارة من مركز الثقل المشترك للسطحين F_1 , F_2 .

الحل :

يحسب جداء العطالة المشترك بواسطة العلاقة التالية :



شكل 1-27

$$I_{xy} = \sum_i I_{xyi} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

باستخدام علاقة شتاينر ينتج :

$$I_{xy} = [I_{x1y1} + F_1 e_1 f_1] + [I_{x2y2} + F_2 (-e_2) (-f_2)]$$

$$= I_{x1y1} + I_{x2y2} + F_1 e_1 f_1 + F_2 e_2 f_2 \quad (1.31)$$

تماماً كما في المسألة السابقة يمكن الكتابة :

$$e_1 = \frac{F_2 e}{F_1 + F_2} \quad ; \quad e_2 = \frac{F_1 e}{F_1 + F_2}$$

بالتعويض في العلاقة (1-31) يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{x1y1} + I_{x2y2} + \frac{F_1 F_2 f_1}{F_1 + F_2} e + \frac{F_1 F_2 f_2}{F_1 + F_2} e \\ &= I_{x1y1} + I_{x2y2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e (f_1 + f_2) \end{aligned}$$

ومن الشكل (1-27) يرى ان :

$$f = f_1 + f_2$$

بتبديلها في العلاقة الاخيرة ينتج :

$$I_{xy} = I_{x1y1} + I_{x2y2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f$$

في الحالة الممثلة في الشكل (1-27) حيث ان مراكز الثقل S_1 ، S_2 تقع في الربع الاول والربع الثالث من مجموعة الاحداثيات (x, y) فان الحد الاخير من العلاقة كان موجباً .

أما إذا وقعت S_1 ، S_2 في الربع الثاني والربع الرابع من مجموعة الاحداثيات x, y فان الحد الاخير من العلاقة يكون سالباً .

(في حالة كون $e \neq 0$ و $f \neq 0$ عندئذ لا توجد مواقع اخرى للاحداثيات وذلك لوجوب وقوع مركز الثقل المشترك على الخط الواصل بين S_1 ، S_2) .

ليلاحظ إذا مايلي : عندما تقع S_1 ، S_2 في أية أرباع وكانت لاحداثياتها نفس الإشارة يجب أن يكون الحد الأخير موجباً . وعندما تقع S_1 ، S_2 في الارباع بحيث تكون لاحداثياتها إشارة مختلفة يجب ان يكون الحد الاخير سالباً . وبذلك تصبح العلاقة الاخيرة كالتالي :

$$I_{xy} = I_{x_1y_1} + I_{x_2y_2} \pm \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e f \quad (1.32)$$

($I_{x_1y_1}$ و $I_{x_2y_2}$ تبدل بإشارتهما أما e, f فتبدل بقيمتها المطلقة) .

مثال 19 :

مقطع عرضي على شكل قطع ناقص (شكل 1-28) .

المعطى : انصاف اقطار القطع الناقص a, b .

المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية I_{xx} ، I_{yy} ، I_{xy} بالنسبة للمحاور المركزية x, y .

الحل :

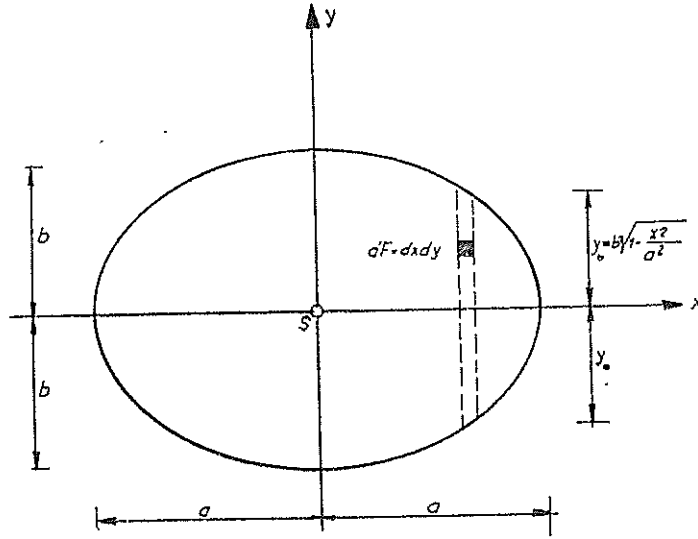
باعتداع عنصر تفاضلي صغير مساحته :

$$dF = dx dy$$

يتم الحصول على عزوم الدرجة الثانية المطلوبة :

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF = \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-y_0}^{+y_0} dy = \int_{-a}^{+a} x^2 y \Big|_{-y_0}^{+y_0} . dx =$$

$$= 2b \int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$



شكل 1-28

بالاستعانة بالعلاقة :

$$x = a \sin \frac{\varphi}{2}$$

فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي :

$$I_{yy} = a^3 b \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^3 b}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{a^3 b}{4} \pi$$

بإستبدال انصاف الاقطار a, b يتم الحصول على القيمة الثانية لعزم العطالة :

$$I_{xx} = \frac{b^3 a}{4} \pi$$

ولاسباب التناظر فإن :

$$I_{xy} = 0$$

حالة خاصة (المقاطع العرضية الكيفية) :

إذا طاب تعيين عزوم الدرجة الثانية لسطح كفي الشكل عندئذ يتوجب تقسيم هذا السطح (السطح الكلي) F الى سطوح جزئية بسيطة (مستطيل ، مثلث ، دائرة والخ) عزوم عطالاتها معلومة . اما القيم المطلوبة فيتم الحصول عليها حسب العلاقة (1-17) بالاستعانة بعزوم

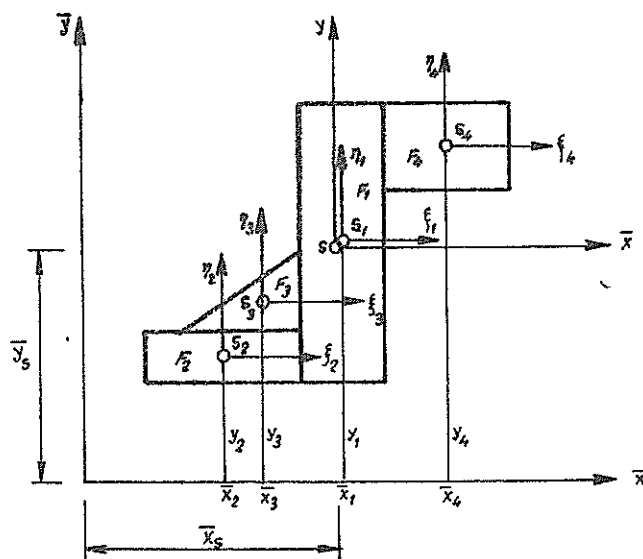
عطالة السطوح الجزئية . على العموم يطلب إيجاد عزوم الدرجة الثانية لسطح الكلي بالنسبة لمجموعة محاور احداثية متعامدة مركزية .

يفضل اجراء ذلك ضمن جدول . يشير الشكل (1-29) الى المقطع العرضي المطلوب حساب عزوم عطالته بالنسبة لمجموعة المحاور المركزية x, y . للقيام بذلك تثبيت مجموعة محاور احداثية ما وليرمز لها بـ \bar{x} و \bar{y} . تحدد مراكز ثقل السطوح الجزئية F_v بتعيين الاحداثيات \bar{x}_v, \bar{y}_v اما عزوم عطالته بالنسبة لمحاورها المركزية الذاتية ξ_v, η_v فتحدد بمعرفة القسيم $I_{\xi\xi_v}^1, I_{\eta\eta_v}^1, I_{\xi\eta_v}^1$. من اجل المحاور x, y يتم الحصول على عزوم العطالة الجزئية هكذا : $I_{xxv}, I_{yyv}, I_{xyv}$

$$I_{xxv} = I_{\xi\xi_v} + (\bar{y}_v - \bar{y}_s)^2 F_v$$

$$I_{yyv} = I_{\eta\eta_v} + (\bar{x}_v - \bar{x}_s)^2 F_v$$

$$I_{xyv} = I_{\xi\eta_v} + (\bar{x}_v - \bar{x}_s)(\bar{y}_v - \bar{y}_s) F_v$$



شكل 1-29

وبالاستعانة بها يتم الحصول على عزوم عطالة السطح الكلي :

$$I_{xx} = \sum_{v=1}^n I_{xxv} = \sum_{v=1}^n I_{\xi\xi_v} + \sum_{v=1}^n (\bar{y}_v - \bar{y}_s)^2 F_v$$

مقاومة المواد م ٣٤

$$I_{yy} = \sum_{v=1}^n I_{yyv} = \sum_{v=1}^n I_{\eta\eta v} + \sum_{v=1}^n (\bar{x}_v - \bar{x}_s)^2 F_v$$

$$I_{xy} = \sum_{v=1}^n I_{xyv} = \sum_{v=1}^n I_{\xi\eta v} + \sum_{v=1}^n (\bar{x}_v - \bar{x}_s)(\bar{y}_v - \bar{y}_s) F_v$$

اما ابعاد مركز الثقل \bar{y}_s, \bar{x}_s للسطح الكلي فيتم الحصول عليها حسب العلاقة :

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{v=1}^n \bar{x}_v F_v}{F} \quad ; \quad \bar{y}_s = \frac{\sum_{v=1}^n \bar{y}_v F_v}{F}$$

يفضل اجراء الحساب ضمن الجدول التالي :

v	\bar{x}_v	\bar{y}_v	F_v	$\bar{x}_v F_v$	$\bar{y}_v F_v$	$a_v = \bar{x}_v - \bar{x}_s$	$b_v = \bar{y}_v - \bar{y}_s$	a_v^2	b_v^2	$a_v b_v$
الواحدة	m	m	m ²	m ³	m ³	m	m	m ²	m ²	m ²
1										
2										
⋮										
v										
⋮										
n										
Σ	.	.	F =

v	$I_{\xi\xi v}$	$I_{\eta\eta v}$	$I_{\xi\eta v}$	$a_v^2 F_v$	$b_v^2 F_v$	$a_v b_v F_v$
الوحدة	m ⁴	m ⁴	m ⁴	m ⁴	m ⁴	m ⁴
1						
2						
⋮						
v						
⋮						
n						
Σ

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{v=1}^n \bar{x}_v F_v}{F} \quad , \quad y_s = \frac{\sum_{v=1}^n \bar{y}_v F_v}{F}$$

$$I_{xx} = \sum_{v=1}^n I_{\xi\xi v} + \sum_{v=1}^n b_v^2 F_v \quad , \quad I_{yy} = \sum_{v=1}^n I_{\eta\eta v} + \sum_{v=1}^n a_v^2 F_v \quad ;$$

$$I_{xy} = \sum_{v=1}^n I_{\xi\eta v} + \sum_{v=1}^n a_v b_v F_v$$

مثال 20 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-30).

المعطى : أبعاد المقطع العرضي .

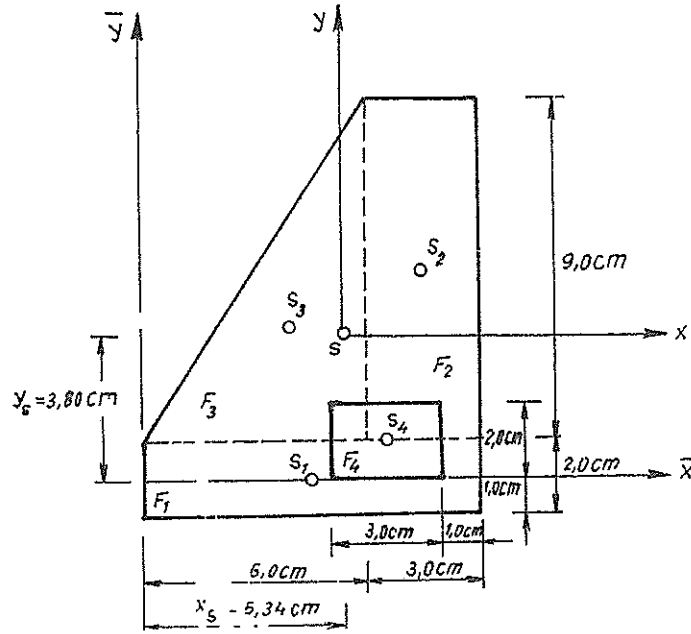
المطلوب : حساب عزوم الدرجة الثانية للسطح المذكور بالنسبة لمحاور المركزية x , y .

الحل :

تبلغ عزوم الدرجة الثانية للسطوح الجزئية بالنسبة لمحاورها المركزية الذاتية :

$$I_{\xi\xi 1} = \frac{9,0 \cdot 2,0^3}{12} = 6,00 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\xi\xi 2} = \frac{3,0 \cdot 9,0^3}{12} = 182,25 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta\eta 1} = \frac{2,0 \cdot 9,0^3}{12} = 121,50 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\eta\eta 2} = \frac{9,0 \cdot 3,0^3}{12} = 20,25 \text{ cm}^4$$



شكل 1.30

$$I_{\xi \eta 1} = 0 \quad ; \quad I_{\xi \eta 2} = 0$$

$$I_{\xi \xi 3} = \frac{6.0 \cdot 9.0^3}{36} = 121.50 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\xi \xi 4} = \frac{3.0 \cdot 2.0^3}{12} = 2.00 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta \eta 3} = \frac{9.0 \cdot 6.0^3}{36} = 54.00 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\eta \eta 4} = \frac{2.0 \cdot 3.0^3}{12} = 4.50 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi \eta 3} = \frac{9.0^2 \cdot 6.0^2}{72} = 40.50 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{\xi \eta 4} = 0$$

يمكن الحصول على عزوم الدرجة الثانية للسطح بالنسبة لمجموعة المحاور x , y بواسطة الجدول التالي :

ν	$\bar{x}\nu$	$\bar{y}\nu$	$F\nu$	$\bar{x}\nu F\nu$	$\bar{y}\nu F\nu$	$a\nu \equiv \bar{x}\nu - \bar{x}_s$	$b\nu \equiv \bar{y}\nu - \bar{y}_s$	$a\nu^2$	$b\nu^2$	$a\nu b\nu$
\bar{x}_s, \bar{y}_s	cm	cm	cm ²	cm ³	cm ³	cm	cm	cm ²	cm ²	cm ²
1	4,5	0,0	18,1	81,0	0,0	-0,8409	-3,7955	0,7071	14,4058	3,1916
2	7,5	5,5	27,0	202,5	148,5	2,1591	1,7045	4,6617	2,9053	3,6802
3	4,0	4,0	27,0	108,0	108,0	-1,3409	0,2045	1,7980	0,0418	-0,2742
4	6,5	1,0	6,0	-39,0	-6,0	1,1591	-2,7955	1,3435	7,8148	-3,2403
Σ	.	.	66,0	352,5	250,5

ν	$I \zeta \zeta \nu$	$I \eta \eta \nu$	$I \xi \eta \nu$	$a\nu^2$	$b\nu^2$	$a\nu b\nu$
\bar{x}_s, \bar{y}_s	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
1	6,00	121,50	0,00	12,7278	259,3044	57,4488
2	182,25	20,25	0,00	125,8659	78,4431	99,3654
3	121,50	54,00	-40,50	48,5460	1,1286	7,4034
4	-2,00	-4,50	0,00	-8,0610	-46,8888	19,4418
Σ	307,75	191,25	-40,50	179,0787	291,9875	168,8526

$$\bar{x}_s = \frac{352,5}{66,0} = 5,3409 \text{ cm} ; \quad \bar{y}_s = \frac{250,5}{66,0} = 3,7955 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = 307,75 + 291,99 = 599,74 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 191,25 + 179,08 = 370,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -40,50 - 168,85 = -209,35 \text{ cm}^4$$

١ - ٢ - ٤ عزوم الدرجة الثانية في حالة دوران مجموعة المحاور الاحداثية في مستوي السطح

ستم في هذه الفقرة ، دراسة التغير الذي يطرأ على عزوم الدرجة الثانية للسطح F عندما تدور مجموعة المحاور الاحداثية (مجموعة النسب) في مستوي السطح F . بتصور دوران مجموعة الاحداثيات x, y (التي هي مجموعة ما من المحاور الاحداثية الموجودة في السطح F) حول مبدأها بزاوية φ يتم الحصول على مجموعة جديدة من المحاور الاحداثية ξ, η تشترك مع المجموعة الاصلية في المبدأ (تقاس الزاوية φ حسب المفهوم الرياضي الموجب ، اي انها تعتبر موجبة عندما تبدأ عند المحور x الموجب ثم تدور متجهة الى المحور y الموجب بأقرب طريق . فمثلا الزاوية φ الممثلة في الشكل (1-31) تعتبر موجبة عندما تدور بعكس عقارب الساعة) .

ان الهدف من هذه الفقرة هو التوصل الى امكانية تساعد على التحول من قيم معلومة لعزوم الدرجة الثانية للسطح F المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية x, y الى قيم مجموعة لعزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F ولكن المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية الجديدة ξ, η . او بتعبير مختصر :

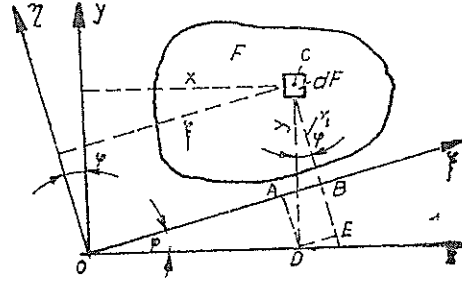
المعطى : موضع مجموعة المحاور الاحداثية وعزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لها وهي I_{xx}, I_{yy}, I_{xy} وكذلك موضع مجموعة المحاور الاحداثية ξ, η التي تشترك مع المجموعة x, y في المبدأ وتشكل معها الزاوية φ .

المطلوب : ايجاد عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور ξ, η بدلالة عزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F بالنسبة لمجموعة المحاور x, y ودلالة الزاوية φ . حسب التعريف فان عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x, y هي :

$$I_{xx} = \int_F y^2 dF ; \quad I_{yy} = \int_F x^2 dF ; \quad I_{xy} = \int_F xy dF \quad (1-33)$$

اما عزوم الدرجة الثانية لنفس السطح F بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية ξ, η فهي :

$$I_{\xi\xi} = \int_F \eta^2 dF, \quad I_{\eta\eta} = \int_F \xi^2 dF, \quad I_{\xi\eta} = \int_F \xi \eta dF \quad (1-34)$$



شكل 1-31

من الشكل (1-31) يمكن التوصل الى علاقات تربط بين احداثيات مركز ثقل العنصر السطحي dF (والذي سيرمز له بالحرف c) في كلا المجموعتين :

$$\xi = \overline{OA} + \overline{AB} \quad (1-35)$$

$$\eta = \overline{CE} - \overline{BE}$$

حيث ان :

$$\overline{OA} = \overline{OD} \cos \varphi = x \cos \varphi$$

$$\overline{AB} = \overline{DE} = y \sin \varphi$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} \cos \varphi = y \cos \varphi$$

$$\overline{BE} = \overline{AD} = x \sin \varphi$$

بتبديل هذه القيم في العلاقة (1-35) يتم الحصول على معادلات تحويل احداثيات النقطة بالنسبة لمجموعتين من الاحداثيات تشترك في المبدأ وتدور احدهما حول الاخرى بزاوية φ :

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (1-36)$$

$$\eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

بتبديل العلاقة (1-36) في العلاقة (1-34) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
I_{\xi\xi}(\varphi) &= \int_F \eta^2 dF = \int_F (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 dF = \\
&= \sin^2 \varphi \int_F x^2 dF - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_F xy dF + \cos^2 \varphi \int_F y^2 dF \\
I_{\eta\eta}(\varphi) &= \int_F \xi^2 dF = \int_F (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 dF = \\
&= \cos^2 \varphi \int_F x^2 dF + 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_F xy dF + \sin^2 \varphi \int_F y^2 dF \\
I_{\xi\eta}(\varphi) &= \int_F \xi \eta dF = \int_F (x \cos \varphi + y \sin \varphi)(-x \sin \varphi + y \cos \varphi) dF = \\
&= \sin \varphi \cos \varphi \left(\int_F y^2 dF - \int_F x^2 dF \right) + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \int_F xy dF
\end{aligned}
\tag{1-37}$$

بالاستعاضة عن التكاملات بقيمها وذلك حسب المعادلات (1-33) يتم الحصول ، بعد الترتيب ، على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
I_{\xi\xi}(\varphi) &= I_{xx} \cos^2 \varphi + I_{yy} \sin^2 \varphi - 2 I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
I_{\eta\eta}(\varphi) &= I_{xx} \sin^2 \varphi + I_{yy} \cos^2 \varphi + 2 I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\
I_{\xi\eta}(\varphi) &= (I_{xx} - I_{yy}) \sin \varphi \cos \varphi + I_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)
\end{aligned}
\tag{1-38}$$

بالاستعانة بالعلاقات الهندسية المثلثية التالية :

$$\begin{aligned}
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) & ; & \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \\
2 \sin \varphi \cos \varphi &= \sin 2\varphi & ; & \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi
\end{aligned}$$

وبتدليلها في العلاقات (1-38) يتم الحصول على معادلات التحويل التي يتم بفضلها الحصول على عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة الاحداثيات ξ, η المدورة بزاوية φ حول مجموعة الاحداثيات x, y التالية :

$$\begin{aligned}
I_{\xi\xi}(\varphi) &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi \\
I_{\eta\eta}(\varphi) &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi \\
I_{\xi\eta}(\varphi) &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi
\end{aligned} \quad (1.39)$$

بجمع العلاقتين (1-39 a,b) والمقارنة مع العلاقة (1-6) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi) + I_{\eta\eta}(\varphi) = I_{xx} + I_{yy} = I_p \quad (1.40)$$

من هذه العلاقة يستنتج أن مجموع عزوم العطالة المحورية لا يتأثر بدوران مجموعة المحاور الاحداثية بل يبقى ذاته دون تغير . فيدوران مجموعة الاحداثيات حول المبدأ. بزاوية ما ولتكن φ يبقى مجموع عزوم عطالة سطح ثابتاً ويساوي عزم العطالة القطبي للسطح بالنسبة لمبدأ مجموعة المحاور الاحداثية .

باجراء العملية التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi) I_{\eta\eta}(\varphi) - [I_{\xi\eta}(\varphi)]^2 \quad (1.41)$$

وذلك بعد الامتناعة بالعلاقة (1-38) يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi) I_{\eta\eta}(\varphi) - I_{\xi\eta}^2(\varphi) = I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2$$

تصلح العلاقات (1.40) و (1.41) لكل الزوايا التي تدورها مجموعة المحاور الاحداثية حول نقطة ثابتة وتسمى لامتغيرات تنسور العطالة.

١ - ٣ محاور العطالة الاساسية (الرئيسية) وعزوم العطالة بالنسبة لها

١ - ٣ - ١ الطريقة التحليلية لايجاد محاور العطالة الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية .

ان عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية المدورة ξ, η التي تم حسابها في الفقرة الاخيرة ، هي توابع للقيم الثابتة I_{xx}, I_{yy}, I_{xy} وكذلك لزاوية الدوران المتغيرة φ . إذا تتغير عزوم الدرجة الثانية للسطوح بتغير الزاوية φ . وبذلك يطرح السؤال التالي نفسه :

ماهي الزاوية φ (وماهي الاوضاع التي تأخذها الاحداثيات ξ و η) التي تأخذ عندها عزوم العطالة المحورية $I_{\xi\xi}^1$ و $I_{\eta\eta}^1$ قيمة حدية .

باشتقاق التوابع $I_{\xi\xi}^1(\varphi)$ و $I_{\eta\eta}^1(\varphi)$ بالنسبة للزاوية المتغيرة φ ثم جعلها مساوية للصفر ، يتم الحصول على المعادلات الشرطية اللازمة للحصول على القيم الحدية التالية :

$$\frac{dI_{\xi\xi}^1(\varphi)}{d\varphi} = 0 = -2 \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi \right) = -2 I_{\xi\eta} \quad (1-42)$$

$$\frac{dI_{\eta\eta}^1(\varphi)}{d\varphi} = 0 = 2 \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi \right) = +2 I_{\xi\eta}$$

كلا العلاقتين تؤدي لنفس النتيجة وتحقق من اجل الزاوية $\varphi = \varphi_0$ التي تحقق العلاقة التالية :

$$\left| \tan 2\varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \right| \quad (1-33)$$

بتعيين الزاوية φ_0 يتحدد وضع مجموعة المحاور الاحداثية التي تأخذ عزوم العطالة المحورية بالنسبة لها قيمة حدية . من الآن فصاعد سوف يرمز لمجموعة المحاور الاحداثية هذه بـ 1 و 2 وتسمى بمحاور العطالة الرئيسية كما سيرمز لعزوم العطالة بالنسبة لها بـ I_{11} و I_{22} وتسمى بعزوم العطالة الرئيسية (وهي تمثل القيم الحدية لعزوم عطالة السطح F) .

اذا حققت الزاوية φ_0 العلاقة السابقة فان الزاوية $\varphi_0 + \pi/2$ تحققها أيضاً . هذا يعني ان تدوير المحور ξ عن الوضع φ_0 ، الذي تظهر فيه القيمة الحدية الاولى ، بزاوية قائمة يؤدي لان تأخذ $I_{\xi\xi}^1$ قيمة حدية ثانية . بكلام آخر :

عندما تأخذ $I_{\xi\xi}^1$ قيمة حدية فان عزوم العطالة $I_{\eta\eta}^1$ يأخذ في نفس الوقت قيمة حدية أيضاً . أما الحاول الاخرى المعادلة (1-43) فلا تعطي شيئاً جديداً بل تؤدي للعودة الى المحاور ξ , η . للتأكد فيما اذا كان لعزوم العطالة المحورية قيمة أعظمية وقيمة أصغرية يلجأ للدراسة مشتقاتها الثانية وهي التي تحدد ذلك :

$$\frac{d^2 I_{\xi\xi}^1(\varphi_0)}{d\varphi^2} = -2 [(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi_0 - 2 I_{xy} \sin 2\varphi_0] \quad (1-44)$$

$$\frac{d^2 I_{\eta\eta}^1(\varphi_0)}{d\varphi^2} = 2 [(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi_0 - 2 I_{xy} \sin 2\varphi_0]$$

بالاستعانة بالعلاقات الرياضية التالية :

$$\cos 2 \varphi_0 = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \varphi_0}} = \frac{\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}}{\pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \quad (1-45)$$

$$\sin 2 \varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} 2 \varphi_0}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2 \varphi_0}} = \frac{-I_{xy}}{\pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

يتم الحصول من العلاقات (1-44) على النتائج التالية :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 I_{\xi\xi}(\varphi_0)}{d\varphi^2} &= \pm 4 \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ \frac{d^2 I_{\eta\eta}(\varphi_0)}{d\varphi^2} &= \pm 4 \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-46)$$

لتحقيق العلاقة (1-43) ينبغي أخذ إحدى اشارات الجذر الموجودة في العلاقات (1-45) فقط . اذا لم يأخذ المشتق الثاني عند الزاوية φ_0 قيمة الصفر بذلك تكون لمعزوم العطالة المحورية بالنسبة للمحاور 1 و 2 قيمة حدية فعلا .

عندما يفترض أن $I_{xx} = I_{yy}$ وأن $I_{xy} = 0$ عندئذ ينعدم المشتق الثاني . وبذلك تعطي العلاقات (1-39) النتائج التالية :

$$I_{\xi\xi}(\varphi) = I_{\eta\eta}(\varphi) = I_{xx} = I_{yy} ; \quad I_{\xi\eta}(\varphi) = I_{xy} = 0$$

ان استقلال عزوم عطالة السطوح عن دوران مجموعة النسب يتحقق ، على سبيل المثال في الدائرة او المربع وذلك عندما ينطبق مبدأ الاحداثيات في مركز ثقل السطح .

من المعادلات (1-46) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{d^2 I_{\xi\xi}(\varphi_0)}{2} = - \frac{d^2 I_{\eta\eta}(\varphi_0)}{d\varphi^2} \quad (1-47)$$

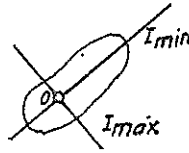
إذا كان عزم العطالة المحوري I_{11} اعظمية فإن عزم العطالة I_{22} يكون اصغرياً والعكس صحيح . بتبديل $\varphi = \varphi_0$ في العلاقة (1-39) يتم الحصول على عزم عطالة مسطح بالنسبة لمجموعة المحاور الرئيسية 1 و 2 وذلك بعد اعتبار العلاقة (1-36) فيها . فإذا اختيرت فيها الإشارة العليا عندئذ ينتج كقيمة اعظمية :

$$I_{11} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \max I \quad (1-48a)$$

وكقيمة اصغرية :

$$I_{22} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \min I \quad (1-48b)$$

لهذه العلاقات ، أثناء التطبيق ، سيئة واحدة وهي عدم التمكن من معرفة أي العزمين الرئيسين يتبع الزاوية φ_0 وأيهما يتبع الزاوية $\varphi_0 + \pi/2$. لكن في الحياة العملية يندر أن لا يفرق بين المحور الذي يؤدي للعزم الرئيسي الاعظمي وبين المحور الذي يؤدي للعزم الرئيسي الاصغري ، فالمحاور الرئيسية تتبع دائماً بشكل تقريبي امتداد السطح ، فعزم العطالة الرئيسي الاعظمي ينسب إلى المحور الذي يتعامد مع أطول محور يمتد في السطح (الشكل 1-32) .



شكل 1-32

بتبديل $\varphi = \varphi_0$ في العلاقات (1-39) يتم الحصول على عزوم العطالة الرئيسية ممثلة بالشكل الجديد التالي :

$$\left. \begin{aligned} I_{11} &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 - I_{xy} \sin 2\varphi_0 \\ I_{22} &= \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 + I_{xy} \cos 2\varphi_0 \\ I_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-50)$$

في هذه العلاقات تعوض اصغر قيمة مطلقة للزاوية φ_0 التي يتم الحصول عليها من العلاقة (1-43) اي تؤخذ ، في حالة كون $\lg 2 \varphi_0 > 0$ ، الزاوية الواقعة في الربع الاول وتؤخذ ، عندما تكون $\lg 2 \varphi_0 < 0$ ، الزاوية الواقعة في الربع الرابع .

تشير المعادلات (1-42) الى انعدام جداء العطالة بالنسبة لمحاور العطالة الرئيسية (المحاور الرئيسية) . مما ذكر كله يمكن الان تعريف المحاور الرئيسية (للعطالة) بأنها المحاور التي تأخذ عزوم العطالة المحورية بالنسبة لها قيماً حدية وهي المحاور التي ينعدم ايضاً جداء العطالة بالنسبة لها .

في حالة مرور محاور العطالة الرئيسية من مركز ثقل السطح عندئذ تسمى بالمحاور الرئيسية المركزية ، لكن في اغلب الاحيان ، وحيث ان هذه المحاور هي اكثر المحاور استعمالاً تختصر تسميتها في بعض المراجع وفي الفصول التالية من هذا الكتاب ليطلق عليها اسم محاور العطالة الرئيسية (المقصود من ذلك هو المحاور الرئيسية المركزية للعطالة) . بشكل مختصر يمكن التأكيد على بعض الصفات الهامة التالية :

من بين كافة المحاور المارة من نقطة ما يوجد هناك دائماً محوران متعامدان تأخذ عزوم العطالة بالنسبة لها قيمة اعظمية وقيمة اصغرية. تسمى هذه المحاور بمحاور العطالة الرئيسية ويرمز لها بـ 1 و 2 اما عزوم العطالة بالنسبة لها فتسمى بعزوم العطالة الرئيسية ويرمز لها بـ I_{11} ، I_{22} أما جداء العطالة فينعدم بالنسبة لها .

عندما يكون أحد محاور النسب أو كلاهما محوراً لتناظر السطح عندئذ ينعدم جداء العطالة وبذلك فان محاور التناظر هي دائماً محاور رئيسية للعطالة .

تعين عزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة للمحاور ξ و η بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية للسطوح بالنسبة للمحاور x ، y والزاوية φ حسب العلاقة (1-39) ، حيث ان x ، y هي مجموعة ما من المحاور الاحداثية التي تدور مجموعة المحاور الاحداثية η ، ξ حولها بالزاوية φ .

في حالة انطباق مجموعة المحاور x ، y على المحاور الرئيسية 1 و 2 عندئذ تصبح عزوم الدرجة الثانية للسطح بالشكل التالي :

$$I_{xx} \rightarrow I_{11} \quad ; \quad I_{yy} \rightarrow I_{22} \quad ; \quad I_{xy} \rightarrow 0$$

بتبديل هذه القيم في العلاقات (1-38) و (1-39) يتم الحصول على العلاقات التي تربط بين عزوم الدرجة الثانية للسطح بالنسبة لمجموعة المحاور ξ, η بدالاتها بالنسبة للمحاور الرئيسية (بدلالة I_{11}, I_{22}) تشترك كلا المجموعتين بالمركز وتدور الاولى حول الاخرى بزاوية φ) التالية :

$$\begin{aligned} I_{\xi\xi} &= I_{11} \cos^2 \varphi + I_{22} \sin^2 \varphi = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \cos 2\varphi \\ I_{\eta\eta} &= I_{11} \sin^2 \varphi + I_{22} \cos^2 \varphi = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \cos 2\varphi \\ I_{\xi\eta} &= (I_{11} - I_{22}) \sin \varphi \cos \varphi = \frac{I_{11} - I_{22}}{2} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (1-51)$$

بنفس الطريقة التي حددت فيها المحاور الرئيسية للعطالة يحدد وضع المحاور التي يأخذ جداء العطالة بالنسبة لها قيمة حدية ، فمن الشرط :

$$\frac{d I_{\xi\eta}}{d \varphi} = 0$$

وتسمية هذه الزاوية بـ φ_1 ينتج :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_1 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2 I_{xy}} = - \operatorname{ctg} 2 \varphi_0$$

من هذه العلاقة ينتج ان :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} 2 \varphi_0 = -1$$

وهذا يعني ان :

$$\varphi_1 = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

وبذلك فان محاور جداء العطالة الحدية تنصف الزاوية القائمة بين محاور العطالة الرئيسية 1 و 2 .

١ - ٣ - ٢ أمثلة :

مثال 21 :

المقطع العرضي الممثل في الشكل (1-33) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي .

المطلوب : حساب عزوم العطالة الرئيسية المركزية وموضع محاور العطالة الرئيسية .

الحل :

بالاستعانة بقيم عزوم العطالة التي تم الحصول عليها في المثال 19 :

$$I_{xx} = 599,74 \text{ cm}^4 ; I_{yy} = 370,33 \text{ cm}^4 ; I_{xy} = -209,35 \text{ cm}^4$$

وبالقيم التالية :

$$\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = 485,03 \text{ cm}^4 , \quad \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = 114,70 \text{ cm}^4$$

تم الحصول من العلاقات (1-48) على عزوم العطالة الرئيسية :

$$I_{11} = 485,03 + \sqrt{114,70^2 + (209,35)^2} = 723,75 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 485,03 - \sqrt{114,70^2 + (209,35)^2} = 246,32 \text{ cm}^4$$

أما موضع المحاور الرئيسية فيتمين بواسطة العلاقة (1-43) :

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 \cdot 209,35}{370,33 - 599,74} = -1,8251$$

$$2\varphi_0 = 61^\circ 10' ; \quad \varphi_0 = 30^\circ 39'$$

لقد تم في الشكل (1-33) تمثيل المحاور الرئيسية .

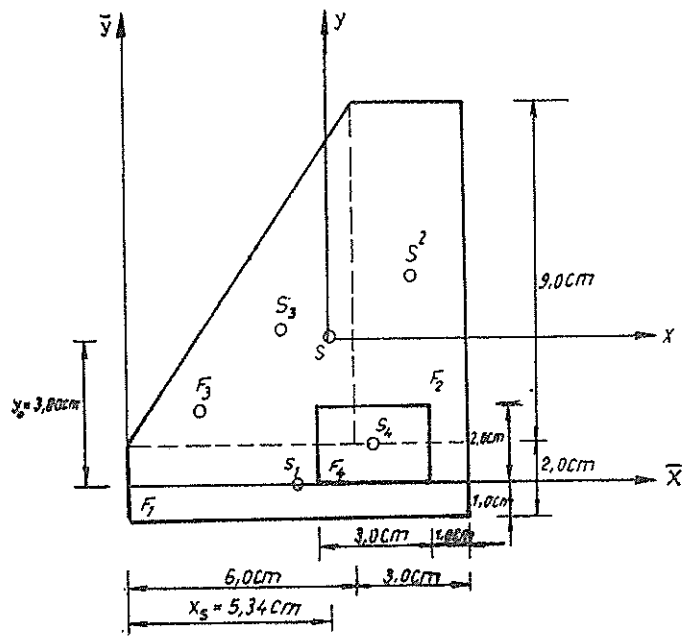
مثال 22 :

السطح F الممثل في الشكل (1-34) .

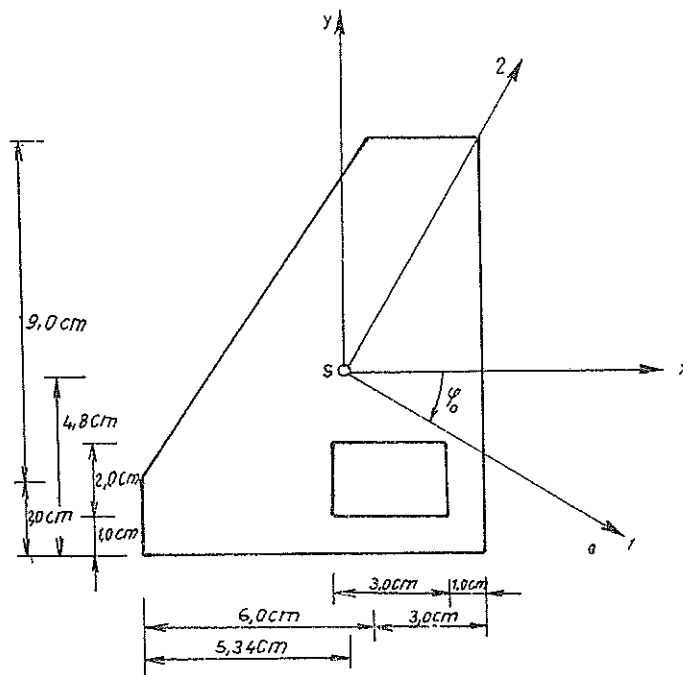
المعطى : عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور x , y :

$$I_{xx} = 120 \text{ cm}^4 , I_{yy} = 55 \text{ cm}^4 ; I_{xy} = -30 \text{ cm}^4 , \varphi = 30^\circ$$

المطلوب : تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور ξ , η التي تدور حول المجموعة x , y بالزاوية $\varphi = 30^\circ$ (شكل 1-34) .



شکل 1-33



شکل 1-34

الحل :

بالاستعانة بالعلاقات المثلثية:

$$\sin (-60^\circ) = -\sin 60^\circ$$

$$\cos (-60^\circ) = +\cos 60^\circ$$

وبتبديل القيم المعطاة في العلاقة (1-39) ينتج :

$$I_{\xi\xi} = \frac{120+55}{2} + \frac{120-55}{2} \cos (-60^\circ) - (-30) \sin (-60^\circ)$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{120+55}{2} - \frac{120-55}{2} \cos (-60^\circ) + (-30) \sin (-60^\circ)$$

$$I_{\xi\eta} = + \frac{120-55}{2} \sin (-60^\circ) + (-30) \cos (-60^\circ)$$

بالحل ينتج :

$$I_{\xi\xi} = 77,7 \text{ cm}^4 ; \quad I_{\eta\eta} = 97,3 \text{ cm}^4 ; \quad I_{\xi\eta} = 43,2 \text{ cm}^4$$

١ - ٣ - ٣ الطريقة التخطيطية لتعيين محاور العطالة الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية

إذا علمت عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} لسطح ما بالنسبة للمحورين المتعامدين x , y فبالامكان الانطلاق من المعادلات (1-45) او (1-43) للحصول على محوري العطالة الرئيسيين وكذلك بالامكان الانطلاق من المعادلات (1-50) وتعيين العزمين الرئيسيين للعطالة (عزوم العطالة بالنسبة للمحورين الرئيسيين) . ومن الممكن أيضاً إيجاد هذين المحورين وقيمة كل من العزمين الرئيسيين باستعمال الطريقة التخطيطية بتحقيق تلك المعادلات . حيث يوجد في متناول اليد لهذه الغاية طريقتان تخطيطيان :

I - دائرة عطالة مور

يمكن إعطاء علاقات التحويل (1-39) (علاقات إيجاد عزوم الدرجة الثانية للسطح بالنسبة لمجموعة المحاور المدورة ξ , η) :

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$$

بواسطة الطريقة المائدة للعالم مور (Otto MOHR) والسماة بدائرة عطالة مور معنأ هندسياً .
من المعادلات الثلاثة السابقة يمكن استخراج العلاقات التالية :

$$(I_{\xi\xi} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2})^2 = (\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi)^2$$

$$(I_{\eta\eta} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2})^2 = (-\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi)^2$$

$$I_{\xi\eta}^2 = (\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi)^2$$

بجمع كل من العلاقتين الاولى والثانية مع العلاقة الثالثة يمكن اختزال الزاوية φ والحصول على العلاقات التالية :

$$(I_{\xi\xi} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2})^2 + I_{\xi\eta}^2 = (\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2})^2 + I_{xy}^2$$

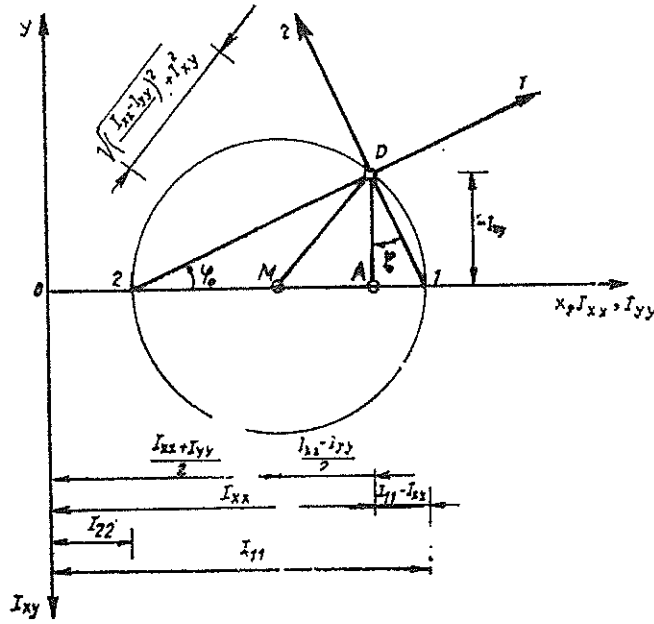
$$(I_{\eta\eta} - \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2})^2 + I_{\xi\eta}^2 = (\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2})^2 + I_{xy}^2$$

بتمثيل القيم الثابتة I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} والقيم المتغيرة $I_{\xi\eta}$ كفصل (احدائي افقي) وتمثيل القيمة $I_{\xi\eta}$ كترتيب (احدائي شاقولي) (شكل 1-35) فان تلك المعادلات تمثل معادلتين دائريتين تشترك مع بعضها بالمركز

$$(\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}, 0)$$

كما تشترك بنصف القطر

$$\sqrt{(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2})^2 + I_{xy}^2}$$



شكل 1-35

برسم القيمة $\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}$ بتحدد مركز الدائرة M وبإضافة القيمة $\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}$ يثبت موضع النقطة A. يحدد العمود ، الذي يبلغ طوله I_{xy} ، المقام من النقطة A مكان النقطة D وذلك بحيث تمثل المسافة MD نصف قطار الدائرة .

إن قيمة الاحداثي الافقي OA هي I_{xx} . تحدد تقاطع الدائرة مع الفصل (الاحداثي الافقي)، أي النقاط 1 و 2 ، عزوم العطالة الرئيسية :

$$I_{1,1} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{2,2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

بواسطة المستقيمتان 1 D و 2 D تميز محاور العطالة الرئيسية 1 و 2 . فمن المثلث AD يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\text{tg } \varphi_0 = - \frac{I_{1,1} - I_{xx}}{I_{xy}}$$

يمكن الحصول على نفس العلاقة بتبديل المعادلة (1-45) في العلاقة الرياضية :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1 - \cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0}$$

إذاً يمكن الاستعانة بدائرة عطالة مور للحصول على المحاور الرئيسية 1 و 2 وكذلك على عزوم العطالة الرئيسية وذلك عندما تكون عزوم الدرجة الثانية للسطح F بالنسبة للمحاور x و y معلومة (I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}) .

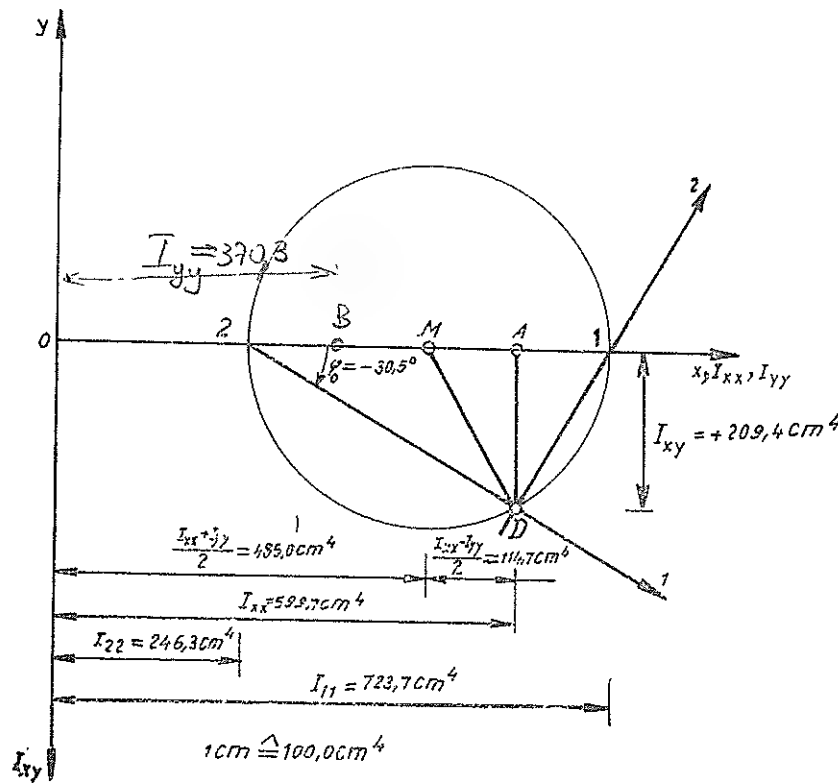
مثال 23 :

المعطى: $I_{xx} = 599,7 \text{ cm}^4$, $I_{yy} = 370,3 \text{ cm}^4$, $I_{xy} = -209,4 \text{ cm}^4$ (شكل 1-36).

المطلوب : تعيين المحاور الرئيسية وعزوم العطالة بالنسبة لها .

الحل :

باستخدام طريقة دائرة عطالة مور (شكل 1-36) يتم الحصول على القيم المطلوبة التالية :



شكل 1-36

$$I_{11} = 723,7 \text{ cm}^4 ; I_{22} = 246,3 \text{ cm}^4 ; \varphi_0 = - 30,5^\circ$$

تلخيص طريقة انشاء دائرة عطالة مور :

آ - ايجاد عزوم العطالة الرئيسية بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية بالنسبة المحاور x و y المعروفة:

$$\text{المعطى : } I_{xy}, I_{yy}, I_{xx}$$

$$\text{المطلوب : } \varphi_0, I_{22}, I_{11}$$

١ - بعد اختيار مقياس رسم مناسب ، يرسم خط نسب أفقي ويؤخذ عليه ابتداء من النقطة O البعدين :

$$\overline{OA} = I_{xx} , \quad \overline{OB} = I_{yy}$$

٢ - تنصف المسافة \overline{AB} فيتم الحصول على النقطة M ، فيكون :

$$\overline{OM} = 0,5 (I_{xx} + I_{yy})$$

$$\overline{MA} = 0,5 (I_{xx} - I_{yy})$$

٣ - يرسم الخط \overline{AD} عمودياً على خط النسب (خط القاعد) وتحدد عليه النقطة D بحيث يكون :

$$\overline{AD} = I_{xy}$$

في الحالة التي يكون فيها $I_{xy} > 0$ تؤخذ D اسفل A في الاتجاه السالب للاحداثي y (شكل 1-37) .

٤ - يوصل D مع M ينتج :

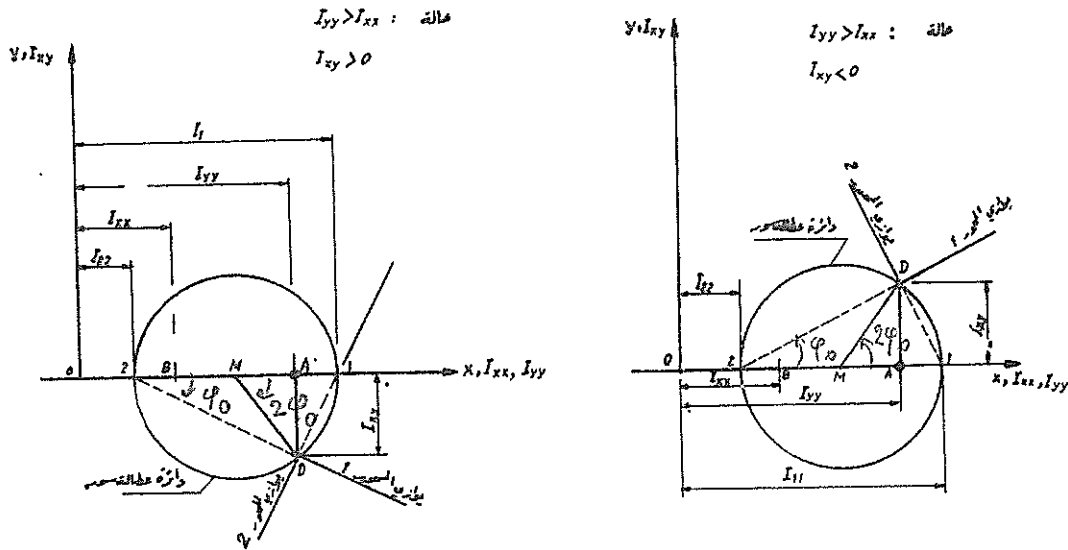
$$\overline{DM} = \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

بعد ذلك ترسم دائرة مركزها M ونصف قطرها \overline{DM} لتقابل (لتقطع) خط النسب الاقوي في نقطتين 1 و 2 . تسمى هذه الدائره بدائرة عطالة مور . ويلاحظ أن :

$$\overline{OI} = 0,5 (I_{xx} + I_{yy}) + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = I_{22}$$

$$\overline{O2} = 0,5 (I_{xx} + I_{yy}) + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = I_{22}$$

كما أن ميل المستقيم $\overline{2D}$ يساوي ميل المحور الأساسي 1 (المستقيم $\overline{1D}$) نظراً لأن الزاوية بين خط النسب والمستقيم \overline{MD} تساوي $2\varphi_0$. وبذلك يتحدد وضع المحورين الرئيسيين وقيمة عزم العطالة بالنسبة لهما.



شكل 1-38

حالة خاصة :

عندما تكون $I_{xx} = I_{yy}$ فإن دائرة عطالة مور تتحول الى نقطة لأن M, B, A تنطبق في نقطة واحدة . وفي هذه الحالة يتضح أن :

١ - ينصف المحوران الرئيسيان الزاوية بين المحورين x و y لأن $2\varphi_0 = \pi/2$.

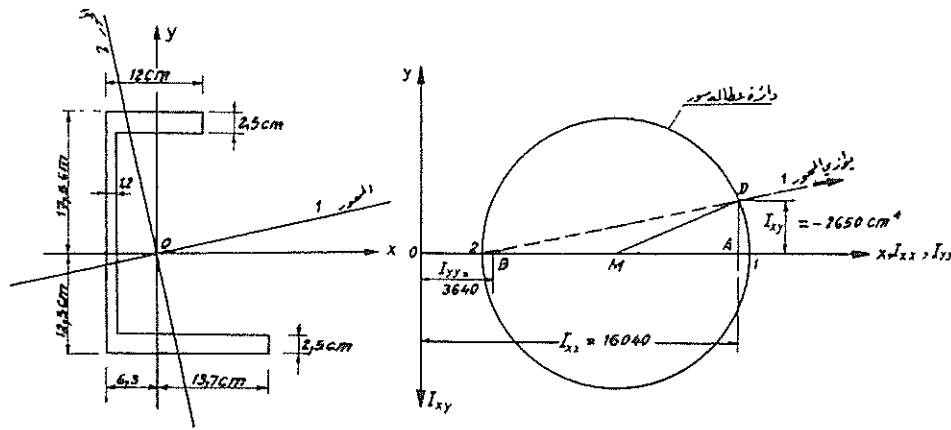
٢ - تكون قيمة كل من العزمين الرئيسيين للعطالة كما يلي :

$$I_{11} = I_{xx} + I_{xy}$$

$$I_{22} = I_{xx} - I_{xy}$$

مثال 24 :

المطلوب : تحديد المحورين الرئيسيين وعزم العطالة بالنسبة لهما وذلك للمقطع العرضي المبين في الشكل (1-39).



شكل 1-39

إيجاد عزوم العطالة المحلولة:
 $I_{xx} = 16040 \text{ cm}^4$, $I_{yy} = 3640 \text{ cm}^4$, $I_{xy} = -2650 \text{ cm}^4$
 يظهر حل هذا المثال تخطيطياً في الشكل (1-39).

باذرع عزوم العطالة النتيجة : من الشكل (1-39) تقرأ القيم التالية :
 نسبة دافعية

$$I_{11} = 16680 \text{ cm}^4 ; I_{22} = 3700 \text{ cm}^4$$

ب - إيجاد عزوم العطالة بالنسبة لمحاور ما بالاستعانة بعزوم العطالة الرئيسية المعروفة :

المعطى : I_{11} , I_{22} , ϕ (أي وضع المحورين x و y) .

المطلوب : I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} .

تحليلياً يمكن استخدام العلاقات (1-51) للحصول على المطلوب . أما تخطيطياً فبالامكان الاستفادة من دائرة عطالة مور كما يظهر الشكل (1-40) هكذا :

١ - يرسم خط نسب يوازي المحور الرئيسي 1 وتؤخذ (وترسم) عليه الأبعاد التالية :

$$\overline{O2} = I_{22}$$

$$\overline{O1} = I_{11}$$

٢ - تنصف المسافة $\overline{21}$ فيتم الحصول على النقطة M . بمسند ذلك ترسم دائرة عطالة مور ، مركزها ينطبق على النقطة M وتمر بالنقطتين 1 و 2 .

٣ - من النقطة 2 يرسم خطاً مستقيماً يوازي المحور x الذي يراد إيجاد عزوم العطالة بالنسبة

له ، فيقابل (فيـقطع) دائرة عطالة مور في نقطة أخرى هي D والتي احداثياتها هي $(I_{xx}, -I_{xy})$.

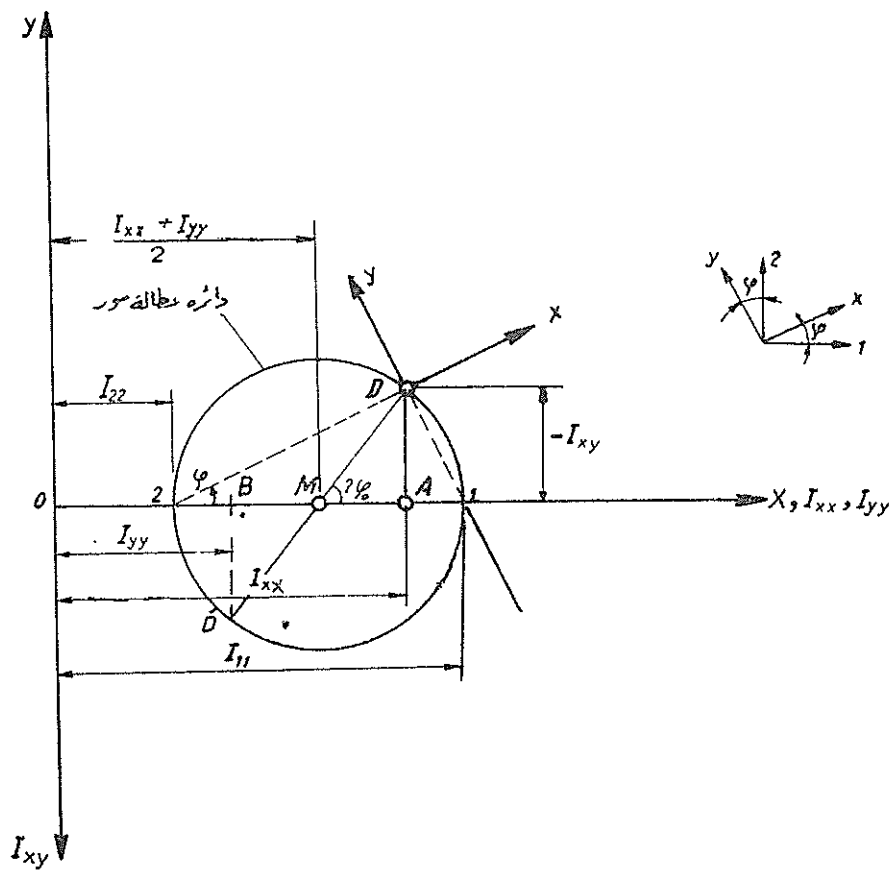
٤ - يسقط من D عموداً (الخط المستقيم \overline{DA}) على خط النسب (خط القاعدة) فيقطعه في A فيكون :

$$\overline{OA} = I_{xx}$$

$$\overline{DA} = -I_{xy}$$

4

وتكون I_{xy} موجبة مادامت النقطة D ناتجة عن الزاوية φ الموجبة (أي في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة) وأقل من 90 درجة (في الشكل 1-40 تظهر I_{xy} سالبة) .
(في الواقع إن إشارة I_{xy} تتوقف على الاتجاه الموجب المفروض لكل من المحورين x و y) .



شكل 1.40

٥ - نوصل النقطة D مع مركز الدائرة M بخط مستقيم فيقطعها في نقطة ثانية هي D' والتي إحداثياتها هي (I_{xy}, I_{yy}) .

٦ - يسقط من D' عموداً على خط النسب (المحور x) فيقطعه في النقطة B فيكون :

$$\overline{OB} = I_{yy}$$

$$\overline{D'B} = I_{xy}$$

بنفس الخطوات يتم تعيين القيم I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} بالسهولة بالاستعانة بالقيم I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} المعروفة.

II - دائرة عطالة مور - لاند

١ - إيجاد عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} .

عندما تكون عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور x و y معلومة عندئذٍ يستطاع إيجاد موضع محاور العطالة الرئيسية 1 و 2 وكذلك عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} ، بطريق تخطيطي يسمى بدائرة عطالة مور - لاند وهو كالتالي :

١ - في البداية يختار مقياس مناسب لتمثيل القيم I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} .

٢ - تحمل المسافة $I_{xx} + I_{yy}$ (والتي تسمى باللامتغير الاول لتensor العطالة) بفتحة الدور .

٣ - تثبت نهاية الدور المدببة في نقطة ما من المحور x (النقطة A) وتدور النهاية الثانية الى ان تقطع الاحداثي y (النقطة B) .

٤ - تحمل على المستقيم AB القيمة $\overline{AC} = I_{xx}$ ، أما المسافة المتبقية من المستقيم المذكور فتساوي $\overline{BC} = I_{yy}$.

٥ - يقام من النقطة C عموداً على المستقيم \overline{AB} .

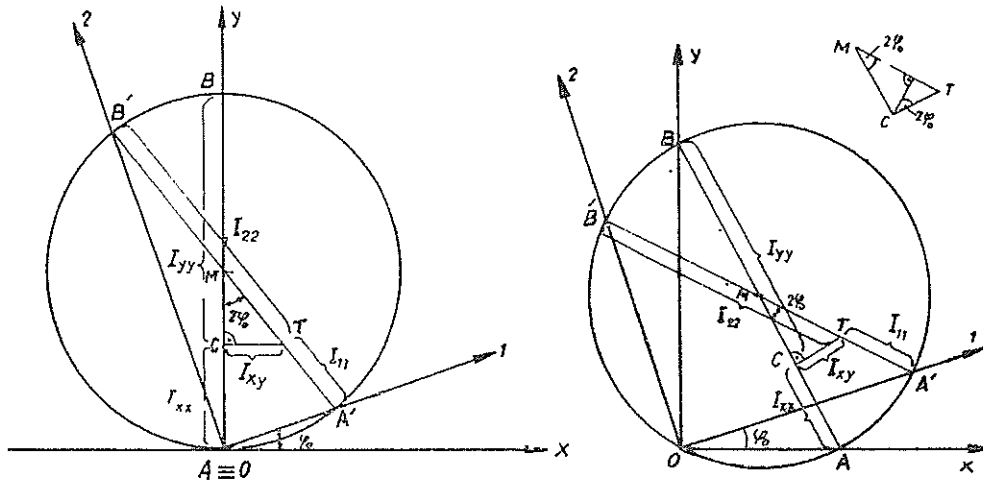
٦ - تحمل على العمود المذكور قيمة I_{xy} . اذا كانت $I_{xy} > 0$ فانها ترسم بالاتجاه الموجب للاحداثي x (هنا نحو اليمين) أما اذا كانت قيمتها سالبة فانها ترسم بالاتجاه العاكس لاتجاه x الموجب (هنا نحو اليسار) . بهذا يتم الحصول على نقطة العطالة T (لقد افترض في الشكل (1-41) ان $I_{xy} > 0$ ولذلك فقد رسمت نحو اليمين) .

٧ - تنصف المسافة \overline{AB} (في النقطة M) . ثم ترسم دائرة العطالة التي يبلغ نصف قطرها

$\frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy})$ والتي ينطبق مركزها على النقطة M فتقطع مجموعة المحاور الاحداثية x و y في النقاط A و B وتقر من مبدأ الاحداثيات O .

٨ - يوصل بين النقاط T و M بخط مستقيم فيقطع دائرة العطالة في نقطتين (النقطة A' والنقطة B') .

٩ - توصل نقطة مبدأ الاحداثيات O مع النقطة A' ومع النقطة B' فيتم الحصول على $\overline{OA'}$ و $\overline{OB'}$. هذان المستقيمان المتعامدان هما محاور العطالة الرئيسية 1 و 2 كما تمثل $A'T = I_{11}$ و $B'T = I_{22}$ عزوم العطالة الرئيسية .



شكل 1-41

البرهان :

آ - للبرهان على صحة كون $\overline{OA'}$ و $\overline{OB'}$ محاور عطالة رئيسية يلجأ للبرهان على تحقيق الزاوية φ_0 المرسومة في الشكل (1-41) للمعادلة (1-43) .

ان φ_0 هي زاوية محيطية لدائرة العطالة وقوسها هو AA' . أما الزاوية المركزية عند النقطة M والتابعة لها فتساوي عندئذ $2\varphi_0$. من المثلث MCT (القائم) تنتج العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_0 = \frac{\overline{CT}}{\overline{MC}}$$

•••

حيث أن

$$\overline{CT} = I_{xy}$$

$$\overline{MC} = \overline{MA} - \overline{AC} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy}) - I_{xx} = \frac{1}{2} (I_{yy} - I_{xx})$$

بتبديل هذه العلاقات في العلاقة الأخيرة ينتج :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$

وبهذه العلاقة ينتهي البرهان على ما هو مطلوب .

ب - البرهان على صحة كون $\overline{A'T} = I_{11}$ و $\overline{B'T} = I_{22}$ ، يصار الى تحقيق المسافات المذكورة للعلاقة (1-50) .

ان قطر الدائرة هو $\overline{A'T} + \overline{B'T}$ وهو يساوي في نفس الوقت $I_{xx} + I_{yy}$.
اذاً نصف قطر الدائرة يساوي :

$$\frac{\overline{A'T} + \overline{B'T}}{2} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \quad (1.52)$$

باعتبار المثلث MCT المقطع من الدائرة والمكبر والممثل في الشكل (1-41 c) يتم التوصل
الى يلي :

$$\overline{MT} = \overline{MC} \cos 2 \varphi_0 + \overline{CT} \sin 2 \varphi_0 \quad (1.53)$$

لكن :

$$\overline{MT} = \overline{MA'} - \overline{A'T} = \frac{1}{2} (\overline{A'T} + \overline{B'T}) - \overline{A'T} = \frac{1}{2} (-\overline{A'T} + \overline{B'T})$$

$$\overline{MC} = -\frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy}) \quad ; \quad \overline{CT} = I_{xy}$$

بالتبديل في العلاقة (1-53) ينتج :

$$\frac{-\overline{A'T} + \overline{B'T}}{2} = -\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2 \varphi_0 + I_{xy} \sin 2 \varphi_0 \quad (1.54)$$

بطرح المعادلة (1-54) من المعادلة (1-52) ينتج :

$$\overline{A'T} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 - I_{xy} \sin 2\varphi_0$$

بمقارنة هذه العلاقة مع المعادلة (1-50) يؤكد أنها تساوي I_{11} . وبجمع المعادلتين (1-54) و (1-52) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\overline{B'T} = I_{22}$$

وبذلك ينتهي البرهان على ما هو مطلوب .

ب - إيجاد عزوم الدرجة الثانية $I_{\xi\xi}^1, I_{\eta\eta}^1, I_{\xi\eta}^1$ بالاستعانة بعزوم الدرجة الثانية I_{xx}, I_{yy}, I_{xy} .

يمكن استخدام دائرة عطالة مور - لاند لإيجاد عزوم الدرجة الثانية $I_{\xi\xi}^1, I_{\eta\eta}^1, I_{\xi\eta}^1$ للسطح F بالنسبة لمجموعة المحاور المتعامدة ξ و η التي تشكل مع المحاور x و y زاوية ما هي φ (شكل 1-42) وذلك باتباع الخطوات التالية :

١ - بواسطة عزوم الدرجة الثانية I_{xx}, I_{yy}, I_{xy} المعلومة ترسم دائرة عطالة مور - لاند ونقطة العطالة T بنفس الطريقة السابقة .

٢ - تقطع المحاور ξ و η (المطلوب حساب الدرجة الثانية بالنسبة لها) الدائرة في النقاط A_1 و B_1 (برسم الزاوية φ_1 يتم الحصول على A_1, B_1) .

٣ - توصل النقطتين A_1, B_1 مع بعض بخط مستقيم (يجب ان يمر الخط المذكور من النقطة M) .

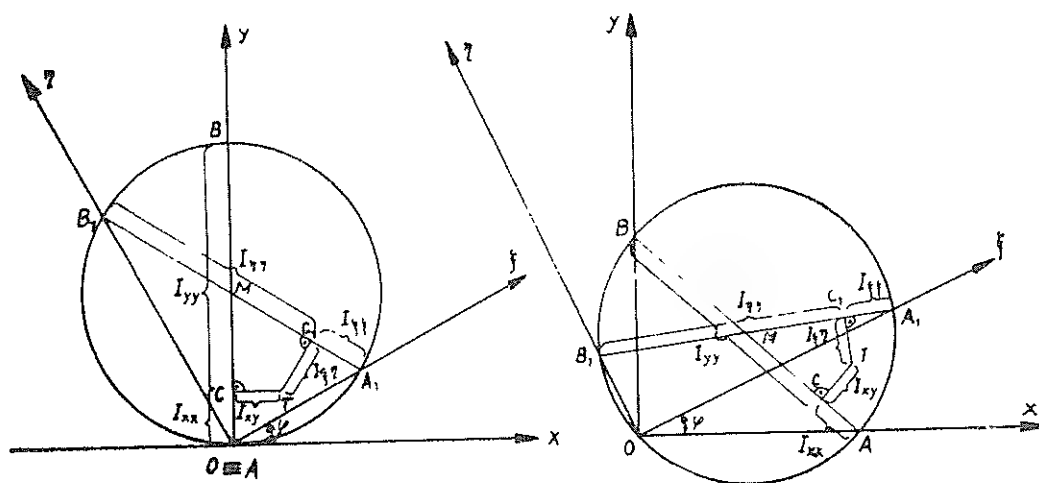
٤ - يقام من النقطة T عموداً على المستقيم A_1B_1 فيقطعه في النقطة C_1 .

٥ - من التصميم المذكور يتم الحصول بالقراءة على القيم المطلوبة :

$$\overline{A_1C_1} = I_{\xi\xi}^1 ; \overline{B_1C_1} = I_{\eta\eta}^1 ; \overline{C_1T} = I_{\xi\eta}^1$$

($I_{\xi\eta}^1$ سالبة لأنها تتجه بعكس اتجاه المحور x أي لأنها تقع في هذه الحالة على يسار $\overline{A_1B_1}$) .

$$I_{xy} > 0$$



شكل 1-42

١ - ٣ - ٤ أمثلة :

مثال 25 :

المقطع العرضي المرسوم في الشكل (1-43) .
المعطى : ابعاد المقطع العرضي واحداثيات مركز ثقله .
المطلوب :

- ١ - حساب عزوم الدرجة الثانية I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} للسطح F .
- ٢ - تعيين موضع محاور العطالة الرئيسية وإيجاد عزوم العطالة الرئيسية I_{11} , I_{22} .

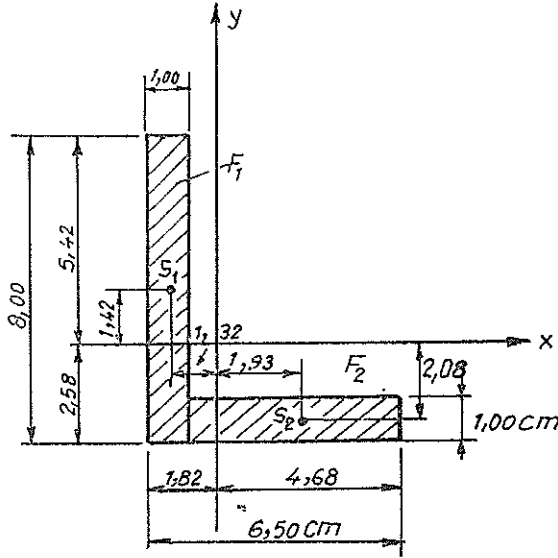
الحل :

١ - حساب عزوم الدرجة الثانية المركزية .

$$I_{xx} = \sum_i I_{xxi} = I_{xx1} + I_{xx2}$$

$$I_{xx1} = \frac{1,0 \cdot 8,0^3}{12} + (1,0 \cdot 8,0) \cdot 1,42^2 = 42,7 + 16,13 = 58,83 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx2} = \frac{5,5 \cdot 8,0^3}{12} + (1,0 \cdot 5,50) \cdot 2,08^2 = 0,5 + 23,82 = 24,32 \text{ cm}^4$$



شكل 1-43

ومنها ينتج :

$$I_{xx} = 58,83 + 24,32 = 83,15 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \sum_i I_{yyi} = I_{yy1} + I_{yy2}$$

$$I_{yy1} = \frac{8,0 \cdot 1,0^3}{12} + (8,0 \cdot 1,0) \cdot 1,32^2 = 0,7 + 13,92 = 14,62 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy2} = \frac{1,0 \cdot 5,5^3}{12} + (5,5 \cdot 1,0) \cdot 1,93^2 = 13,9 + 20,46 = 34,36 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = 14,62 + 34,36 = 48,98 \approx 49 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_i I_{xyi} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

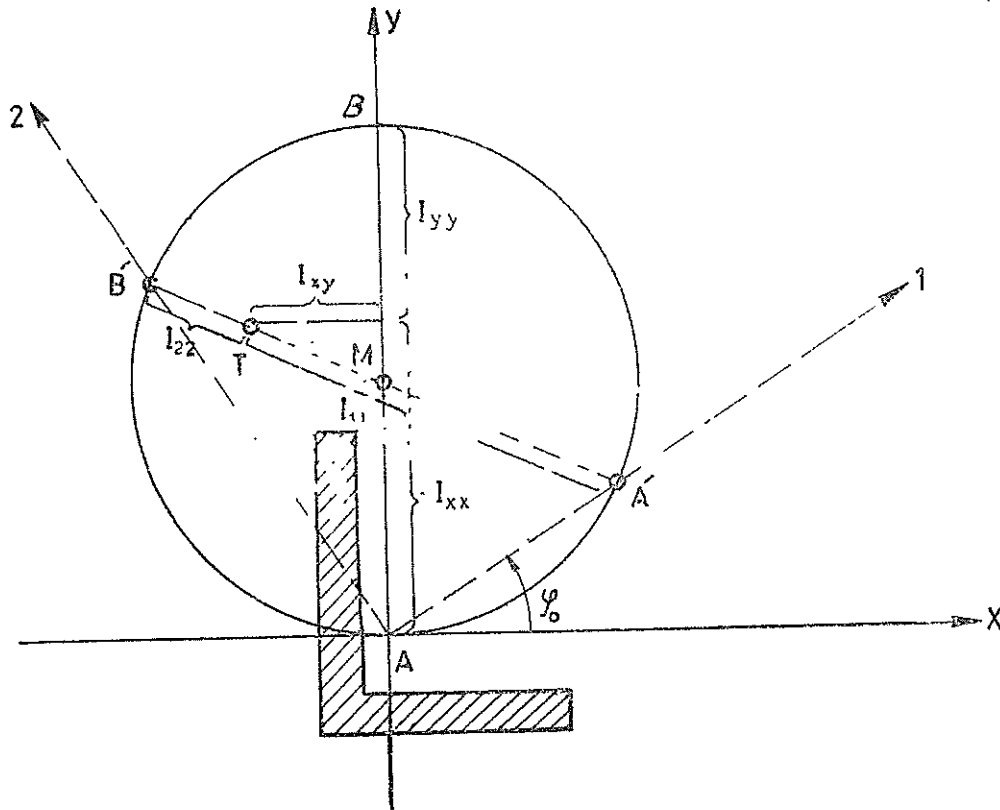
$$I_{xy1} = 0 + (8,0 \cdot 1,0) \cdot (1,32) (-1,42) = -15,2 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy2} = 0 + (5,50 \cdot 1,0) \cdot (-2,08) (1,93) = -21,9 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -15,2 - 21,9 = -37,1 \text{ cm}^4$$

٢ - تحديد وضع محاور المطالة الرئيسية تخليطياً بواسطة دائرة عطالة مور - لاند .

من الشكل (1-44) يقرأ:



شكل 1-44

$$\varphi_0 = 32^\circ 40' ; I_{11} = 106,9 \text{ cm}^4 ; I_{22} = 25,3 \text{ cm}^4$$

التدقيق :

$$I_{11} + I_{22} = 106,9 + 25,5 = 132,2 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx} + I_{yy} = 83,15 + 49 = 132,15 \text{ cm}^4$$

إذاً يمكن اعتبار العلاقة :

$$I_{11} + I_{22} = I_{xx} + I_{yy}$$

محققة . الفارق البسيط ناتج عن عدم دقة الرسم والقراءة دقة تامة .

تحديد وضع محاور العطالة الرئيسية تحليلياً :

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 (-37,1)}{49,0 - 83,1} = + 2,18$$

منها ينتج :

$$2 \varphi_0 = 65^\circ 20' ; \varphi_0 = 32^\circ 40'$$

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2 \varphi_0 \pm I_{xy} \sin 2 \varphi_0$$

$$\frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{83,1 + 49,0}{2} = 66,1 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = \frac{83,1 - 49,0}{2} = 17,1 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = - 37,1 \text{ cm}^4$$

$$\cos 2 \varphi_0 = 0,417 ; \sin 2 \varphi_0 = 0,909$$

بالتبديل في المعادلة الاخيرة ينتج :

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = 66,1 \pm 17,1 \cdot 0,417 \pm 37,1 \cdot 0,909$$

$$I_{11} = 106,9 \text{ cm}^4 ; I_{22} = 25,3 \text{ cm}^4$$

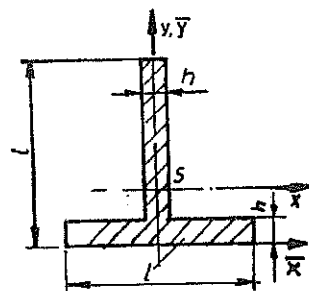
مثال 26 :

بروفيل على شكل T (شكل 1-45) .

المعطى : h, l .

المطلوب : حساب عزوم العطالة التالية :

$$I_{22} , I_{11} , I_{xy} , I_{yy} , I_{xx} , I_{\bar{y}\bar{y}} , I_{\bar{x}\bar{x}}$$



شكل 1-45

الحل :
أبعاد مركز الثقل :

$$\bar{x}_s = 0$$

$$\bar{y}_s = \frac{1}{2} \frac{l^2 + lh - h^2}{2l - h}$$

عزوم العطالة :

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{l^3 h}{3} + \frac{(l-h) h^3}{3} , \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{h l^3}{12} + \frac{(l-h) h^3}{12}$$

$$I_{xx} = I_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{y}_s^2 F = \frac{h l^3}{3} + \frac{(l-h) h^3}{3} - \frac{h}{4} \frac{(l^2 + lh - h^2)^2}{2l - h}$$

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{x}_s^2 F = I_{\bar{y}\bar{y}} ; \quad I_{xy} = 0$$

عندما يكون البروفيل رقيق الجدار ($h/l \ll 1$). تصبح العلاقات السابقة بشكل تقريبي (القيمة الحدية $h/l \rightarrow 0$) كما يلي :

$$\bar{x}_s = 0 ; \quad \bar{y}_s = \frac{l}{2} \frac{1 + \frac{h}{l} - \left(\frac{h}{l}\right)^2}{2 - \frac{h}{l}} \approx \frac{l}{4}$$

$$I_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{l^3 h}{3} ; \quad I_{xx} = \frac{5}{24} l^3 h ; \quad I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{yy} = \frac{l^3 h}{12}$$

يقصد بالعزوم الرئيسية ، عزوم العطالة الرئيسية المركزية . بسبب كون المحور y محور تناظر للمقطع العرضي فإن المحاور x ، y هي محاور مركزية رئيسية (محاور رئيسية) .

$$I_{11} = I_{xx} ; \quad I_{22} = I_{yy}$$

مسألة 27 :

بروفيل على شكل زاوية غير متساوية (شكل 46 - 47) :

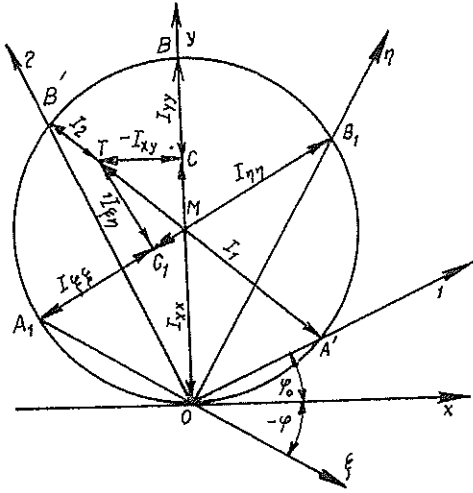
المعطى : $l_1 = 60 \text{ mm}$; $l_2 = 90 \text{ mm}$; $h = 10 \text{ mm}$

المطلوب : إيجاد

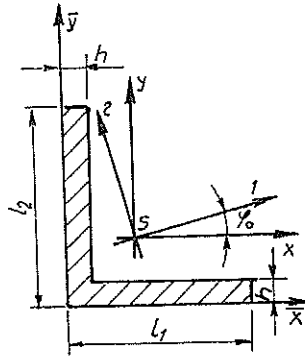
$$1. I_{xy} ; I_{yy} ; I_{xx} ; \overline{I_{xy}} ; \overline{I_{yy}} ; \overline{I_{xx}} - 1$$

٢ - تحليلياً : φ_0 , I_{11} , I_{22} , $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\eta}$ من أجل $\varphi = -30^\circ$.

٣ - بطريقة مور - لاند التخطيطية : φ_0 , I_{11} , I_{22} , $I_{\xi\xi}$, $I_{\eta\eta}$, $I_{\xi\eta}$ من أجل $\varphi = -30^\circ$.



شكل 1-47



شكل 1-46

الحل :

١ - ابعاد مركز الثقل :

$$\bar{x}_s = \frac{1}{2} \frac{l_1^2 + l_2 h - h^2}{l_1 + l_2 - h} = 1,57 \text{ cm} ; \bar{y}_s = \frac{1}{2} \frac{l_2^2 - l_1 h - h^2}{l_1 + l_2 - h} = 3,07 \text{ cm}$$

عزوم العطالة :

$$\overline{I_{xx}} = \frac{h l_2^3}{3} + \frac{(l_1 - h) h^3}{3} = 244,67 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{yy}} = \frac{h l_1^3}{3} + \frac{(l_2 - h) h^3}{3} = 74,67 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{xy}} = [0 - \left(\frac{l_1 - h}{2} + h \right) \frac{h}{2} (l_1 - h) h] + [0 - \frac{l_2}{2} \frac{h}{2} l_2 h] =$$

$$= - \frac{h^2}{4} (l_1^2 + l_2^2 - h^2) = - 29 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx} = \overline{I_{xx}} - \overline{y_s}^2 F = \frac{h l_2^3}{3} + \frac{(l_1 - h)h^3}{3} - \frac{h}{4} \frac{(l_2^2 + l_1 h - h^2)^2}{l_1 + l_2 + h}$$

$$= 113,34 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \overline{I_{yy}} - \overline{x_s}^2 F = \frac{h l_1^3}{3} + \frac{(l_2 - h)h^3}{3} - \frac{h}{4} \frac{(l_1^2 + l_2 h - h^2)^2}{l_1 + l_2 - h}$$

$$= 40,10 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \overline{I_{xy}} - \overline{x_s} \overline{y_s} F = \left[\frac{h^2}{4} (l_1^2 + l_2^2 - h^2) - \frac{h}{4} \cdot \frac{(l_1^2 + l_2 h - h^2)(l_2^2 + l_1 h - h^2)}{l_1 + l_2 - h} \right] = - 38,57 \text{ cm}^4$$

٢ - المحاور الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية :

$$\tan 2 \varphi_0 = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = 1,055 : \varphi_0 = 23,25^\circ$$

$$I_{1,1} \quad I_{2,2} \quad] = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{1,1} = 129,82 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{2,2} = 23,52 \text{ cm}^4$$

عزوم العطالة بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية ξ و η :

$$I_{\xi\xi} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi = 61,55 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi = 91,79 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi - I_{xy} \cos 2\varphi = 50,90 \text{ cm}^4$$

٣ - الحل التخطيطي بواسطة دائرة عطالة مور - لاند

يبين الشكل (1-57) الحل التخطيطي للمسألة ومنه يتم التوصل للنتيجة التالية :

$$I_{\xi\xi} = 61,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta\eta} = 91,8 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = 50,9 \text{ cm}^4$$

$$I_{11} = 129,85 \text{ cm}^4$$

$$I_{22} = 23,50 \text{ cm}^4$$

$$\varphi_0 = 23,5^\circ$$

١ - ٤ العزم المقاوم

سوف يرى في بحث الانعطاف ان قدرة تحمل الجائز لعزم الانعطاف تزداد كلما ازداد العزم المقاوم لمقطعه العرضي . اما العزم المقاوم فيؤخذ عادة بالنسبة للمحاور الرئيسية المركزية . عندما تنطبق المحاور y, x على المحاور الرئيسية كما هو الحال في المقاطع العرضية ذات الشكل I , [مثلا فلا حاجة لتغير اسم المحاور y, x وكتابته 1 و 2 . المهم ان ما يقصد في هذه الحالة من y, x انها المحاور الرئيسية . أما في المقاطع التي لا تنطبق فيها y, x على المحاور الرئيسية كما هو الحال في المقاطع العرضية ذات الشكل L مثلا فان من الضروري الانتباه لتسمية المحاور الرئيسية هناك بـ 1 و 2 . برسم مستقيمات توازي المحاور الرئيسية المركزية y, x للسطح F وتمس حوافه (تمس المنحني المغلف للمقطع العرضي) (شكل 1-48) ، يتم الحصول على الابعاد x_l, x_r وكذلك y_u, y_o (هذه الابعاد هي اكبر ابعاد للمقطع العرضي عن المحاور الاحداثية) . تسمى الكسور الناتجة عن قسمة عزوم المعاملة الرئيسية على القيم المطلقة للابعاد العظمى للمقطع العرضي عن المحاور الرئيسية ، والتي تكتب هكذا :

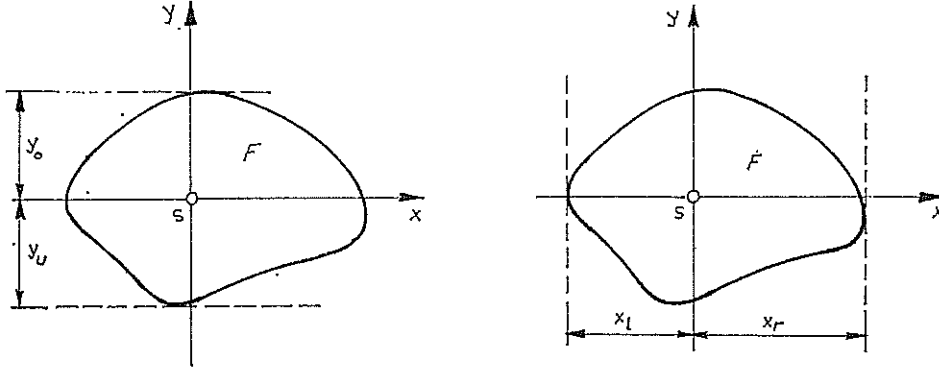
$$\left. \begin{aligned} W_{x,o} &= \frac{I_{xx}}{|y_o|} ; \quad W_{x,u} = \frac{I_{xx}}{|y_u|} \\ W_{y,r} &= \frac{I_{yy}}{|x_r|} ; \quad W_{y,l} = \frac{I_{yy}}{|x_l|} \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

بالعزوم المقاومة للسطح F بالنسبة لمحاورها الرئيسية المركزية . اما واحدها فهي مكتوب
واحدة الطول ..

حالات خاصة :

عندما تكون $x_r = x_l$, $y_o = y_u$ عندئذ يملك السطح F عزمين مقاومين فقط وهما :

$$W_{x,o} = W_{x,u} = W_x \quad ; \quad W_{y,r} = W_{y,l} = W_y$$

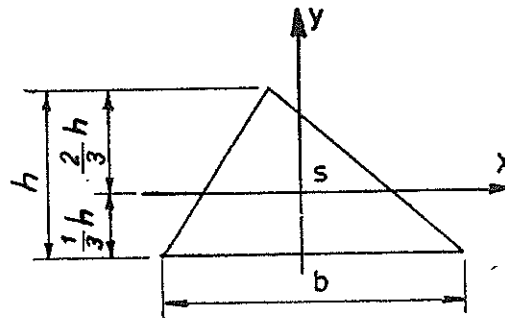


شكل 1-48

مثال 28 :

المعطى : ابعاد المثلث b , h (شكل 1-49) .

المطلوب : حساب العزوم المقاومة W_{x_o} , W_{x_u} .



شكل 1-49

الحل :

بسبب كون :

$$y_u = \frac{1}{3} h \quad ; \quad y_o = \frac{2}{3} h$$

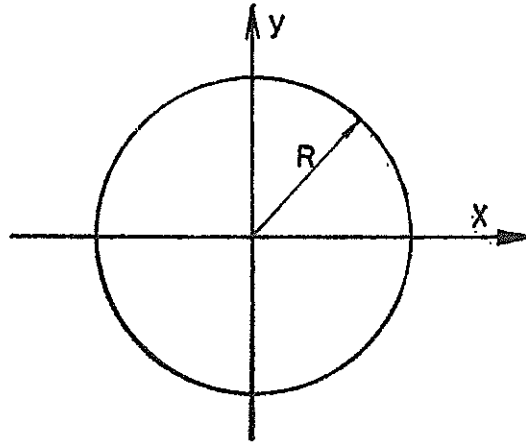
فإن العزوم المقاومة ، حسب العلاقة (1-55) هي :

$$\left. \begin{aligned} W_{x_o} &= \frac{I_{xx}}{|y_o|} = \frac{bh^3}{36} \cdot \frac{3}{2h} = \frac{bh^2}{24} \\ W_{x_u} &= \frac{I_{xx}}{|y_u|} = \frac{bh^3}{36} \cdot \frac{3}{h} = \frac{bh^2}{12} \end{aligned} \right\} (1.56)$$

مثال 29 :

المعطى : نصف قطر الدائرة R (قطر الدائرة D) (شكل 1-50) .

المطلوب : حساب العزم المقاوم W_x .



شكل 1-50

الحل :

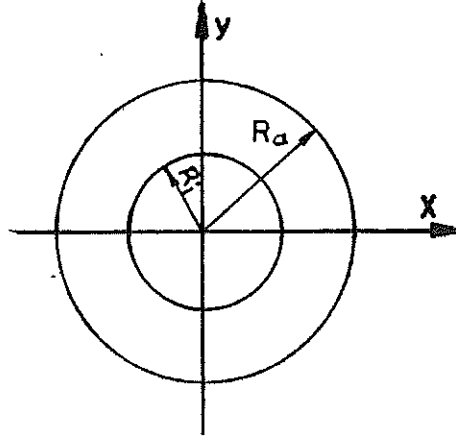
لأسباب التناظر تتساوى العزوم المقاومة للدائرة بالنسبة لجميع المحاور ويمكن حسابها ، حسب العلاقة (1-55) ، وذلك بعد تبديل $y_o = y_u = y_R = R$ كالآتي :

$$W_x = \frac{I_{xx}}{y_R} = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0.1 D^3 \quad (1.57)$$

مثال 30 :

المعطى : انصاف اقطار الحلقة الدائرية (شكل 1-51) الخارجي R_a والداخلي R_i .

المطلوب : حساب العزم المقاوم W_x .



شكل 1-51

الحل :

لأسباب التناظر تتساوى عزوم المقاومة للحلقة الدائرية بالنسبة لجميع المحاور ويمكن حسابها ، حسب العلاقة (1-55) ، بعد تبديل $y_R = R_a$ ، كالآتي :

$$\left. \begin{aligned} W_x = \frac{I_{xx}}{y_R} &= \frac{\pi}{2 R_a} (R_a^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32 D_a} (D_a^4 - D_i^4) \\ &= \frac{0,1}{D_a} (D_a^4 - D_i^4) \end{aligned} \right\} (1.58)$$

حيث أن $D_i = 2 R_i$; $D_a = 2 R_a$

مثال 31 :

بروفيل خشبي كما يشير الشكل (1-52) .

المعطى : أبعاد البروفيل .

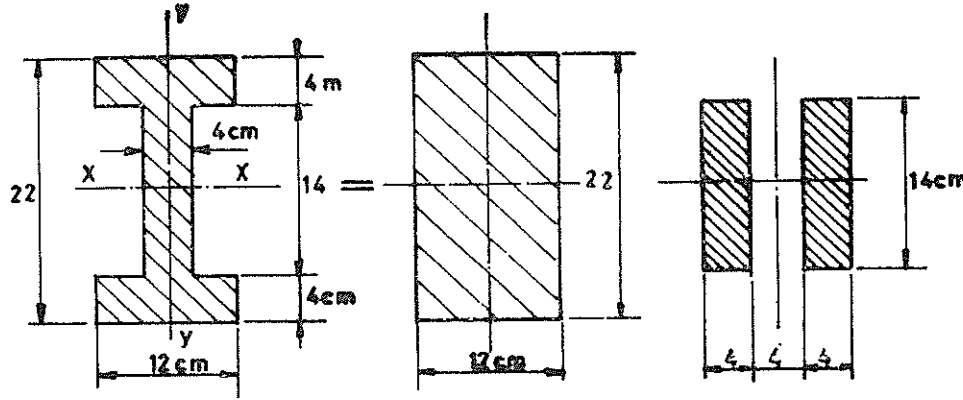
المطلوب : حساب عزوم العطالة I_{yy} و I_{xx} والعزوم المقاومة W_x و W_y .

الحل :

لأسباب التناظر فإن مركز ثقل المقطع العرضي يقع في منتصفه .

عزوم العطالة :

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^3 I_{xxi} = \frac{1}{12} [12.23^3 - 2.4.14^3] = 88.9 \text{ cm}^4$$



شكل 1-52

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^3 I_{yyi} = \frac{4 \cdot 12^3}{12} + \frac{14 \cdot 4^3}{12} + \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 1227 \text{ cm}^4$$

العزوم المقاومة :

$$W_x = \frac{I_{xx}}{y_R} = \frac{8819}{11} = 802 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_{yy}}{x_R} = \frac{1227}{6} = 205 \text{ cm}^3$$

١ - نصف قطر العطالة ، قطع ناقص العطالة

ليكن I_{kk} هو عزم عطالة السطح F بالنسبة للمحور k ولتكن F هي مساحة ذلك السطح . بتشكيل الكسر I_{kk}/F ثم جذر النتيجة يتم الحصول على قيمة واحدتها هي واحدة الطول والتي سيرمز لها بـ i_{kk} وتسمى بنصف قطر عطالة السطح F بالنسبة للمحور k (المحاور التي نسب عزم العطالة اليه) اما علاقتها فتكتب بالشكل التالي :

$$i_{kk} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{F}} = (i_k) \quad (1.59)$$

لتكن 1 (s_1) و 2 (s_2) هي محاور العطالة الرئيسية للسطح F المارة بنقطة ما (ولتكن النقطة 0) من السطح المذكور ، عندئذ تكون انصاف اقطار العطالة التابعة لها هي :

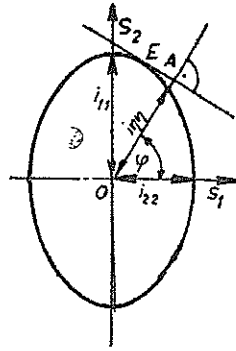
$$i_{11} = \sqrt{\frac{I_{11}}{F}} = (i_1) ; i_{22} = \sqrt{\frac{I_{22}}{F}} = (i_2)$$

ان جميع قيم انصاف اقطار العطالة بالنسبة لاي من المحاور الاخرى التي تمر من النقطة 0 تقع بين هاتين القيمتين . برسم القيمة i_{11} عموديا على المحور 1 (s_1) ابتداء من نقطة المركز 0 والى كلا الجهتين ثم برسم القيمة i_{22} عموديا على المحور 2 (s_2) ابتداء من نقطة المركز 0 والى كلا الجهتين يتم انشاء قطع ناقص انصاف اقطاره هي انصاف اقطار العطالة الرئيسية (شكل 1-53) . يسمى القطع الناقص المذكور بقطع ناقص العطالة .

اما معادلته فهي :

$$\frac{s_1^2}{i_{22}^2} + \frac{s_2^2}{i_{11}^2} = 1 \quad (1.59 b)$$

حيث ان s_1, s_2 هي احداثيات نقطة ما من القطع الناقص .



شكل 1-53

يسمى قطع ناقص العطالة العائد للمحاور المركزية بقطع ناقص العطالة المركزي أو باختصار القطع الناقص المركزي . اما صفات القطع الناقص المذكور فهي :

برسم المماس t على القطع الناقص ، الذي يوازي محور ما يمر من النقطة 0 (مثلا المحور η) فان البعد العمودي للمماس عن المحور المذكور (هنا η) يساوي نصف قطر العطالة بالنسبة لذلك المحور (هنا $i\eta\eta$) (شكل 1-53) .

البرهان : ان معادلة المماس على القطع الناقص ، بنقطة تماسه E ذات الاحداثيات s_{1E}, s_{2E} هي :

$$\frac{s_1 s_{1E}}{i_{22}^2} + \frac{s_2 s_{2E}}{i_{11}^2} = 1$$

من الشكل (1-53) يمكن قراءة العلاقات التالية :

$$\overline{OA} = i\eta\eta = s_{1E} \cos \varphi + s_{2E} \sin \varphi$$

أو :

$$\frac{s_{1E} \cos \varphi}{i\eta\eta} + \frac{s_{2E} \sin \varphi}{i\eta\eta} = 1$$

باجراء مقارنة بين الحدود يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{s_1}{i_{22}^2} = \frac{\cos \varphi}{i\eta\eta}, \quad \frac{s_2}{i_{11}^2} = \frac{\sin \varphi}{i\eta\eta}$$

منها يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{s_1^2}{i_{22}^2} + \frac{s_2^2}{i_{11}^2} + \frac{i_{22}^2 \cos^2 \varphi}{i\eta\eta^2} + \frac{i_{11}^2 \sin^2 \varphi}{i\eta\eta^2} = 1$$

بالحصول على هذه العلاقة ينتهي البرهان على ان $\overline{OA} = i\eta\eta$.

عندما تتساوى عزوم العطالة الرئيسية I_{22}, I_{11} فان قطع ناقص العطالة يتحول الى دائرة .
عندها تتساوى كافة عزوم العطالة بالنسبة لجميع المحاور المارة بالنقطة 0 ، اي تصبح جميع المحاور المارة من النقطة 0 محاور عطالة رئيسية وبناء على ذلك ينبغي ان ينعدم جداء العطالة بالنسبة لأي مجموعة من المحاور تمر من النقطة 0 .

ان الدائرة والمربع وكافة المضلعات المنتظمة بالنسبة للمحاور المركزية هي أمثلة على ذلك .

مثال 32 :

المعطى : ابعاد المستطيل h, b (شكل 1-54) .

المطلوب : حساب انصاف اقطار العطالة المركزية i_{xx}, i_{yy} ثم اشتقاق انصاف اقطار العطالة i_{yy}, i_{xx} المائدة للمربع باعتباره حالة خاصة للمستطيل .

الحل :

عزوم عطالة المستطيل :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

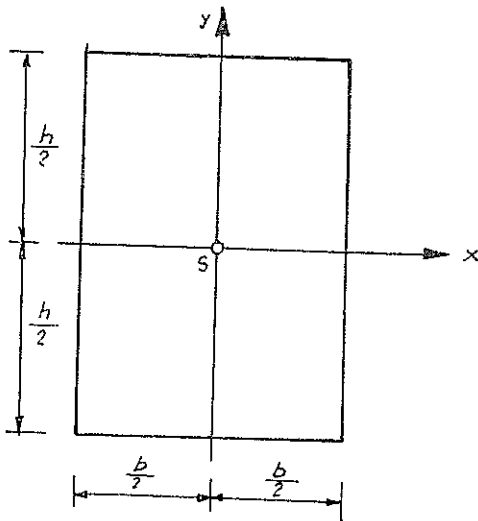
انصاف أقطار عطالة المستطيل :

$$i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = 0,289 h$$

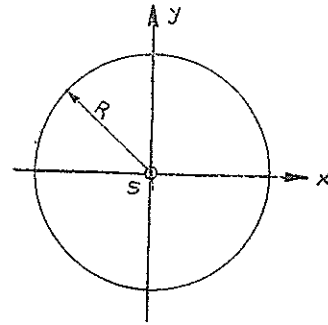
$$i_{yy} = \sqrt{\frac{I_{yy}}{F}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = 0,289 h$$

حالة خاصة : $h=b=a$ (يتحول المستطيل الى مربع طول ضلعه a) .

$$i_{xx} = i_{yy} = i = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = 0,289 a$$



شكل 1.54



شكل 1.55

مثال 33 :

المعطى : نصف قطر الدائرة R (شكل 1-55) .

المطلوب : حساب أنصاف أقطار العطالة المركزية i_{xx} , i_{yy} والعزوم المقاومة .

الحل :

أنصاف أقطار العطالة :

$$i_{xx} = i_{yy} = \sqrt{\frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

$$W_x = W_y = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{R} = \frac{\pi R^3}{4}$$

١ - إيجاد عزوم الدرجة الثانية تخطيطياً

من أجل السطوح ذات الاشكال غير المنتظمة والتي يصعب حساب عزوم الدرجة الثانية التابعة لها بطريقة تحليلية ، يفضل استخدام الطريقة التخطيطية التي اوجدها العالم مور (Otto MOHR) التالية :

يقسم السطح المدروس بموازاة المحور الذي يطلب حساب عزم العطالة بالنسبة له الى شرائح مستطعية رقيقة . عندئذ يتألف عزم عطالة السطح بالنسبة للمحور y مثلاً من مجموع عزوم عطالة الشرائح بالنسبة لنفس المحور (المحور y) . لكن عزوم عطالة الشرائح هذه تتألف من عزوم العطالة المحورية (الذاتية) للشرائح ومن حدود شتاينر التابعة لها ، بحيث يمكن الكتابة :

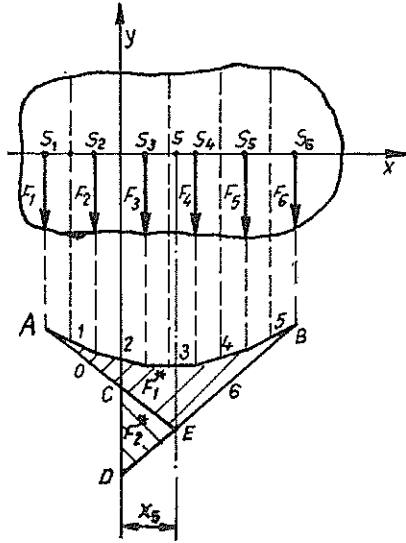
$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n I_{yys i} + \sum_{i=1}^n x_i^2 F_i$$

حيث أن n هو عدد الشرائح و F_i هي مساحة الشريحة i ، x_i هو بعد مركز ثقل الشريحة i عن المحور y (البعد العمودي) و $I_{yys i}$ هو عزم عطالة الشريحة i بالنسبة لمحور مركزي يوازي المحور y .

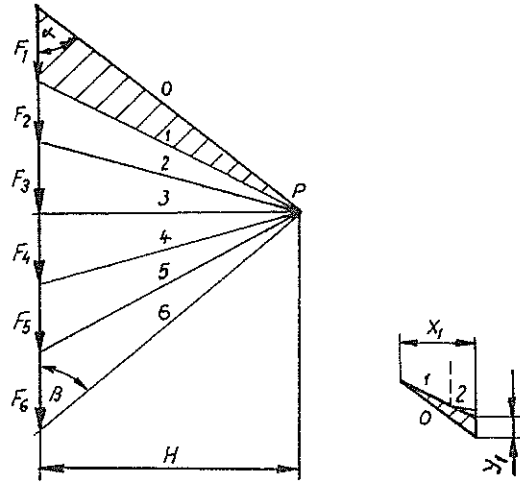
عندما تكون الشرائح رقيقة قدر الامكان عندئذ يمكن أهمل عزوم العطالة $I_{yys i}$ بالنسبة لحدود شتاينر (اذا ما قورنت مع حدود شتاينر) وبذلك يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$I_{yy} \approx \sum_{i=1}^n x_i^2 F_i \quad (1-60)$$

تزداد هذه العلاقة التقريبية دقة كلما صغرت سماكة الشريحة .
 بتمثيل مساحات السطوح F_i كقوى تؤثر في مراكز ثقل الشرائح السطحية التابعة لها (على
 سبيل المثال قيمة مساحة F_1 تمثل كقوة تؤثر في مركز ثقل الشريحة 1 . أما منحناها فيوازي
 محور النسب ، هنا المحور y) يمكن اعتقاداً على مخطط القوى ، الذي يبلغ بعده القطبي H ،
 من انشاء مضلع جبلي (شكل 1-56) .



شكل 1-56



شكل 1-57

يتطابق ، في أمكنة تقسيم السطوح ، مضلع الخطوط المنكسر مع المنحني الفعلي ، لذا يمكن
 أيضاً رسم منحني معدل يمر من هذه النقاط وبذلك تدخل عزوم العطالة المركزية (الذاتية)
 للشرائح بعين الاعتبار .
 يوجد ، بين مخطط المكان ومخطط القوى التشابه الهندسي التالي (بسبب توازي أضلاع الاشكال
 الموجودة) (شكل 1-57) :

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{F_i}{H}$$

إذاً :

$$y_i = \frac{F_i}{H} x_i$$

ينبغي مراعاة الانتباه لما يلي :

ان x_i , y_i هي أبعاد ، إذاً وحداتها هي واحدة الطول (cm مثلا) أما F_i فهي مساحة ووحدتها هي مربع واحدة الطول (cm^2 مثلا) . تتطلب العلاقة السابقة إذاً أن تكون واحدة H هي مربع واحدة الطول (cm^2) .

من اجل السطح المحصور بين المضلع الجبلي وبين الشعاع الجبلي الأول والاخير الممددان حتى المحور y (السطح المباشر في الشكل 1-56) والذي يتألف من مجموعة مثلثات مساحة كل منها :

$$\Phi_i = \frac{1}{2} x_i y_i = \frac{x_i^2 F_i}{H}$$

يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} x_i y_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 F_i}{2H} = \frac{1}{2H} \sum_{i=1}^n x_i^2 F_i$$

من الحد الاول والاخير ينتج :

$$2H\Phi = \sum_{i=1}^n x_i^2 F_i$$

بالمقارنة مع (1-60) يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$I_{yy} = 2H\Phi = 2H(F_1^* + F_2^*) \quad (1.61)$$

حيث أن $\Phi = F_1^* + F_2^*$ تمثل مساحة السطح المباشر في الشكل (1-56) وهو السطح المحصور بين المضلع الجبلي وبين الشعاع الجبلي الاول والشعاع الجبلي الاخير الممددان حتى المحور y .

من اجل المحور المركزي تنعدم F_2^* وبذلك تصلح العلاقة التالية :

$$I_{yy} = 2H F_1^* \quad (1.62)$$

ان استخدام المعادلة (1-61) وكذلك العلاقة (1-62) يفترض رسم السطح F وكذلك السطح

Φ (أي F_1^* , F_2^*) بأبعادها الفعلية (الطبيعية) . أما إذا لم ترسم السطوح بأبعادها الفعلية (أي إذا رسمت بقياس ما) عندئذ يلزم ادخال ذلك بعين الاعتبار وذلك بادخال عامل المقياس m_i وبذلك تصبح العلاقة (1-61) بالشكل التالي :

$$I_{yy} = 2 m_i H \Phi \quad (1.63)$$

ان واحدة H هي واحدة السطوح أي em^2 أما المقياس (عامل المقياس) m_i فقد تكون واحداته من الدرجة الثانية (التربيعية) او من الدرجة الرابعة لمقياس الطول m_l (على سبيل المثال $m_l = 1/10$) وذلك حسبما تكون F , Φ مرسومة . فاذا رسم السطح F بأبعاده الفعلية (او رسم مصغراً ، لكن قيم السطوح F_i اخذت من المخطط المصغر المعطى ثم حسبت بأبعادها الحقيقية) وكان فقط سطح المضلع الجلي Φ ممثلاً بتصغير فان m_i تكون من الدرجة الثانية لمقياس الطول . (وهي تساوي $1/m_l^2$) . لكن اذا رسم ايضاً السطح F (يعني F_i , Φ) بتصغير وقرأت ابعاد F_i مباشرة من المخطط بواسطة المقياس (دون اعادة القيم الى ابعادها الطبيعية) فان m_i تكون من الدرجة الرابعة لمقياس الطول m_l (وهي $1/m_l^4$) .

إذا اختيرت ، في مخطط القوى ، الراوية $\alpha = \beta = 45^\circ$ ، بذلك ينتج عند اختيار $H = F/2$ (F هي مساحة المقطع العرضي) ما يلي :

$$I_{yy} = F \cdot \Phi \quad (1.64)$$

للتمكن أيضاً من إيجاد جداء العطالة تخطيطياً ، ينبغي تعيين قيم كل من I_{yy} , I_{xx} وكذلك I_{xy} (انبعاثة للمحور ξ الذي يميل بالزاوية φ) بواسطة طريقة مور المذكورة آنفاً . ثم يلجأ بعد ذلك لايجاد نقطة العطالة T بواسطة دائرة عطالة مور - لاند وذلك اعتماداً على القيم I_{xx} , I_{yy} و I_{xy} . بتحديد النقطة T تحدد قيمة I_{yy} أيضاً كما يصبح بالإمكان إيجاد عزوم العطالة الرئيسية قيمة وموضعاً .

الفصل الثاني

الاجهادات

٢ - ١ مفهوم الاجهاد

تمتد الدراسات التالية دون استثناء على الاجسام المتينة (feste Körper) القابلة للتغير التي يمتلك فراغها بنفس المادة والتي لا تحتوي على فجوات . يتحقق مطلب التجانس لمادة الجسم المدروس في المواد الفعلية بشكل تقريبي فقط .

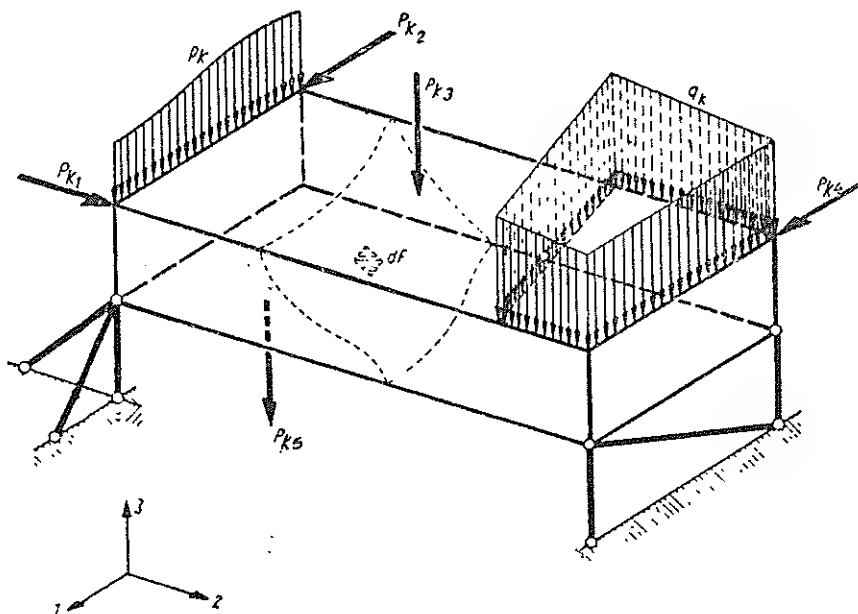
من المعلوم ان المواد المستخدمة في الحياة العملية هي اما ان تكون غير بلورية (amorph) او بلورية (kristallin) .

تتألف المواد غير البلورية ، كما هو الحال في الزجاج والبكليت واللدائن والراتنجات من جزيئات غير منتظمة ذات امتداد ضئيل بحيث تتحقق فيها عملياً فرضية التجانس . ان امثال هذه المواد غير البلورية تشير في كافة اتجاهات الفراغ الى نفس السلوك الفيزيائي وهي كما يقال عنها متماثلة المناحي (isotrop) .

تتألف المواد البلورية التي تعود تبعية كافة المعادن اليها، بسبب طريقة صنعها بطريقة الانصهار، من مزيج بلوري . عندما تشير كافة البلورات ضمن صفاتها الفيزيائية الى ارتباط باتجاه ما (عدم التماثل في المناحي Anisotropie) فان الترتيب الاعباطي (الذي لا يشع قاعده معينة) للبلورات الموجودة في المادة سيحقق بالرغم من ذلك التماثل في المناحي . بما ان ابعاد البلورات صغيرة جداً بالنسبة لابعاد العناصر الانشائية ويمكن اهمالها لذلك يمكن اعتبار هذا التركيب البلوري متجانساً .

فيما يلي سوف تتم دراسة جسم متين قابل للتغير وموجود تحت تأثير قوى معينة ومُسند استناداً صلباً . تشكل قوى الاستناد (ردود افعال المساند) مع القوى الخارجية مجموعة متوازنة (مجموعة توازنية) من القوى (شكل 2-1) .

كما قد تم تعلمه في علم سكون الاجسام الصلبة (متنايك الاجسام الصلبة) بان القوى الخارجية

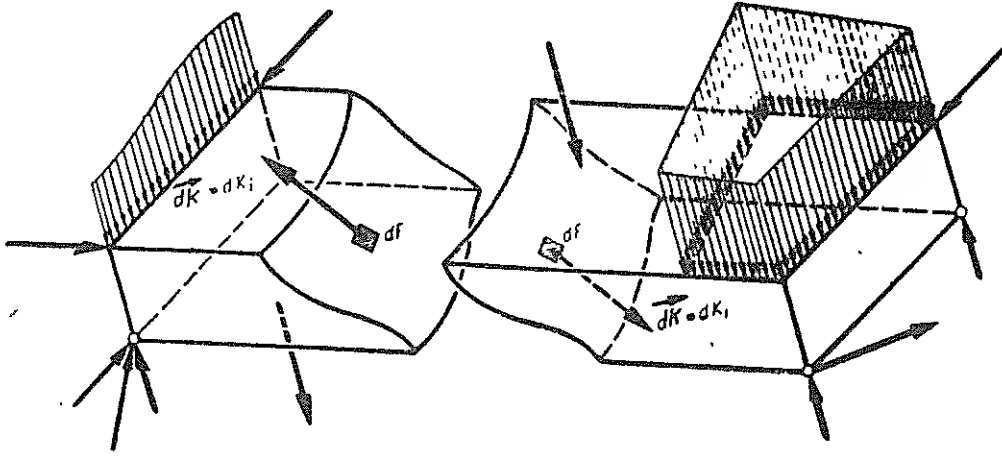


شكل 2-1

مجموعة مع ردود افعال المساند (قوى الاستناد) تولد داخل الجسم ردود افعال داخلية (وهي ما قد سميت بقيم القطع) تؤدي لتأثيره . بتخيل اجراء قطع في جسم متوازن وشطره الى جزئين فان ردود الافعال الداخلية تجعل مرئية .

ينبغي ان يكون كل جزء من اجزاء الجسم بعد القطع على حدة (تحت تأثير الحمولات الخارجية وردود الافعال الداخلية) ، بسبب اعتبارات التوازن ، متوازنا (في حالة توازن) ايضاً كما ينبغي ان تكون ردود الافعال الداخلية التي تؤثر على كل من ضفتي القطع متساوية ومتعاكسة . اما ذلك فيتحقق عندما تؤثر على سطحي القطع قوى داخلية تشكل مجموعة مع القوى الخارجية وردود افعال المساند لكل جزء من الجزئين ، مجموعة متوازنة (مجموعة توازنية) . تقل عبر سطوح القطع من الضفة الاولى للضفة الثانية قوى متساوية ومتعاكسة ولكنها بسبب التجانس المفروض للجسم تتغير بشكل عام من مكان لكان آخر وتوزع على سطح المقطع العرضي بشكل قابل للاشتقاق المستمر . اذاً فهذه القوى هي قوى سطحية (قوى تتوزع على السطح) وتسمى بالاجهادات .

اذا أثرت على العنصر السطحي dF المقطع من سطح القطع ، قوة وحيدة $dK = dK_i$ (شكل 2-2) فان الشعاع المعرف بالعلاقة التالية :



شكل 2-2

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{dk}{dF} \\ \text{أو كذلك} \\ t_i &= \frac{dK_i}{dF} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

يسمى شعاع الاجهاد وهو ينطبق على اتجاه القوة اما واحدته فهي واحدة قوة سطحية (قوة موزعة على سطح) (اذا كانت dk هي كامل القوى المنقولة بواسطة السطح dF عندئذ يسمى حاصل قسمه هذه القوة على السطح dF بالاجهاد ، واحدته المستعملة هي kp/cm^2) .

يعطي الجداء الناتج عن ضرب شعاع الاجهاد بمساحة العنصر السطحي العائد له ، القوة

$$dk \equiv dK_i$$

التي ينقلها العنصر السطحي dF .

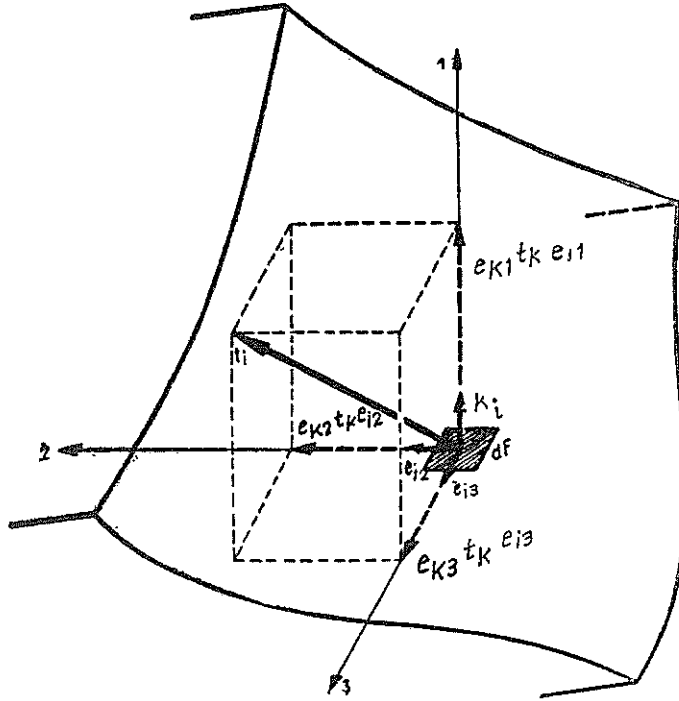
$$\left. \begin{aligned} t dF &= dk \\ \text{أو كذلك} \\ t_i dF &= dK_i \end{aligned} \right\} \quad (2.1b)$$

لتبنت ، في العنصر السطحي dF ، مجموعة نسب متعامدة (مجموعة محاور احداثية متعامدة) اشعتها الرئيسية هي :

$$e_3 \equiv e_{i3} ; e_2 \equiv e_{i2} ; e_1 \equiv e_{i1}$$

بحيث ينطبق الشعاع الواحد $e_i \equiv e_{i1}$ على الشعاع الناظمي للعنصر السطحي dF (شكل 2-3). على العموم يكون شعاع الاجهاد بالنسبة لسطح dF منحرفا ولهذا السبب يمكن إسقاطه على محاور النسب وبذلك يتم التوصل لمركبات شعاع الاجهاد التالية :

$$t.e_1 ; t.e_2 ; t.e_3$$



شكل 2-3

او كذلك :

$$t_k e_{k1} ; t_k e_{k2} ; t_k e_{k3}$$

وبهذا يمكن تمثيل شعاع الاجهاد بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} t &= (t.e_1) e_1 + (t.e_2) e_2 + (t.e_3) e_3 \\ \text{او كذلك} \\ t_i &= t_k e_{k1} e_{i1} + t_k e_{k2} e_{i2} + t_k e_{k3} e_{i3} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

تسمى مركبة شعاع الاجهاد الناعمية (العمودية) على السطح dF والمثلة بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= t \cdot e_1 \\ \sigma_1 &= t_k e_{k1} \end{aligned} \right\} \quad (2-3) \quad \text{أو كذلك}$$

بالاجهاد الناعمي ويرمز له بالحرف σ وتسمى مركبات شعاع الاجهاد (مركبتى شعاع الاجهاد) التي تقع على سطح المقطع العرضي (التي تقع مماسية على سطح المقطع العرضي) والمثلة بالشكل التالي:

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= t \cdot e_2 \\ \tau_2 &= t_k e_{k2} \end{aligned} \right\} \quad (2-4) \quad \text{أو كذلك}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_3 &= t \cdot e_3 \\ \tau_3 &= t_k e_{k3} \end{aligned} \right\} \quad (2-5) \quad \text{أو كذلك}$$

بالاجهادات المماسية أو الاجهادات القاطعة (إجهادات القص) ويرمز لها بالحرف τ . بتبديل العلاقة (2-1) في العلاقات السابقة ينتج :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{dk \cdot e_1}{dF} \\ \sigma_1 &= \frac{dK_k e_{k1}}{dF} \end{aligned} \right\} \quad (2-6) \quad \text{أو كذلك}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \frac{dk \cdot e_2}{dF} \\ \tau_2 &= \frac{dK_k e_{k2}}{dF} \end{aligned} \right\} \quad (2-7) \quad \text{أو كذلك}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_3 &= \frac{dk \cdot e_3}{dF} \\ \tau_3 &= \frac{dK_k \cdot e_{k3}}{dF} \end{aligned} \right\} \quad (2-8) \quad \text{أو كذلك}$$

أو :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{dN}{dF} \\ \tau_2 &= \frac{dT_2}{dF} \\ \tau_3 &= \frac{dT_3}{dF} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

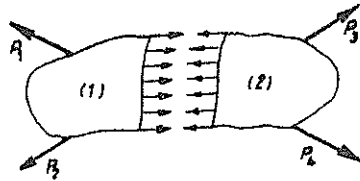
حيث أن dN هي القوة الناعمية التي يحملها dF .

وأن dT_2 , dT_3 هي القوى المماسية أو القوى القاطعة (قوى القص) التي يحملها dF . ان الاجهادات هي توابع مكانية (Ortsfunktionen) :

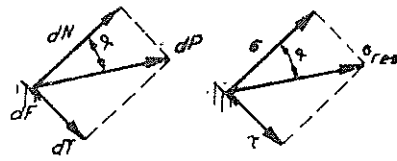
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1 (x_1, x_2, x_3) \\ \tau_2 &= \tau_2 (x_1, x_2, x_3) \\ \tau_3 &= \tau_3 (x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

وهي تتعلق علاوة على ذلك من إتجاه القطع في النقطة المدروسة . سوف تم ، فيما بعد ، العودة لهذه الملاحظة بشكل مفصل .

نما سبق ذكره يلاحظ أن تحليل الاجهاد الفعلي الى مركباته يتم حسب قاعدة متوازي الاضلاع. كما ويلاحظ ايضاً ، في الحالة الفراغية ، ظهور ثلاثة مركبات للاجهاد تؤثر على السطح هما اجهاد ناظمي واحد واجهادين مماسين يتعامد كل منهما على الآخر . اما في الحالة المستوية (شكل 2.4) فتظهر لشعاع الاجهاد مركبتين فقط هما إجهاد ناظمي واحد واجهاد مماسي واحد أيضاً (شكل 2.5) .



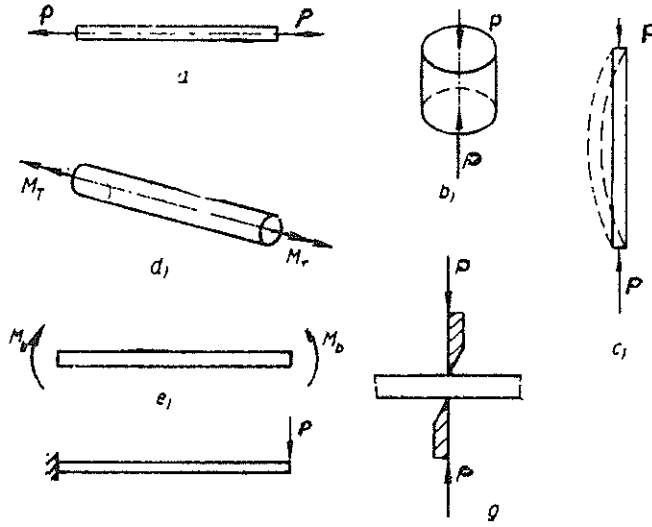
شكل 2.4



شكل 2.5

يعرف الاجهاد الناعمي الذي يخرج من العنصر السطحي بموجب (اجهاد شد) . بسبب العلاقة الخطية بين الاجهادات (Spannungen) وتغيرات الشكل (Deformationen) التي ستفترض فيما بعد ، يمكن إعادة المسائل الواقعية المعقدة الى مجموعة من المسائل الجزئية . اما النتيجة الفعلية فيتم الحصول عليها بجمع النتائج الافردية لكل من المسائل الجزئية جبرياً أو

أو كذلك هندسياً (قانون التنضد أو ما يسمى أيضاً بقانون جمع الآثار) . أما أهم حالات التحميل التي تظهر في الحياة العملية فهي التي سيتم عرضها في الشكل (2.6) وهي تعني منفردة:



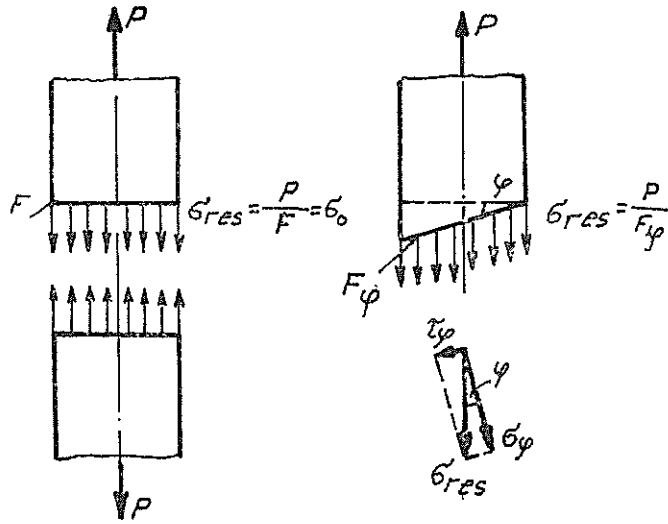
شكل 2-6

- a - شد صافي (reiner Zug) ، b - ضغط صافي (reiner Druck)
c - تحنّب قضيب نحيف مضغوط (مشكلة إستقرار)
(Stabilitätsproblem, Knickung eines schlanken Druckstabes)
d - قتل (Drillung oder Torsion) ، e - انعطاف صافي (reine Biegung)
f - انعطاف قوة عرضية (Querkraftbiegung) ، g - القص (التحميل المماسي الصافي)
(Abscherung, reine Schubbeanspruchung).

٢ - ٢ حالة الاجهاد الخطية (المحورية ، وحيدة المحور)

يشير الاجهاد المحصل σ_{res} في هذه الحالة دائماً باتجاه محور القضيب (الاوسط) . فيما يلي سوف تستخدم فرضية توزيع الاجهادات على المقطع العرضي توزيعاً منتظماً كأساس لهذه الفقرة. تصلح هذه الفرضية في الامكنة التي تبعد بعداً كافياً عن مكان تأثير القوى .

حسب نظرية ده سانت فينانت (DE SAINT-VENANT) فان تأثير نقل القوى يتخامد بسرعة . يعطي تطبيق شرط توازن القوى الافقية على قطع ناظمي (عمودي) على محور القضيب (الوسط) العلاقة التالية :



شكل 2-7

$$\sigma_0 = \frac{P}{F} \quad (2.11)$$

ويعطي من اجل سطح قطع يميل بزاوية ما (بالنسبة لمحور القضيب الاوسط) (شكل 2-7)،
العلاقة الآتية :

$$\sigma_{res} = \frac{P}{F_\phi} = \frac{P}{F} \cos \phi = \sigma_0 \cos \phi \quad (2.12)$$

بتحليل الاجهاد σ_{res} بالاتجاهين الناطقي على سطح القطع والمماسي عليه ، يتم الحصول على
المركبات التالية :

$$\begin{aligned} \sigma_\phi &= \sigma_{res} \cdot \cos \phi = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + \cos 2\phi) \\ \tau_\phi &= \sigma_{res} \cdot \sin \phi = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\phi \end{aligned} \quad (2.13)$$

بكتابة المعادلات السابقة (1-4) كما يلي :

$$\sigma_\phi - \frac{\sigma_0}{2} = \frac{\sigma_0}{2} \cos 2\phi$$

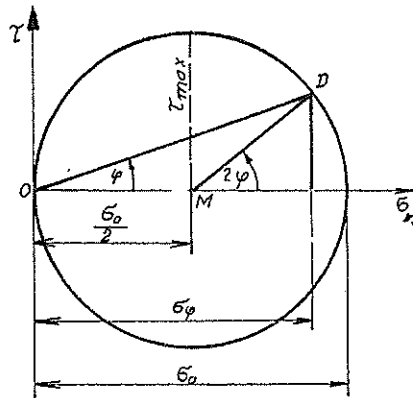
$$\tau_\phi = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\phi$$

ثم ترينج طرفي المعادلتين وجمعها مع بعض يتم التوصل لمعادلة دائرة تسمى دائرة اجهاد مور :

$$(\sigma_{\varphi} - \frac{\sigma_0}{2})^2 + \tau_{\varphi}^2 = (\frac{\sigma_0}{2})^2 \quad (2-14)$$

يوضح الشكل (2-8) انشاء الدائرة المذكورة . ترسم الاجهادات باشارتها . تعتبر الزاوية φ بعكس عقارب الساعة موجبة (يؤخذ الاتجاه الموجب بالمفهوم الرياضي) .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau_{\varphi}}{\sigma_{\varphi}} \quad (2-15)$$



شكل 2-8

من أجل الاجهادات الاعظمية يتم الحصول من دائرة إجهاد مور على القيم التالية :

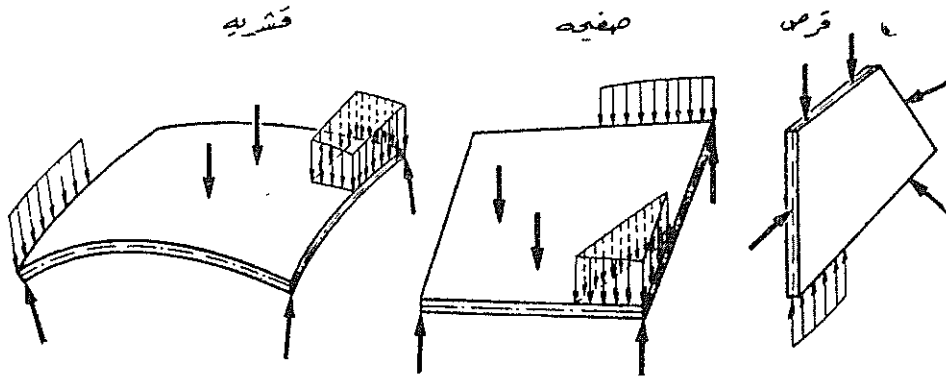
$$\begin{aligned} \max \sigma &= \sigma_{\varphi} \quad (\varphi = 0) \\ \max \tau &= \tau_{\varphi} \quad (\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_0}{2} \end{aligned} \quad (2-16)$$

٢ - ٣ حالة الاجهاد المستوية (ثنائية المحور)

٢ - ٣ - ١ تعريف حالة الاجهاد المستوية ، الاجهادات المماسية المزدوجة

تظهر في المجالات الهندسية عناصر انشائية تكون فيها احدى الابعاد صغيرة بالنسبة للبعدين الآخرين ، هذا يعني ان السماكة صغيرة بالنسبة للبعدين الآخرين . تسمى مثل هذه الانشاءات عندما تكون منحنية بالقشریات (شكل 2-10) وعندما تكون مستوية فهي تسمى حسب نوع المحولات المؤثرة عليها ، اما صفيحة (بلاطة) او قرص (شريحة ، لوح) . فالصفائح (البلاطات) هي عناصر انشائية مستوية (جمل حاملة مستوية) رقيقة تحمل عمودياً على سطحها

الاًوسط (شكل 2-11) أما الاقراص فهي جمل حاملة رقيقة تقع الجمولة المطبقة عليها في مستويها (شكل 2-12) .

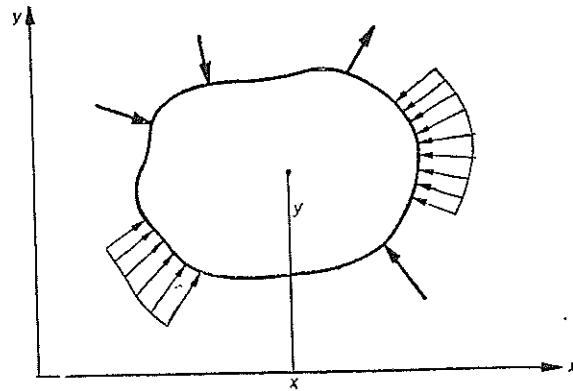


شكل 2 10

شكل 2.11

شكل 2 12

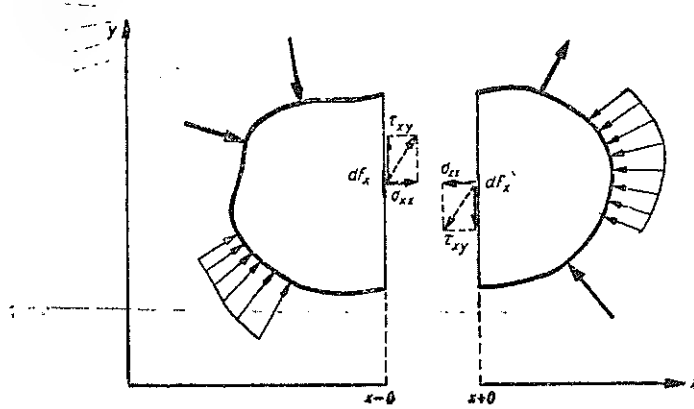
سوف تتم فيما يلي دراسة حالة الاجهاد في الاقراص . نتيجة لتحميل القرص بجمولة تقع في مستويها الاوسط تتشكل داخله حالة إجهاد يمكن اعتبارها بشكل تقريبي انها حالة اجهاد مستوية. تتوزع كافة القوى الداخلية ، في اي مكان من القرص ، على سماكته h توزيعاً منتظماً . تقع مجموعة النسب (مجموعة المحاور الاحداثية) y, x في المستوي الاوسط للقرص (شكل 2.13). تتواجد عند سطوح القطوع $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ ، العناصر السطحية $dF_y = hdx$ و $dF_x = hdy$ (شكل 2-14 و 2-15) .



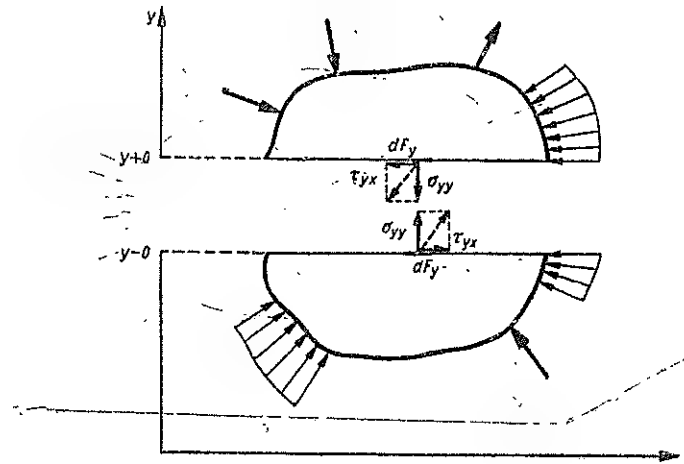
شكل 2.13

يحلل شعاع الاجهاد الذي يؤثر على تلك السطوح الى مركبتين وبذلك يتم الحصول على الاجهاد

الناظمي والاجهاد المماسي هناك . تعتبر الاجهادات موجبة عندما تكون في ضفاف القطع الموجبة (ضفة القطع $x=0 = \text{const}$ و ضفة القطع $y=0 = \text{const}$) باتجاه المحاور الاحداثية الموجبة ، وفي ضفة القطع السالبة (ضفة القطع $x+0 = \text{const}$ و ضفة القطع $y+0 = \text{const}$) عندما تكون بعكس اتجاه المحاور الاحداثية الموجبة وذلك بناء على مبدأ الفعل ورد الفعل . للتمكن من التفريق بين كل من الاجهادات الناضمية والاجهادات المماسية الموجودة في كل من سطوح القطوع المتعامدة (التي تتعامد على بعضها) سوف يتم تذييلها بدليلين الدليل الاول يشير الى سطح القطع (او الناظم على سطح القطع) أما الدليل الثاني فيشير الى اتجاه الاجهاد المعتبر (على سبيل المثال σ_x هو الاجهاد الناضمي الذي يؤثر على السطح $x = \text{const}$ ، أي السطح الذي ينطبق ناظمه على المحور x ، ويتجه باتجاه المحور x . أما τ_{xy} فهو الاجهاد المماسي الذي يؤثر على السطح $x = \text{const}$ ، أي السطح الذي ينطبق ناظمه على المحور x ، ويتجه باتجاه المحور y) .



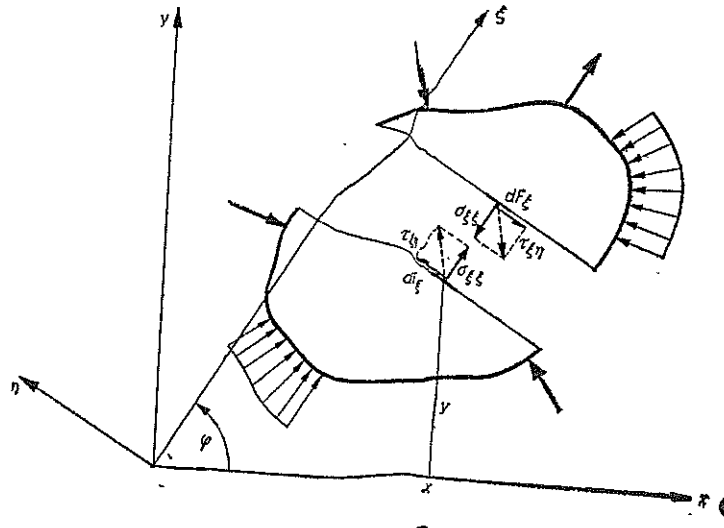
شكل 2.14



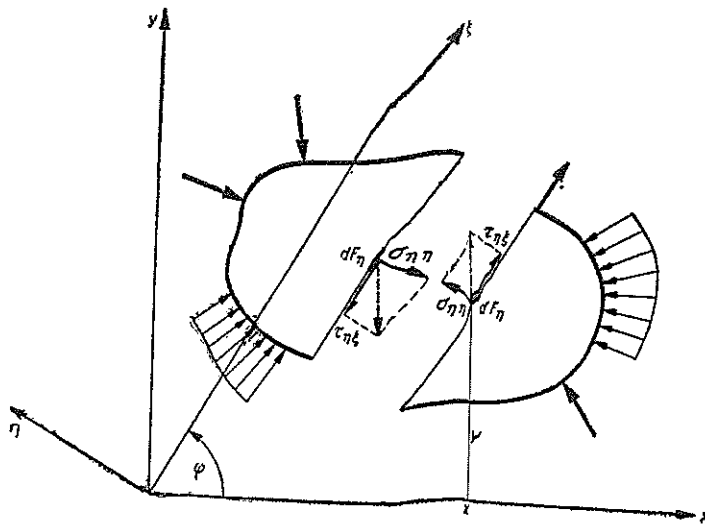
شكل 2.15

هناك كثير من المراجع تذييل الاجهاد الناطمي بدليل واحد فقط يشير الى اتجاه الاجهاد وهو ينطبق في نفس الوقت على اتجاه الناطم على السطح الذي يؤثر فيه الاجهاد الناطمي المذكور (على سبيل المثال σ_x هو الاجهاد الناطمي الذي يؤثر على السطح $x = \text{const}$ ويتجه باتجاه المحور x). اما الاجهاد المماسي فيذيل هناك τ هو الحال في هذا الكتاب بدليلين . بنفس الطريقة سوف يعبر عن الاجهادات في السطوح المائلة .

لقد تم في الاشكال (2.16) و (2.17) تمثيل الاجهادات الموجودة في سطوح القطع



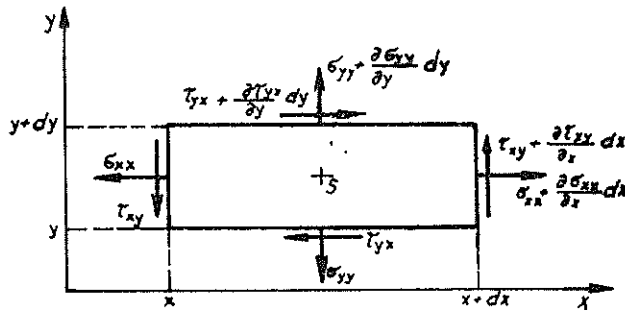
شكل 2.16



شكل 2.17

النسب الاصلية للزاوية φ . $\eta = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ المنسوبة الى مجموعة المحاور الاحداثية ξ, η التي تشكل مع مجموعة

يظهر الشكل (2.18) الاجهادات التي تؤثر على عنصر جسمي (Körperelement) ، ابعاده dx, dy, dz بعد تحليلها الى مركباتها الناطمية (الاجهاد الناطمي) والمماسية (الاجهاد المماسي). وبنشر الاجهادات على السطح $x + dx = \text{const}$ وكذلك على السطح $y + dy = \text{const}$ على شكل سلسلة تايلور (TAYLOR — Reihe) واهمال الحدود من المرتبة العالية يتبقى منها ما أشير اليه في الشكل (2.18) .



شكل 2.18

يعطي تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة لمركز الثقل ، العلاقة التالية :

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

باهمال زيادات الاجهادات بالنسبة للاجهادات يتم التوصل للعلاقة الهامة التالية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.17)$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة تساوي الاجهادات المماسية المزدوجة (المترتبة) (Gleichheit der zugeordnete Schubspannungen) وهي تشير الى ان الاجهادات المماسية التي تظهر في مستويين متعامدين هي متساوية . تظهر الاجهادات المماسية دائماً بشكل مزدوج وكلاهما إما أن تكون داخلية الى الحافة او خارجية منها وتسمى هذه الاجهادات

بالاجهادات المماسية المترتبة (المزدوجة) .
(zugeordnete Schubspannungen)

يعطي تطبيق شروط توازن القوى ، العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (2-18)$$

تعين حالة الاجهاد المستوية بواسطة المركبات الثلاثة للاجهاد σ_{xx} و σ_{yy} و $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ وبينما
تندعم الاجهادات التالية :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

تسمى الاجهادات الثلاثة (قيم الاجهاد الثلاثة) بمركبات تنور الاجهاد المستوي
(Komponenten des ebenen Spannungstensors) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

٢ - ٣ - ٢ الاجهادات على سطوح القطوع المائلة

سوف يتم الآن ايجاد علاقات تربط بين الاجهادات :

$$\sigma_{xx} , \tau_{xy} = \tau_{yx} , \sigma_{yy}$$

في النقطة ذات الاحداثيات (x, y) من قرص والموجودة على سطحين متعامدين هما
 $dF_x = hdy$ و $dF_y = hdx$ وبين الاجهادات:

$$\sigma_{\xi\xi} , \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} , \sigma_{\eta\eta}$$

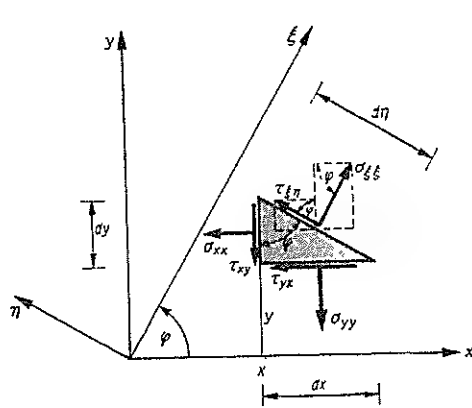
لنفس النقطة $(\xi, \eta) = (x, y)$ والموجودة على سطحين متعامدين اخرين هما $dF_\xi = h d\eta$ و $dF_\eta = h d\xi$ وتشكلان مع السطوح الاصلية السابقة الزاوية φ . لهذه الغاية سوف يتم
اعتبار الاجهادات الموجودة على سطوح قطوع المواشير المثلثية القائمة الممثلة في الاشكال (2.19)
و (2.20) والتي تبلغ مساحة كل من جوانبها dF_ξ , dF_y , dF_x , dF_η , dF_y , dF_x .
بما ان القرص ككل موجود تحت تأثير مجموعة متوازنة ، لذلك ينبغي ايضاً ان تكون القوى
المؤثرة على المواشير المقطعة منه :

$$\sigma_{xx} h dy, \tau_{xy} h dy, \sigma_{yy} h dx, \tau_{yx} h dx, \sigma_{\xi\xi} h d\eta, \tau_{\xi\eta} h d\eta$$

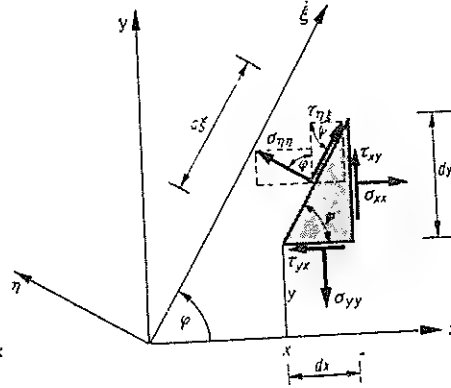
و

$$\sigma_{xx} h dy, \tau_{xy} h dy, \sigma_{yy} h dx, \tau_{yx} h dx, \sigma_{\xi\xi} h d\xi, \tau_{\eta\xi} h d\xi$$

٩



شكل 2.19



شكل 2.20

متوازنة (موجودة في حالة توازن) . بتطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة لنقطة منتصف الوتر ينتج :

$$\tau_{xy} h dy \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yx} h dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$- \tau_{xy} h dy \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{yx} h dx \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

من هاتين العلاقتين يتم التوصل للعلاقة الهامة التالية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.20)$$

والتي تم الحصول عليها سابقاً . يعطي تطبيق شروط توازن القوى في كل من الاتجاهين x, y العلاقات التالية :

$$\sigma_{\xi\xi} h d\eta \cos \phi - \tau_{\xi\eta} h d\eta \sin \phi - \sigma_{xx} h dy - \tau_{yx} h dx = 0$$

$$\sigma_{\xi\xi} h d\eta \sin \phi + \tau_{\xi\eta} h d\eta \cos \phi - \tau_{xy} h dy - \sigma_{yy} h dx = 0$$

و

$$-\sigma_{\eta\eta} h d\xi \sin \varphi + \tau_{\eta\xi} h d\xi \cos \varphi + \sigma_{xx} h dy - \tau_{yx} h dx = 0$$

$$\sigma_{\eta\eta} h d\xi \cos \varphi + \tau_{\eta\xi} h d\xi \sin \varphi + \tau_{xy} h dy - \sigma_{yy} h dx = 0$$

بالاستعانة بالعلاقات الهندسية التالية :

$$dx = d\eta \sin \varphi, dy = d\eta \cos \varphi, d\tau = d\xi \cos \varphi, d\eta = d\xi \sin \varphi$$

يتم من العلاقات السابقة (علاقات التوازن) الحصول على المعادلات الآتية :

$$\sigma_{\xi\xi} \cos \varphi - \tau_{\xi\eta} \sin \varphi = \sigma_{xx} \cos \varphi + \tau_{yx} \sin \varphi,$$

$$\sigma_{\xi\xi} \sin \varphi + \tau_{\xi\eta} \cos \varphi = \tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_{yy} \sin \varphi$$

و

$$\sigma_{\eta\eta} \sin \varphi - \tau_{\eta\xi} \cos \varphi = \sigma_{xx} \sin \varphi - \tau_{yx} \cos \varphi,$$

$$\sigma_{\eta\eta} \cos \varphi + \tau_{\eta\xi} \sin \varphi = -\tau_{xy} \sin \varphi + \sigma_{yy} \cos \varphi$$

بحل هذه المعادلات بالنسبة للقيم $\sigma_{\xi\xi}$, $\tau_{\xi\eta}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\tau_{\eta\xi}$ وبعد اعتبار العلاقة (2-20) يتم الحصول على النتائج التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) &= \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta}(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2,21)$$

و

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta\eta}(\varphi) &= \sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\eta\xi}(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

من المعادلات (2-21) و (2-22) يتم التوصل لصلاحيّة العلاقة :

$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} \quad (2-23)$$

والتي تعود لمجموعة نسب مدورة . بإجراء ادخال العلاقات الهندسية التالية :

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) .$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

في العلاقات (2.21) و (2.22) ينتج :

$$\sigma_{\xi\xi}(\varphi) = \sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta\eta}(\varphi) = \sigma_{\varphi+\pi/2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (2.24)$$

$$\tau_{\xi\eta}(\varphi) = \tau_{\varphi} = \tau_{\eta\xi}(\varphi) = -\tau_{\varphi+\pi/2} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

من هذه العلاقات يتم اشتقاق المعادلات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) + \sigma_{\eta\eta}(\varphi) &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \\ \sigma_{\xi\xi}(\varphi)\sigma_{\eta\eta}(\varphi) - [\tau_{\xi\eta}(\varphi)]^2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

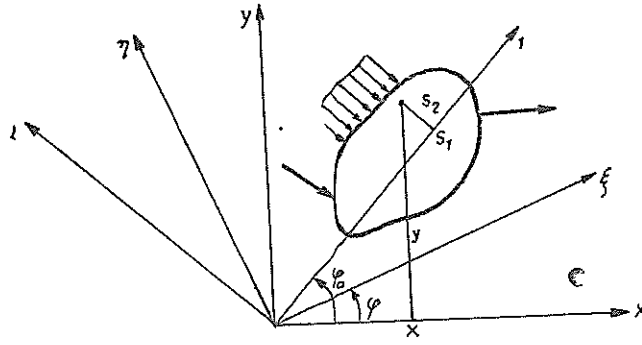
إذا تبقى العلاقات (2.25) مستقلة عن دوران مجموعة المحاور الاجهادية .

حسب العلاقة (2.24) فان الاجهادات في المجموعة ξ , η تتعلق من الاجهادات في المجموعة x , y ومن الزاوية المتغيرة φ .

٢ - ٣ - ٣ الاجهادات الرئيسية والمحاور الرئيسية

سوف يتم الان تعيين الزاوية التي تأخذ عندها الاجهادات $\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\varphi}$ و $\sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\varphi+\pi/2}$ و $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ قيماً حدية ، أما المعادلات الشرطية اللازمة من اجل ذلك فهي :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma_{\xi\xi}(\varphi)}{d\varphi} &= 0 = 2 \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \right) \\ \frac{d\sigma_{\eta\eta}(\varphi)}{d\varphi} &= 0 = 2 \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$



شكل 2-20 b

$$\frac{d\tau_{\xi\eta}(\varphi)}{d\varphi} = 0 = 2 \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \right) \quad (2.27)$$

تتحقق المعادلات (2.27) من أجل أية زاوية $\varphi = \varphi_0$ تحقق العلاقة :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (2.28)$$

من العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} 2 \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{tg} 2\varphi_0$$

يشين أنه يوجد هناك سطحان متعامدان (سطوح الاجهادات الرئيسية) ذات اجهادات ناظمية حدية (اجهادات رئيسية) (شكل 1,20 b) . من العلاقات (2.26) و (2.25) يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$\frac{d\sigma_{\xi\xi}(\varphi_0)}{d\varphi} = -\frac{d\tau_{\xi\eta}(\varphi_0)}{d\varphi} = 2 \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi_0 + \tau_{xy} \cos 2\varphi_0 \right) = 2\tau_{xy} = 0$$

حسب هذه العلاقة فان الاجهادات المماسية تنعدم على سطوح الاجهادات الرئيسية . تبلغ الاجهادات الرئيسية التي تتشكل عند الزوايا φ_0 و $\varphi_0 = \pi/2$ بالنسبة للمحور x القيم التالية :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 + \tau_{xy} \sin 2\varphi_0$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 - \tau_{xy} \sin 2\varphi_0$$

وباستخدام التوابع الزاوية المعروفة :

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi_0}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\varphi_0}} = \frac{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

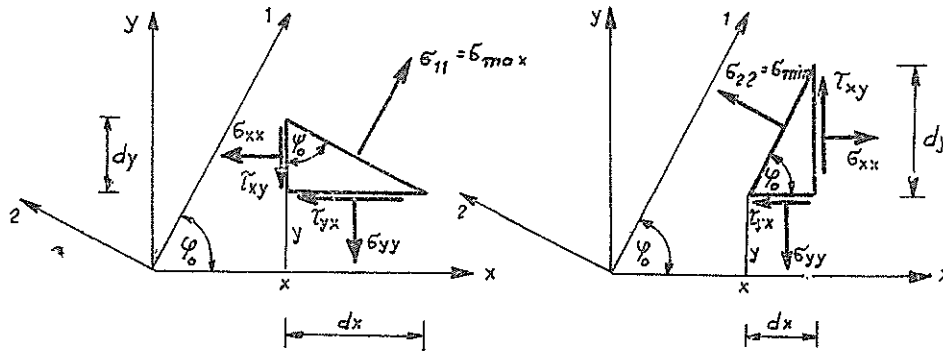
يتم الحصول على علاقات الاجهادات الرئيسية بعد اختزال التوابع الزاوية ممثلة بالشكل الجديد التالي :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \max \sigma \quad (2.28 a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \min \sigma \quad (2.28 b)$$

وتسمى المحاور 1 (s₁) ، 2 (s₂) التي تتعين بواسطة الزاوية φ_0 بمحاور الاجهادات الرئيسية أو اتجاهات الاجهادات الرئيسية وتسمى الاجهادات σ_{11} و σ_{22} المشكلة عند تلك المحاور بالاجهادات الناعمية الرئيسية أو باختصار الاجهادات الرئيسية في نقطة ثابتة من قرص .

من بين كل المستويات التي تمر من نقطة ما من القرص ، هناك مستويان متعامدان من أجل $s_2 = \text{const.}$ ، $s_1 = \text{const.}$ ، تأخذ الاجهادات الناعمية عندها قيماً حدية . من أجل مستويات الاجهادات الرئيسية المذكورة ينعدم الاجهاد المماسي (شكل 2-21) .



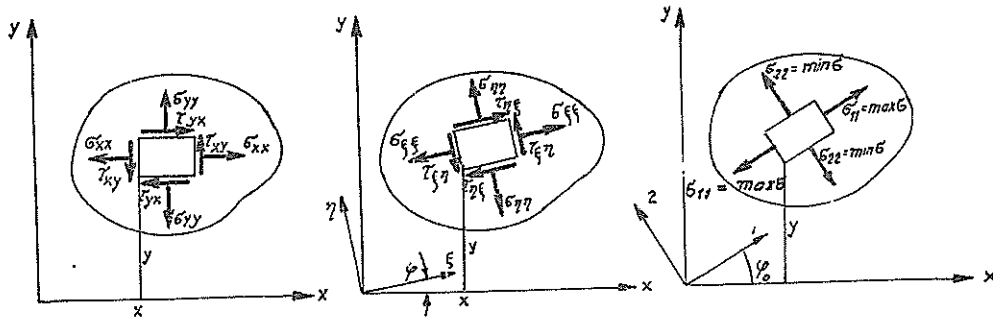
شكل 2-21

يمكن تمثيل اجهاد المادة في النقطة ذات الاحداثيات x, y من قرص بالطريقة المشار اليها في الاشكال (2-22) المتتالية . لايضاح اجهاد جسم ما يفضل استخدام الاحداثيات $1, 2, (s_1, s_2)$ فهي انسب مجموعات المحاور الاحداثية لذلك . حسب إشارة الاجهادات الناعمية الرئيسية فان النقطة ذات الاحداثيات (y, x) من المادة سوف تشد او تضغط بالاتجاهات s_1, s_2 .

تتحقق المعادلة (2-27) من اجل الزاوية φ_1 التي تحقق العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$

بواسطة هذه الزاوية يتم هنا ايضاً تعيين وضع خاص لمجموعة المحاور الاحداثية التي سيرمز لها بالاحرف s_a, s_b والتي من صفاتها ان الاجهادات المماسية عندها تأخذ قيمة حدية .



شكل 2-22

بشكل عام لا تتجاوز الاجهادات المماسية الرئيسية ، التي تظهر عند الزوايا $\varphi_1, \varphi_1 + \pi/2$ من الاجهادات الناعمية . بالاستعانة بالعلاقات التالية :

$$\tau_1 = - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi_1 + \tau_{xy} \cos 2\varphi_1 = - \tau_2 \quad (2.28 c)$$

او كذلك

$$\left[\begin{matrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{matrix} \right] = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \left[\begin{matrix} \max \tau \\ \min \tau \end{matrix} \right] \quad (2.28 d)$$

يتم تعيين الاجهادات المماسية الرئيسية $\tau_1 (= \tau_{ab}), \tau_2 (= -\tau_{ba})$.

يتشكل القص الصافي (القص المجرد) عندما تكون سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية خالية من الاجهادات الناعظمية وهذه هي حالة خاصة وليست حالة عامة (على سبيل المثال عندما تكون $\sigma_1 = -\sigma_2$) . من العلاقة التالية:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 \cdot \operatorname{tg} 2\varphi_1 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \cdot \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} = -1 = \text{const.} \quad (2.28e)$$

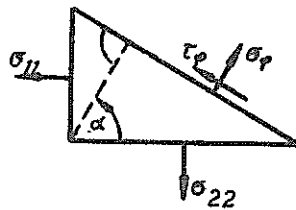
يتج أن :

$$\varphi_1 = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

حسب هذه العلاقة فإن الناعظم على سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية ينصف الزاوية القائمة الموجودة بين اتجاهات الاجهادات الرئيسية .

في حالة كون الاجهادات الرئيسية $\sigma_{11} = \max \sigma$, $\sigma_{22} = \min \sigma$ هي المعطاة عندئذ يتم الحصول على اجهادات القطع الموجودة في مستوي يميل على سطوح الاجهادات الرئيسية بالزاوية α (شكل 2.23) بواسطة العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.28)$$



شكل 2,23

وفي حالة اعتبار الزاوية α هي زاوية الفرق التالية :

$$\alpha = \varphi - \varphi_0$$

حيث أن φ_0 هي الزاوية المحصورة بين الناعظم على سطح الاجهادات الرئيسية وبين المحور x وأن

φ هي الزاوية المحصورة بين الناظم على السطح المدروس وبين المحور x ، عندئذ يتم الحصول على اجهادات القطع الممثلة بالعلاقة (2.28) كما يلي :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2(\varphi_0 - \varphi) \quad (2.29)$$

$$\sigma_{\varphi} = \quad + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2(\varphi_0 - \varphi)$$

حيث ان :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} = \max \tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

٢ - ٣ - ٤ دائرة اجهاد مور لتعيين المحاور الرئيسية والاجهادات الرئيسية تخطيطياً

تمثل العلاقات (2.24) معادلات الاجهاد بالنسبة لمجموعة المحاور الدوارة :

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\varphi + \pi/2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = \tau_{\varphi} = -\tau_{\varphi + \pi/2} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

لقد اكد العالم مور (Otto MOHR) امكانية ايضاح العلاقات (2.24) بواسطة دائرة تسمى بدائرة اجهاد مور أو دائرة الاجهاد (Spannungskreis) . باجراء تعديل بسيط على العلاقات السابقة ينتج :

$$\left(\sigma_{\xi\xi} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi\right)^2,$$

$$\left(\sigma_{\eta\eta} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi\right)^2,$$

$$\tau_{\xi\eta}^2 = \left(-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi\right)^2$$

النقطة A . باقامة عمود من النقطة A طوله τ_{xy} تميز نقطة من الدائرة هي النقطة D بحيث تمثل المسافة \overline{MD} نصف قطر الدائرة . تمثل المسافة \overline{OA} الاجهاد σ_{xx} .

تحدد نقاط تقاطع الدائرة مع المحور الافقي (النقاط 1 و 2) الاجهادات الرئيسية :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

و :

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

اما مستقيمتي الوصل $\overline{1D}$ و $\overline{2D}$ فتمثل اتجاهات الاجهادات الرئيسية (محاور الاجهادات الرئيسية) .

تعين القيمة الاعظمية للاجهاد المماسي $\max \tau$ بواسطة نصف قطر الدائرة :

$$\overline{MT} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

كما تعطى خطوط الوصل $\overline{1D}$ و \overline{SD} اتجاهات الاجهادات المماسية الرئيسية (محاور الاجهادات المماسية الرئيسية) .

التطبيق العملي لدائرة اجهاد مور .

أ - المعطى : σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} .

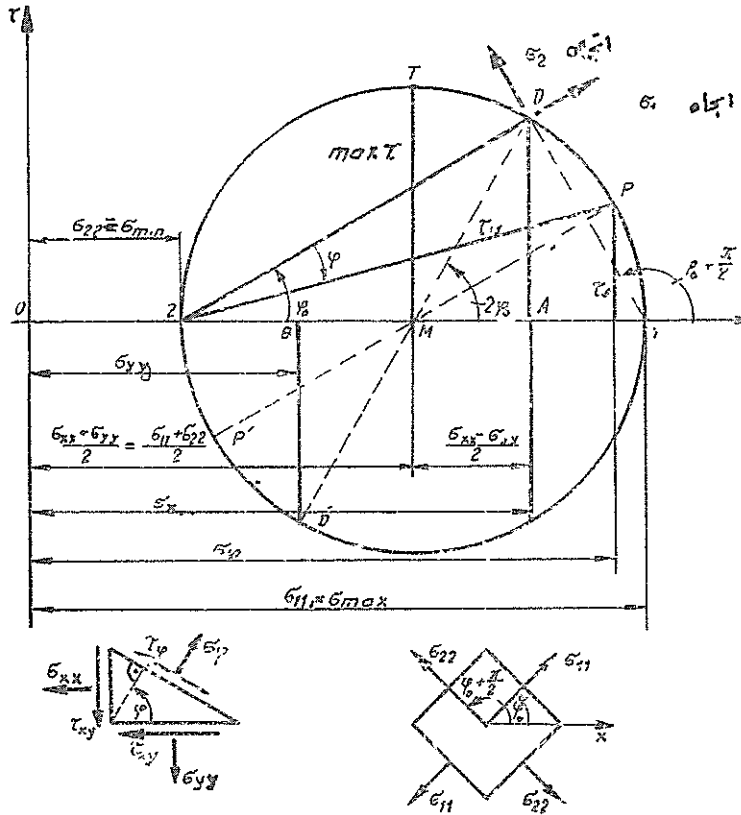
المطلوب : تعيين اجهادات القطع $\sigma_\phi (= \sigma_\phi)$ و $\tau_\phi (= \tau_\phi)$ والاجهادات الرئيسية σ_{11} , σ_{22} واتجاه الاجهادات الرئيسية الذي يعبر عنه بالزاوية ϕ_0 .

الحل :

ترسم الاجهادات (مصحوبة بإشارتها) على مجموعة الاحداثيات σ و τ (تعرف الاجهادات الشادة بموجب) .

يوضح الشكل (2-25) طريقة انشاء اجهاد مور .

نصف قطر الدائرة :



شكل 2-25

$$\overline{DM} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

يتم رسم الاجهاد المماسي τ_{xy} ابتداء من نهاية σ_{xx} (أي في النقطة A) . تقاس الزاوية ϕ في دائرة الاجهاد بعكس عقارب الساعة ابتداء من المحور σ (الاتجاه الرياضي الموجب) .
تمثل المسافة \overline{MT} الاجهاد المماسي الاعظمي :

$$\max \tau = \left| \sigma_{11} - \sigma_{22} \right|$$

من دائرة الاجهاد يمكن دون ريب قراءة قيمة الاجهادات الرئيسية واتجاهاتها .

للتمكن من تعيين اجهادات القطع $\tau_\phi (= \tau_\phi)$ و $\sigma_\phi (= \sigma_\phi)$ ينبغي الانطلاق من المعادلة (2-29) المعدة من اجل زاوية الفرق $\phi - \phi_0$. ترسم ابتداء من النقطة 2 وعلى الشحاع $\overline{2D}$ للزاوية $\phi + \phi_0$ باتجاه عقارب الساعة بذلك يقطع وترها ، دائرة الاجهاد في النقطة P التي تعطي

احداثياتها الاجهادات $(-\sigma_\varphi, \tau_{\varphi\eta})$ و $(\tau_{\varphi\eta}, \sigma_\varphi)$. ان نقطة تقاطع امتداد المستقيم PM مع الدائرة هي النقطة P التي تمثل احداثياتها اجهادات القطع في المستوي الدور ابتداء من الزاوية φ بالزاوية $\pi/2$.

• $\alpha, \sigma_{22}, \sigma_{11}$: ب - المظى

المطلوب : تعيين الاجهادات σ_α و τ_α .

الحل :

حسب العلاقة (2-28) فإن معادلة دائرة الاحماد هي :

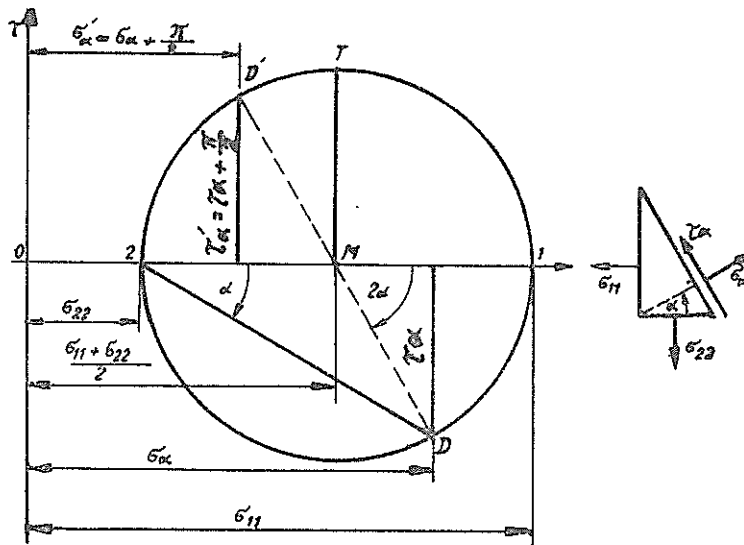
$$(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2})^2 + \tau_{\alpha}^2 = (\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2})^2$$

يبلغ نصف قطر الدائرة القيمة التالية :

$$\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}$$

يشرح الشكل (2.26) طريقة انشاء دائرة اجهاد مور .

للحصول على اجتهادات القطع σ_α و τ_α ينبغي ، ابتداء من النقطة 2 وعلى الشعاع 21 رسم



شکل 2-26

الزاوية α باتجاه عقارب الساعة وذلك لادخال الاشارة السالبة الموجودة في العلاقة (2-28) بعين الاعتبار .

ان σ'_α و τ'_α هي اجهادات القطع في المستوي العمودي على المستوي الموجود عند α .

٢ - ٣ - ٥ مسارات الاجهاد في حقل الاجهاد المستوي

تسمى المنحنيات المستوية التي تعطي في كل نقطة من القرص الاتجاهات المتعامدة للاجهادات الرئيسية بمسارات الاجهادات الناعمة الرئيسية (Spannungstrajektorien der Hauptnormalspannungen) أو خطوط الاجهادات الرئيسية (Hauptspannungslinien) . وبطريقة مشابهة تعرف مسارات الاجهادات المماسية الرئيسية (Spannungstrajektorien der Hauptschubspannungen) أو ما تسمى أيضاً بخطوط الاجهادات المماسية (Schubspannungslinien) لحالة الاجهاد المستوية والتي تحدد في كل نقطة من القرص اتجاهات الاجهادات المماسية الرئيسية فيها .

من خلال مجموعتي المنحنيات المتعامدة السابقة الذكر تعطي صورة واضحة عن حالة الاجهاد في القرص .

بكل سهولة يمكن التوصل للمعادلات التفاضلية العائدة لكل من مساري الاجهادات (مسار الاجهادات الناعمة الرئيسية ومسار الاجهادات المماسية الرئيسية) .

بما أن الاجهادات σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} هي قوابض للاحداثيات x , y , لذا يستطاع من المعادلة :

$$y'_1 = \tan \varphi_0$$

وبادخل العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} \tan \varphi_0 &= \frac{\sin 2\varphi_0}{1 + \cos 2\varphi_0} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \\ &= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{11} - \sigma_{yy}} \quad (2-29 a) \\ \tan \varphi_0 &= \frac{1 - \cos 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0} = \frac{1}{\tau_{xy}} \left[-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right] \\ &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{xx}}{\tau_{xy}} \end{aligned}$$

التي تم الحصول عليها من العلاقات الآتية :

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi_0}} = \frac{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (2.29 \text{ b})$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\tan 2\varphi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi_0}} = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

بمعين الاعتبار ، تعيين اتجاه الاجهادات الناعمية الرئيسية الاعظمية :

$$y'_1 = \frac{\sigma_{11}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y)}{\tau_{xy}(x, y)} = \frac{\tau_{xy}(x, y)}{\sigma_{11}(x, y) - \sigma_{yy}(x, y)} \quad (2.30)$$

بالاستعانة بالقيمة المقالوبة السالبة (negativen kehrwert) للعلاقة (2-30) يتم تعيين اتجاه الاجهاد الناعمي الرئيسي الاصغري σ_{22} :

$$-\frac{1}{y'_1} = y'_2 = -\frac{\tau_{xy}(x, y)}{\sigma_{11}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y)} = -\frac{\sigma_{11}(x, y) - \sigma_{yy}(x, y)}{\tau_{xy}(x, y)} \quad (2.31)$$

بنفس التفكير يتم ، من اجل العناصر الاتجاهية للاجهادات المماسية (Richtungselemente) ، الحصول على العلاقة التالية :

$$y'_n = \tan \varphi_1 = \frac{1 - \cos 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_1} = \frac{\sin 2\varphi_1}{1 + \cos 2\varphi_1}$$

وبعد اعتبار العلاقة (2.29b) : ينتج :

$$y'_n = \frac{-\tau_{xy} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}{-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}} = \frac{-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{\tau_{xy} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{y'_a} = y'_b = \frac{-\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{-\tau_{xy} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} = \frac{\tau_{xy} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}$$

بهذا يكون قد تم التوصل للمعادلات التفاضلية العائدة لخطوط الاجهادات الرئيسية ونخطوط الاجهادات المماسية وهي بشكل عام معادلات لا خطية وفي اغلب الحالات لا يمكن حلها بشكل دقيق . للتمكن في كل حالة من الحصول على صورة تقريبية لتوزيع الاجهادات الرئيسية ينبغي رسم اتجاهات الاجهادات الرئيسية (العلاقة 2-29 a) في اكبر عدد ممكن من النقاط فيتشكل حقل للاتجاهات . بعد ذلك يحدد كل من مسارات الاجهاد .

ليان الفائدة التي يتم الحصول عليها بمعرفة مسارات الاجهاد سوف يلجأ على مسيل المثال لمادة البيتون المسلح ، فأفضل ترتيب للقضبان الفولاذية (لقضبان التسليح) في قرص هو الذي يسير مع اتجاه مسارات الاجهادات الشادة ، ومن اجل امثال هذه الحالة تكفي دقة الطريقة التخطيطية (طريقة دائرة اجهاد مور) .

٢ - ٣ - ٦ أمثلة

مسائل 34 :

تعطى حالة الاجهاد في قرص مستطيل الشكل بواسطة العلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x,y) &= \sigma_0 = \text{const} \\ \sigma_{yy}(x,y) &= \sigma_0 = \text{const} \\ \tau_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

فما بعد سوف يرى بان حقل الاجهاد (Spannungsfeld) المذكور يتشكل في صفيحة محملة على السطوح الجانبية السطحية $p_x(x,y) = \sigma_0$ و $p_y(x,y) = \sigma_0$ (شكل 2-27) .
المطلوب : تعيين الاجهادات $\sigma_{\xi\xi}(\varphi)$ ، $\sigma_{\eta\eta}(\varphi)$ ، $\tau_{\xi\eta}(\varphi)$ لكل نقطة من القرص .

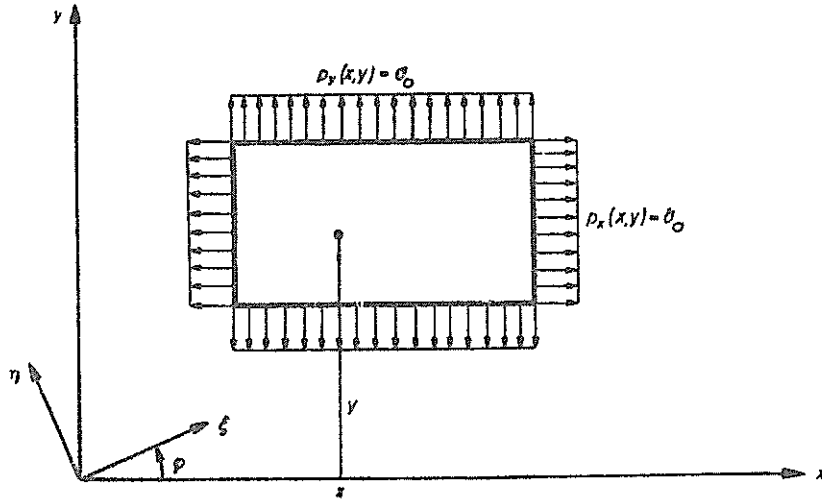
الحل :

من العلاقة (2-24) وبلاستعانة بالعلاقة (2-33) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$\sigma_{\xi\xi}(\varphi) = \frac{\sigma_0 + \sigma_0}{2} = \sigma_0 = \text{const} .$$

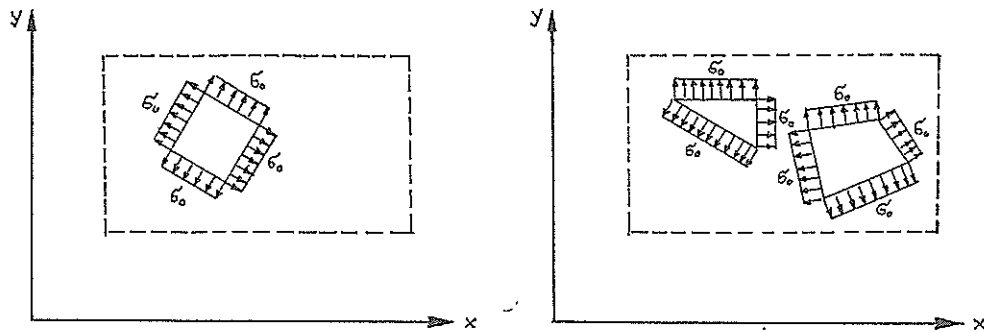
$$\sigma_{\eta\eta}(\varphi) = \frac{\sigma_0 + \sigma_0}{2} = \sigma_0 = \text{const} .$$

$$\tau_{\xi\eta}(\varphi) = 0$$



شكل 2-27

من هذه النتائج يتبين ان الاجهادات الناعمية داخل القرص وفي كافة الاتجاهات ، القيمة الثابتة σ_0 كما وانها مستقلة عن الزاوية ϕ . كما يتبين ايضاً ان الاجهادات المماسية τ_{xy} في القرص معدومة . تسمى حالة الاجهاد المطاة بالعلاقة (2-33) بحالة الاجهاد الهيدروستاتيكية وذلك لان الضغط في كل نقطة من سائل ساكن مستقل عن اتجاه سطح النسب . اذاً كل قرص جزئي يحمل كما في الشكل (2-28) ومقطع من قرص يحمل بحالة اجهاد هيدروستاتيكية ، يحتفظ بحالة الاجهاد الممثلة بالعلاقة (2-33) .



شكل 2-28

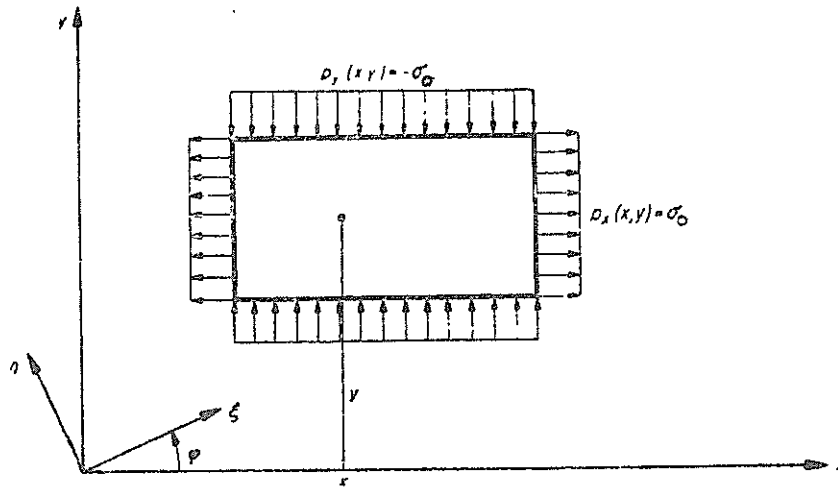
مثال 35 :

تمطى حالة اجهاد قرص ، من خلال القيم التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x,y) &= \sigma_0 = \text{const.} \\ \sigma_{yy}(x,y) &= -\sigma_0 = \text{const.} \\ \tau_{xy}(x,y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

فما بعد سوف يتم التنويه الى ان مثل حالة الاجهاد المعطاة هذه تتحقق في صفيحة رقيقة مستطيلة الشكل تحمل سطوحها الجانبية بالجهود $p_y(x,y) = -\sigma_0$; $p_x(x,y) = \sigma_0$ (شكل 2-29) .

المطلوب : تعيين الاجهادات $\sigma_{\xi\xi}(\varphi)$ و $\tau_{\xi\eta}(\varphi)$ و $\sigma_{\eta\eta}(\varphi)$ في كل نقطة من القرص .



شكل 2-29

الحل :

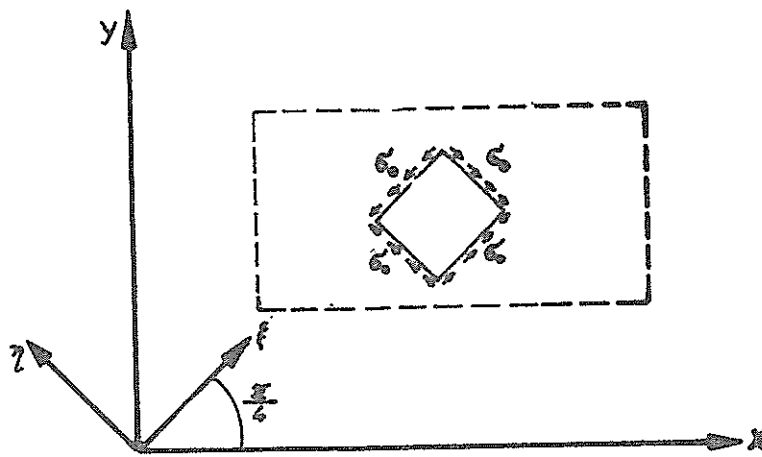
بواسطة القيم المعطاة في العلاقة (2-34) يتم التوصل ، بعد الامتنعانة بالعلاقة (2-24) ، للقيم التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) &= \frac{\sigma_0 + \sigma_0}{2} \cos 2\varphi = \sigma_0 \cos 2\varphi \\ \sigma_{\eta\eta}(\varphi) &= -\frac{\sigma_0 + \sigma_0}{2} \cos 2\varphi = -\sigma_0 \cos 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta}(\varphi) &= -\frac{\sigma_0 - \sigma_0}{2} \sin 2\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

بذلك فان الاجهادات المطلوبة هي توابع لزاوية القطع φ . من اجل الزاوية $\varphi = \pi/4$ بشكل خاص ينتج :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi = \frac{\pi}{4}) &= \sigma_0 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sigma_{\eta\eta}(\varphi = \frac{\pi}{4}) &= -\sigma_0 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \tau_{\xi\eta}(\varphi = \frac{\pi}{4}) &= -\sigma_0 \sin \frac{\pi}{2} = -\sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-36)$$

ان القرص الجزئي ذو الشكل المستطيل (مستطيل الشكل) المقطع تحت الزاوية 45° من القرص الحمل (شكل 2-30) يحتفظ بحالة الاجهاد (العلاقة 2-31) وذلك عندما تؤثر على اطرافه الاجهادات المماسية الثابتة $\tau_{\xi\eta}(\varphi = \pi/4) = -\sigma_0$.



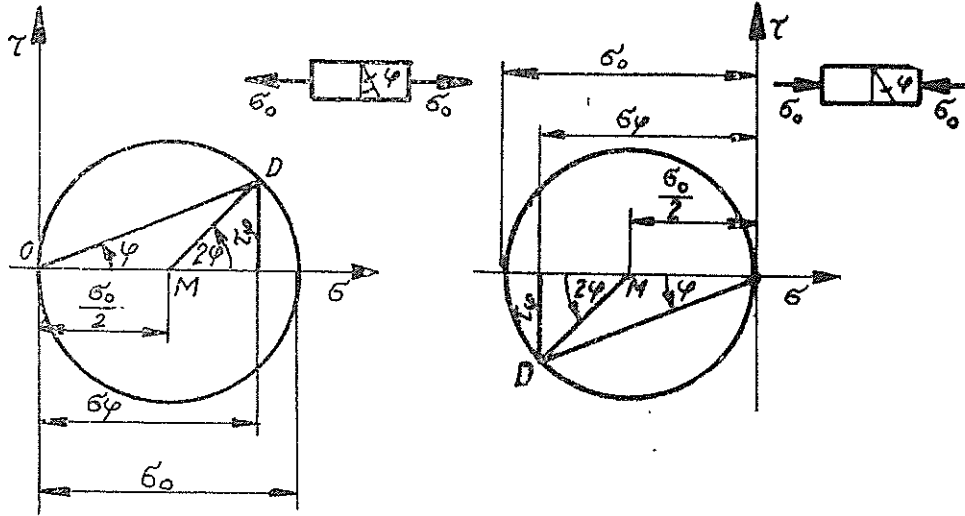
شكل 2-30

بذلك يمكن تمثيل التحميل القصي (التحميل على القص) الصافي لقرص من خلال التحميل الممثل في الشكل (2-30) . لقد كان العالم ده سان فينان (DE SAINT-VENANT) هو اول من توصل لهذه الحقيقة الهامة .

٢ - ٣ - ٧ أمثلة على دائرة اجهاد مور

مثال 36 :

الشد وكذلك الضغط المحوري (وحيد المحور) (Einachsiger Zug bzw. Druck) (شكل 2-31) .



شكل 2-31

يتشكل الاجهاد المماسي الاعظمي $\max \tau = \sigma_0/2$ عند الزاوية $\varphi_0 = 45^\circ$.
 مما يؤدي في مواد التصنيع المتينة (zähen Werkstoffen) لتشكيل سطوح انزلاق (Gleitflächen) وهو يؤدي بدوره لحدوث انكسار قصي (Schiebungsbruch) (يميل سطح الانكسار بزاوية $\varphi = 45^\circ$).

مثال 37 :

الشد وكذلك الضغط المستوي المتساوي في جميع الجهات (Ebener allseitig gleicher Zug bzw. Druck) (شكل 2-32).

الفرض : $\sigma_{11} = \sigma_{22}$.

حسب العلاقة (2-28) ينتج عندئذ :

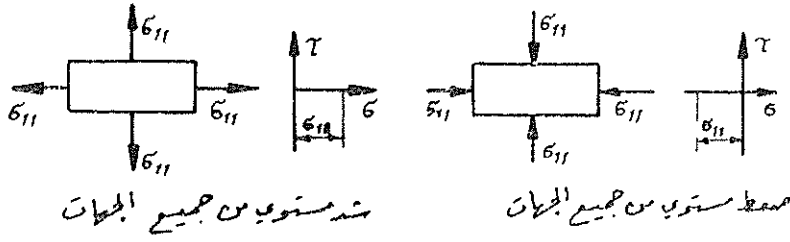
$$\sigma_{\xi\xi} (= \sigma_{\varphi}) = \sigma_{11} = \sigma_{22} ; \tau_{\xi\eta} (= \tau_{\varphi}) = 0$$

تتقلص دائرة اجهاد مور لتصبح نقطة (لتأخذ شكل نقطة).

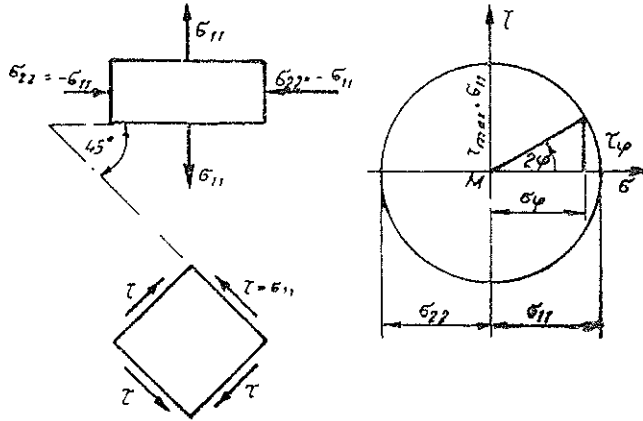
مثال 38 :

القص الصافي (Reiner Schub) (شكل 2-33).

من اجل $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ فان سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية تكون خالية من الاجهادات الناعمية وهي تميل بالنسبة لسطوح الاجهادات الرئيسية بزاوية $\alpha = 45^\circ$. من اجل ذلك يصلح:



شكل 2-32



شكل 2 33

$$\sigma_{\alpha} = 0 ; \tau_{\alpha} = \sigma_{11}$$

مثال 39 :

المعطى : الاجهادات في نقطة ما من قرص :

$$\sigma_{xx} = 400,0 \text{ kp cm}^{-2} ; \sigma_{yy} = -1600,0 \text{ kp cm}^{-2} ; \tau_{xy} = -600,0 \text{ kp cm}^{-2}$$

المطلوب : تعيين قيمة الاجهادات الرئيسية واتجاهات المحاور الرئيسية في نفس النقطة بطريقة تحليلية وطريقة تخطيطية .

من العلاقات (2-28 a) و (2-28 b) يتم الحصول على قيم الاجهادات الناعمية الرئيسية التالية :

الحل :

$$\sigma_{11} = \frac{400,0 - 1600,0}{2} + \sqrt{\left(\frac{400,0 + 1600,0}{2}\right)^2 + (-600,0)^2} = 566,2 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{400,0 - 1600,0}{2} - \sqrt{\left(\frac{400,0 + 1600,0}{2}\right)^2 + (-600,0)^2} = -1766,2 \text{ kp cm}^{-2}$$

ومن العلاقة (2-28 d) :

$$\max \tau = \sqrt{\left(\frac{400,0 + 1600,0}{2}\right)^2 + (-600,0)^2} = 1166,2 \text{ kp cm}^{-2}$$

أما موضع محور الاجهاد الرئيسي 1 فيعين بواسطة العلاقة (2-28) حيث ينتج :

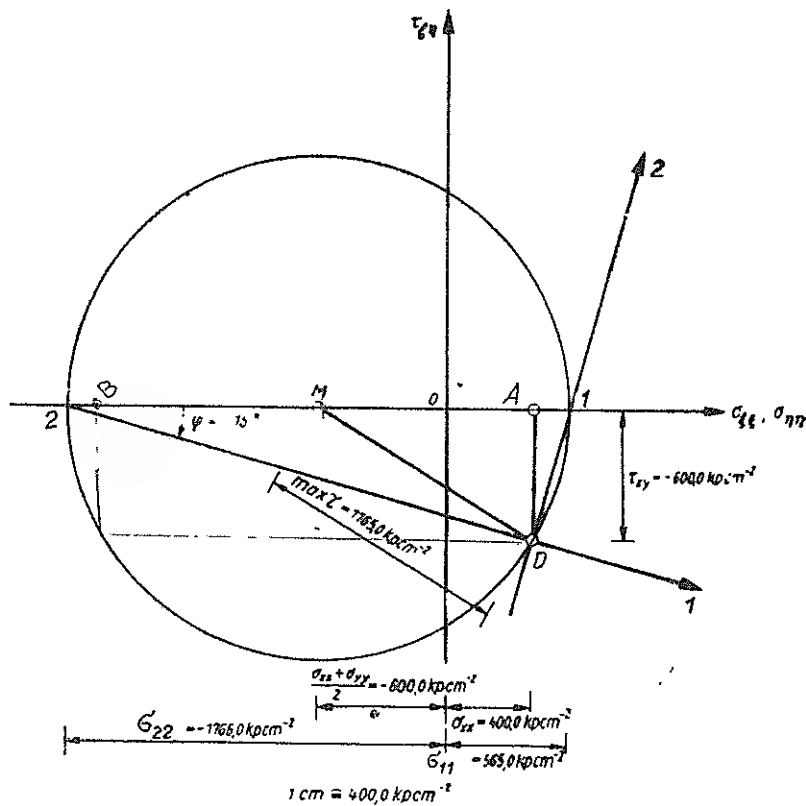
$$\operatorname{tg} 2 \varphi_0 = \frac{2 \cdot (-600,0)}{400 - (-1600)} = -0,6$$

ومنها يتم الحصول على الزاوية التالية :

$$2 \varphi_0 = -31^\circ \quad ; \quad \varphi_0 = -15^\circ 30' = -15,5^\circ$$

لقد تم في الشكل (2-34) تمثيل دائرة اجهاد مور من اجل الاجهادات :

$$\sigma_{xx} = 400,0 \text{ kp cm}^{-2} ; \sigma_{yy} = -1600,0 \text{ kp cm}^{-2} ; \tau_{xy} = -600,0 \text{ kp cm}^{-2}$$



شكل 2-34

من دائرة اجهاد مور يتم الحصول على الاجهادات الناعمية الرئيسية التالية :

$$\sigma_{11} = 565,0 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{22} = -1766,0 \text{ kp cm}^{-2}$$

وعلى نصف قطر الدائرة الذي يساوي الاجهاد المماسي الرئيسي :

$$\max \tau = 1165,0 \text{ kp cm}^{-2}$$

اما زاوية القطع فتبلغ :

$$\varphi_0 = -15^\circ$$

٢ - ٤ حالة الاجهاد الفراغية (حالة الاجهاد ثلاثية المحور)

٣ - ٤ - ١ تنسور الاجهاد الفراغي (Räumlicher Spannungstensor)

للتمكن من التعبير عن حالة الاجهاد في جسم محمل سوف تثبت مجموعة النسب المتعامدة (مجموعة المحاور الاحداثية) (x,y,z) تم تجرى على الجسم القطوع التالية :

$$x = \text{const.} ; y = \text{const.} , z = \text{const.}$$

سوف يرمز لضفتي مسطوح القطع (ضفتي القطع) التي تظهر فيها العناصر :

$$dF_x = dy dz ; dF_y = dz dx ; dF_z = dx dy$$

بالرموز التالية :

$$x - 0 = \text{const.} , y - 0 = \text{const.} , z - 0 = \text{const.}$$

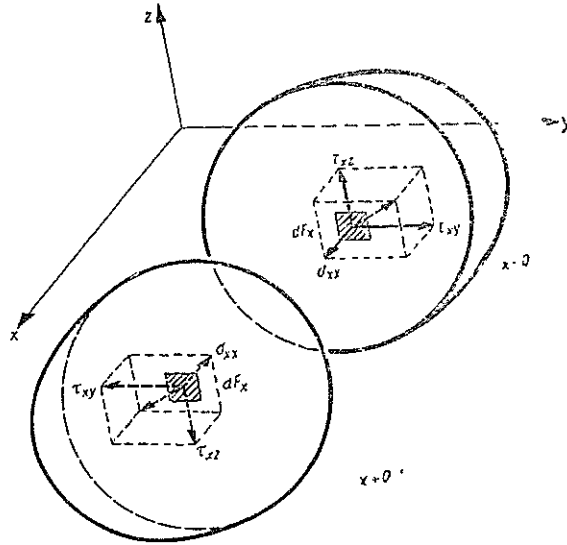
$$x + 0 = \text{const.} , y + 0 = \text{const.} , z + 0 = \text{const.}$$

بإمكان الاجهاد المحصل العائد لعنصر سطحي ما في الحالة العامة أن يأخذ اي وضع في الفراغ . لذلك سوف تحلل أشعة الاجهادات التي تؤثر على العناصر السطحية dF_x , dF_y , dF_z الى مركباتها المتعامدة (اجهاد ناظمي واجهادين مماسيين) (شكل 2.35 , 2.36 , 2.37) :

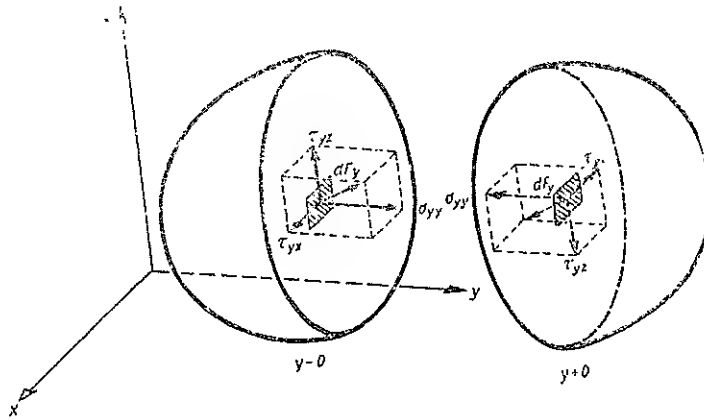
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} ; \tau_{xy} ; \tau_{xz} \\ \tau_{yx} ; \sigma_{yy} ; \tau_{yz} \\ \tau_{zx} ; \tau_{zy} ; \sigma_{zz} \end{array} \right\} \quad (2,37)$$

تتم هنا تسمية الاجهادات كما في حالة الاجهاد المستوية . تعتبر مركبات الاجهاد موجبة عندما تكون في ضفاف القطع الموجبة (الضفاف $x=0 = \text{const}$, $y=0 = \text{const}$, $z=0 = \text{const}$) باتجاه المحاور الاحداثية الموجبة وفي ضفاف القطع السالبة (الضفاف $x+0 = \text{const}$, $y+0 = \text{const}$, $z+0 = \text{const}$) ، بسبب مبدأ الفعل ورد الفعل ، بعكس اتجاه المحاور الاحداثية الموجبة .

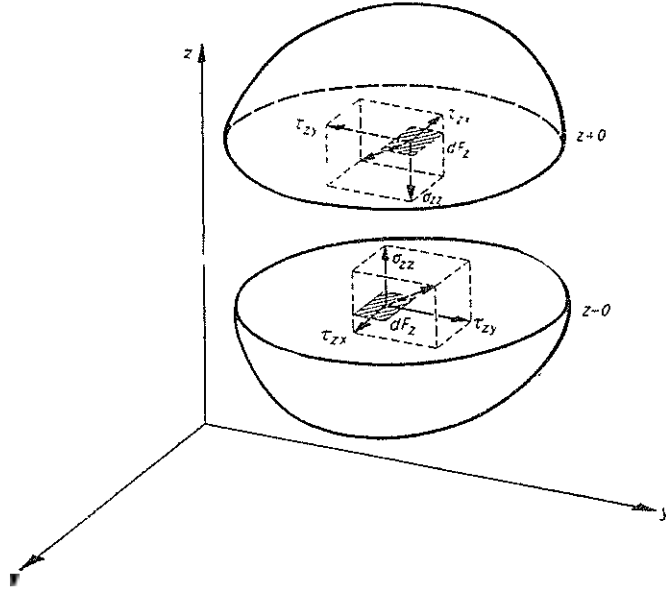
ان للدليل المزدوج في الاجهادات الناعمة والمماسية المتبع هنا نفس المفهوم المتبع في حالة الاجهاد المستوية .



شكل 2-35



شكل 2-36



شكل 2-37

ان مركبات الاجهاد هذه هي توابع للاحداثيات x , y , z وهي توابع مستمرة وقابلة للاشتقاق (stetige und differenzierbare Funktionen) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(x, y, z) ; \tau_{xy} = \dots ; \tau_{xz} = \dots \\ \tau_{yx} &= \tau_{yx}(x, y, z) ; \sigma_{yy} = \dots ; \tau_{yz} = \dots \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z) ; \tau_{zy} = \dots ; \sigma_{zz} = \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

يعبر على تغيرات الاجهادات بواسطة المشتقات الجزئية (Partielle Differentiation) . اذا كانت للنقطة $P(x, y, z)$ الاجهادات الممثلة بالعلاقة (2.38) فان للنقطة المجاورة لها $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$ الاجهادات التالية :

$$\sigma_{xx} + d\sigma_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{yx} + d\tau_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} dz$$

$$\tau_{zx} + d\tau_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

وذلك عندما توقف منشورة (سلسلة) تايلور عند الحدود الخطية .

إذا أخذ ، توخياً للسهولة ، التغير بالاتجاه x فقط أي النقطة $R(x + dx, y, z)$ التي تكون فيها $y = \text{const}$ ، $z = \text{const}$ ، وبذلك فإن $dy = dz = 0$ عندئذ يتم العثور ، بشكل أسهل ، على ما يلي :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} + d\sigma_{xx} &= \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \\ \tau_{xy} + d\tau_{xy} &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \\ \tau_{xz} + d\tau_{xz} &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\end{aligned}\quad (2.39)$$

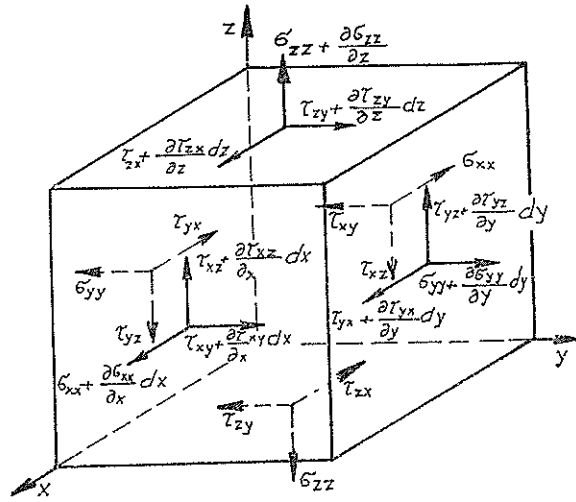
وبالنسبة للتغير بالاتجاه y يتم التوصل لعلاقات مشابهة هي التالية :

$$\begin{aligned}\tau_{yx} + d\tau_{yx} &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \\ \sigma_{yy} + d\sigma_{yy} &= \sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \\ \tau_{yz} + d\tau_{yz} &= \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\end{aligned}\quad (2.40)$$

أما بالنسبة للتغير بالاتجاه z فيتم التوصل لما يلي :

$$\begin{aligned}\tau_{zx} + d\tau_{zx} &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \\ \tau_{zy} + d\tau_{zy} &= \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \\ \sigma_{zz} + d\sigma_{zz} &= \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz\end{aligned}\quad (2.41)$$

لقد تم في الشكل (2.38) رسم الاجهادات (مركبات الاجهادات) التي تؤثر على متوازي السطوح ذو الابعاد dx ، dy ، dz المقطع من الجسم المدروس . علاوة على ذلك يمكن أن تؤثر في مركز ثقل متوازي السطوح (Parallelepiped) المذكور القوى الحجمية k_x ، k_y ، k_z .



شكل 2.38

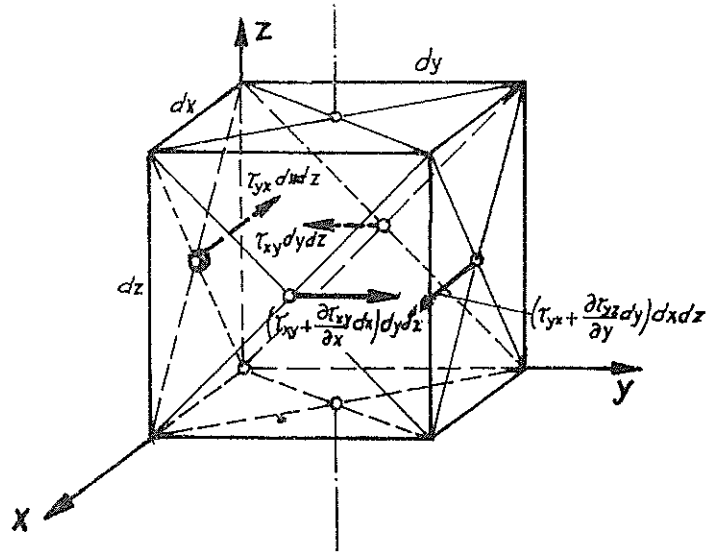
ينبغي أن تكون القوى الحجمية والاجهادات في كل عنصر حجمي تفاضلي (differentialen Voulemenelement) متوازنة وبذلك فان هناك ستة شروط للتوازن في متناول اليد منها ثلاثة شروط لتوازن القوى وثلاثة شروط لتوازن الغزوم تنسب الى المحاور الاحداثية الثلاثة .

بتطبيق شروط توازن القوى بالاتجاه x يتم الحصول ، حسب الشكل (2.39) ، على العلاقة التالية:

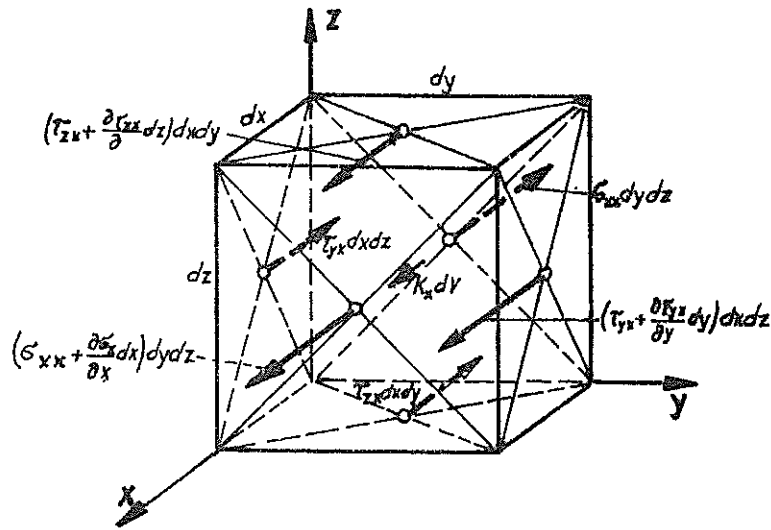
$$\begin{aligned}
 & - \sigma_{xx} dy dz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \\
 & - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \\
 & - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + k_x dV = 0
 \end{aligned}$$

بالاختصار والتقسيم على $dV = dx dy dz$ يتم منها وبشكل مشابه من شرطي توازن القوى بالاتجاه y وبالاتجاه z الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + k_x &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + k_y &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + k_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2-42}$$



شكل 2-39



شكل 2-40

وبتطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة لمحور مركزي (يمر من مركز ثقل العنصر الحجمي)
ويوازي المحور z ، يتم حسب الشكل (2.40) التوصل للعلاقة التالية :

$$+ \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} -$$

$$- \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

ان الحدود التالية :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz \frac{dx}{2} , \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz \frac{dy}{2}$$

هي حدود من المرتبة الثانية ولذلك فهي صغيرة ويمكن إهمالها واعتبارها تساوي الصفر .
بعد الترتيب والتقسيم على $dV = dx dy dz$ يتم من العلاقة السابقة ومن العلاقتين ، التي يتم
الحصول عليها بشكل مشابه بتطبيق شرطي توازن العزوم بالنسبة لكل من المحاور x و y ،
التوصل للنتائج التالية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2,43)$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة تساوي الاجهادات المماسية المزدوجة (المترتبة)
(Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen) وهي تعني ان الاجهادات المماسية
المزدوجة متساوية .

بواسطة توازن العزوم ولصلاحيه علاقة تساوي الاجهادات المماسية المزدوجة يتم اخذ-تزال
(انقاص) عدد القيم الاجهادية التسعة الى ستة قيم فقط .

تحدد القيم الاجهادية الستة المتبقية حالة الاجهاد الفراغية في جسم كما انها تشكل مركبات تنسور
متناظر من المرحلة الثانية (symmetrische Tensor zweiter Stufe) يسمى تنسور الاجهاد
الفراغي (räumlicher Spannungstensor) .

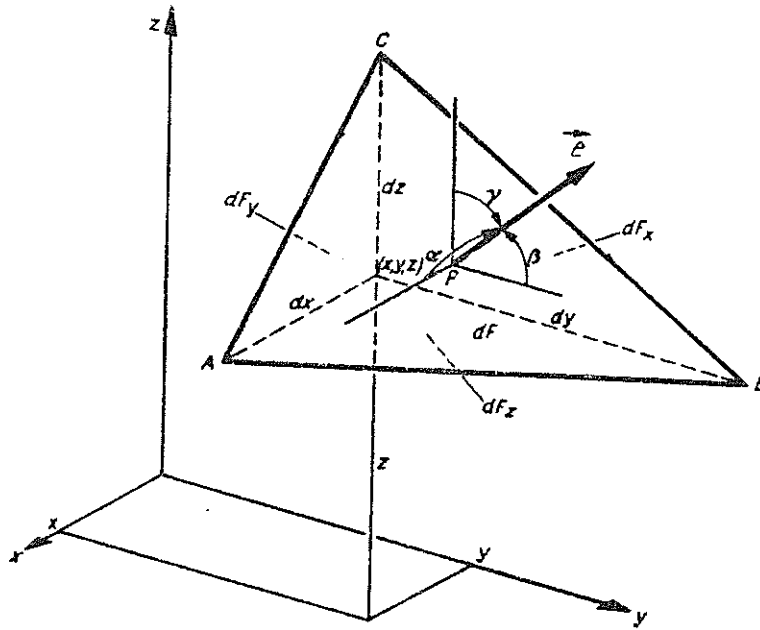
٢ - ٤ - ٢ الاجهادات الرئيسية ولا متغيرات حالة الاجهاد الفراغية

(Hauptspannungen und Invarianten des räumlichen Spannungszustandes)

سوف يتم هنا أيضاً البرهان على صلاحية علاقة تساوي الاجهادات المماسية المزدوجة (المترتبة ،
المراقبة) ، لهذا السبب سوف يقتطع من الجسم المدروس وفي النقطة ذات الاحداثيات
(x,y,z) هرم لانهائي الصغر (صغير قدر الامكان) (infinitesimales Tetraeder) أضلاعه الموازية
للمحاور الاحداثية هي dx , dy , dz . بعد ذلك ترسم الاجهادات الموجبة (حسب التعريف)
في مركز ثقل سطوح القطوع (شكل 2-41) :

$$dF_x = \frac{1}{2} dy dz \quad . \quad dF_y = \frac{1}{2} dz dx \quad . \quad dF_z = \frac{1}{2} dx dy$$

أما الاجهادات التي تؤثر في مركز الثقل P المائد للسطح ABC فيمكن احادتها (تركيبها)
إلى شعاع الاجهاد $\vec{\sigma}_{res} \equiv S_i$.



شكل 2-41

بذلك تؤثر على السطوح الجانبية القوى التالية :

على السطح $x = \text{const.}$:

$$\sigma_{xx} \frac{dydz}{2}, \quad \tau_{xy} \frac{dydz}{2}, \quad \tau_{xz} \frac{dydz}{2}$$

وعلى السطح $y = \text{const.}$:

$$\tau_{yx} \frac{dzdx}{2}, \quad \sigma_{yy} \frac{dzdx}{2}, \quad \tau_{yz} \frac{dzdx}{2}$$

وعلى السطح $z = \text{const.}$:

$$\tau_{zx} \frac{dxdy}{2}, \quad \tau_{zy} \frac{dxdy}{2}, \quad \sigma_{zz} \frac{dxdy}{2}$$

يعطي تطبيق شروط توازن العزوم بالنسبة للمحاور التي نسير باتجاه الاجهادات الناعمية، العلاقات التالية :

$$\tau_{yz} \frac{dzdx}{2} \cdot \frac{dy}{3} - \tau_{zy} \frac{dxdy}{2} \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

$$\tau_{zx} \frac{dx dy}{2} \cdot \frac{dz}{3} - \tau_{xz} \frac{dy dz}{2} \cdot \frac{dx}{3} = 0$$

$$\tau_{xy} \frac{dy dz}{2} \cdot \frac{dx}{3} - \tau_{yx} \frac{dz dx}{2} \cdot \frac{dy}{3} = 0$$

من هذه المعادلات يتم التأكد من صحة العلاقات التالية :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

التي تعبر عن المساواة بين الاجهادات المماسية المزدوجة . بأخذ هذه النتيجة بعين الاعتبار يتبين ان حالة الاجهاد في نقطة ما من جسم ، تحدد بشكل كامل بواسطة مركبات الاجهاد الستة التي تتألف من ثلاثة اجهادات ناظرية :

$$\sigma_{xx} (= \sigma_x) , \quad \sigma_{yy} (= \sigma_y) , \quad \sigma_{zz} (= \sigma_z) \quad (2.44)$$

وثلاثة اجهادات مماسية :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.45)$$

للتمكن من تمثيل مركبات شعاع الاجهاد S_x, S_y, S_z بواسطة الاجهادات الجديدة (العلاقين 2-45 و 2-44) تطبق شروط توازن القوى على القوى التي تؤثر على الهرم اللانهائي الصغر بالاتجاهات x, y, z (شكل 2-41) بهذه الطريقة يستم تعيين اجهادات القطع على السطح (ΔF) .

يرمز لمركبات الشعاع الواحدى الناظمي (Normaleneinheitsvektor) العائد للسطح اللانهائي الصغر الذي تحدده النقاط A, B, C (شكل 2-42) بما يلي :

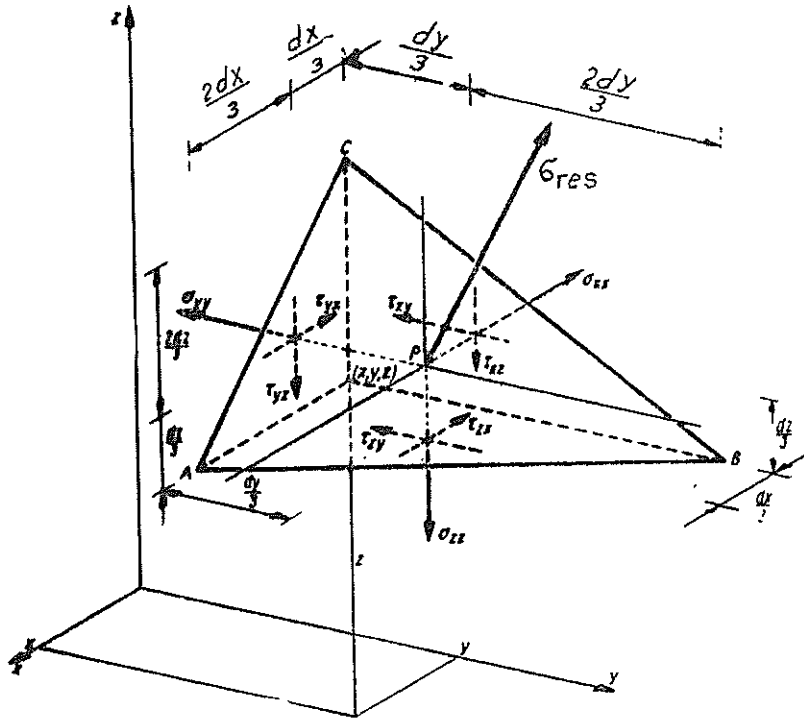
$$e_x = \cos \alpha , \quad e_y = \cos \beta , \quad e_z = \cos \gamma$$

حيث أن α, β, γ هي زوايا الاتجاه للشعاع الناظمي (الزوايا التي يشكلها الشعاع الواحدى e لسطح القطع مع المحاور الاحداثية x, y, z).

بالامكان التعبير عن شعاع الاجهاد المحصل والشعاع الواحدى الناظمي بالكتابة الشعاعية كما يلي :

$$\sigma_{res} = \{S_x ; S_y ; S_z\} ; \quad e = \{e_x ; e_y ; e_z\}$$

لقد تم في الجبر الشعاعي (Vektoralgebra) الاشارة إلى أن مساحة السطح ABC هي :



شكل 2-42

$$dF = \sqrt{dF_x^2 + dF_y^2 + dF_z^2}$$

والاصطلاحات dF_x/dF , dF_y/dF , dF_z/dF تتطابق مع مركبات الشعاع الناظمي e_x , e_y , e_z وبذلك يصبح اذاً :

$$\frac{dF_x}{dF} = e_x \quad , \quad \frac{dF_y}{dF} = e_y \quad , \quad \frac{dF_z}{dF} = e_z$$

يعني تطبيق شروط توازن القوى العلاقات الآتية :

$$S_x dF - \sigma_{xx} dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z = 0$$

$$S_y dF - \tau_{xy} dF_x - \sigma_{yy} dF_y - \tau_{zy} dF_z = 0$$

$$S_z dF - \tau_{xz} dF_x - \tau_{yz} dF_y - \sigma_{zz} dF_z = 0$$

منها يتم التوصل لمركبات الشعاع الاجهاد التالية :

$$S_x = \sigma_{xx} e_x + \tau_{yx} e_y + \tau_{zx} e_z = \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$$

$$S_y = \tau_{xy} e_x + \sigma_{yy} e_y + \tau_{zy} e_z = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma \quad (2-46)$$

$$S_z = \tau_{xz} e_x + \tau_{yz} e_y + \sigma_{zz} e_z = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_{zz} \cos \gamma$$

للاحكام على حالة الاجهاد في قطع يشته شعاع ناظمي ما من جسم منسوب إلى مجموعة محاور احداثية متعامدة (ديكارتية) (kartesische Koordinatenachsen) سوف تستخدم العلاقات (2-46) . بواسطة الاجهادات التالية :

$$\sigma_{xx} ; \sigma_{yy} , \sigma_{zz} ; \tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

التي يفترض أنها معلومة يتم الحصول على المركبات التالية :

$$S_x , S_y , S_z$$

العائدة للقوة السطحية التي تؤثر على سطح القطع المدروس .

لكل نقطة من حالة الاجهاد الفراغية توجد ثلاثة سطوح قطع متعامدة فيما بينها تكون خالية من الاجهادات المماسية وتشير الى اجهادات ناظمية حدية (سطوح الاجهادات الرئيسية) . باعتبار أن $\sigma_{res} = \sigma$ عندئذ تصلح على سطوح الاجهادات الرئيسية (الخالية من الاجهادات المماسية) العلاقات التالية :

$$S_x = \cos \alpha \sigma , S_y = \cos \beta \sigma , S_z = \cos \gamma \sigma \quad (2-47)$$

لتطابق حالات الاجهاد التي تصفها كل من العلاقات (2-46) و (2-47) استطاع كتابة المساواة بينهما :

$$(\sigma_{xx} - \sigma) \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0$$

$$\tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_{yy} - \sigma) \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma = 0 \quad (2-48)$$

$$\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_{zz} - \sigma) \cos \gamma = 0$$

ان شرط حل مجموعة معادلات التوازن المتجانسة هذه هو انعدام معينة الحدود (الامثال) (Koeffizientendeterminante) (حتى يكون لمجموعة المعادلات (2-48) حلاً لا يساوي

الصفر ينبغي أن نتعلم معينة الحدود (معينة أمثال المجاهيل في هذه المجموعة) . بعد حل معينة الحدود المذكورة يتم الحصول على معادلة من الدرجة الثالثة من أجل σ :

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \sigma^2 + (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.49)$$

ان جذور المعادلة (2.49) التي هي ، بسبب تناظر تنسور الاجهاد ؛ دائماً جذور حقيقية (reellen Wurzeln) تمثل الاجهادات الرئيسية .

من المعادلة (2.48) يتم الحصول على اتجاه الاجهادات الرئيسية وذلك بعد اعتبار العلاقة التالية :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

لامكانية كتابة المعادلة (2.49) بالشكل التالي أيضاً :

$$(\sigma - \sigma_{11})(\sigma - \sigma_{22})(\sigma - \sigma_{33}) = 0$$

ينتج ، حسب قاعدة الجذر لفيثا (Wurzelsatz von Vieta) ، ما يلي :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

تسمى الاصطلاحات الموجودة في العلاقة (2.50) لامتغيرات تنسور الاجهاد الفراغي (Invarianten des räumlichen Spannungstensor) وذلك لانها لا تتغير (لا تتأثر) بتحول (بدوران) الاحداثيات .

إن السطوح التي تحتوي على إجهادات مماسية حدية (سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية) تنصف الزاوية القائمة الموجودة بين سطوح الاجهادات الرئيسية وهي تحتوي على العموم إجهادات ناظرية (لا تخلو من الاجهادات الناظرية) .

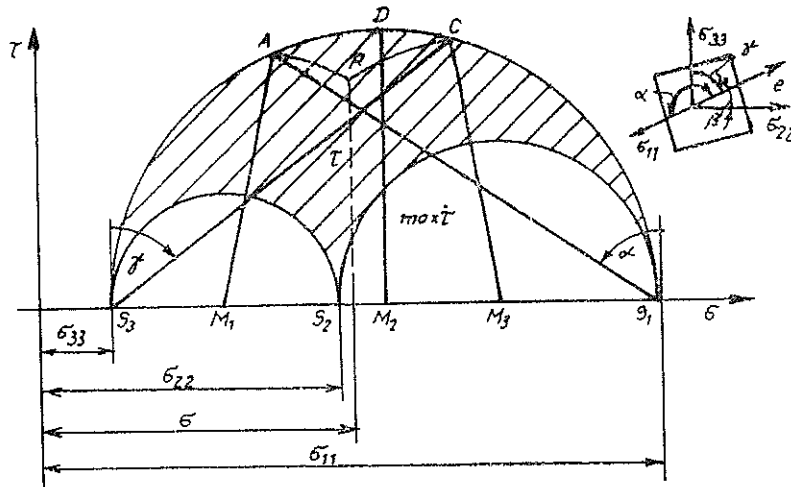
يتم الحصول على الاجهادات المماسية الرئيسية من العلاقات التالية :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2} , \quad \tau_2 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} = \max \tau , \quad \tau_3 = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}$$

$$(\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33}) \quad (2-51)$$

٢ - ٤ - ٣ تمثيل حالة الاجهاد الفراغية بواسطة دائرة إجهاد مور

بالاستعانة بالاجهادات الرئيسية $\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33}$ المعطاة يستطاع بواسطة الانشاء المشار اليه في الشكل (2-43) تعيين اجهادات القطع في السطح المائل .



شكل 2-43

برسم الزوايا α , γ يتم الحصول على النقاط A , C .

برسم قوس دائري مركزه M_1 وير من النقطة A وأخر مركزه M_3 وير من النقطة C يتم الحصول من تقاطع القوسين المذكورين على النقطة R التي تمثل احداثياتها قيم اجهادات القطع σ و τ المطلوبة .

ينبغي الانتباه إلى ان σ مرتبط بإشارته . أما τ فعلى العكس من ذلك لا يستطاع التنبؤ عن إشارته .

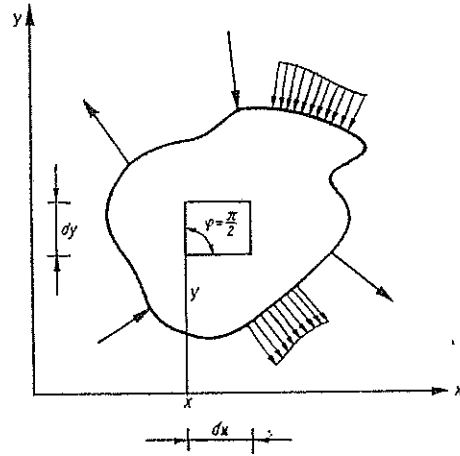
المصير النهائي

التشوهات

VERZERRUNGEN

٣ - ١ تشوهات قرص (Verzerrungen einer Scheibe)

سوف تبحث الان حالة التشوه لقرص يحمل بقوى تقع في مستويه ، ولهذا السبب سوف يدرس تغير الشكل (Formaenderung) الذي يقوم به عنصر سطحي اطوال اضلاعه dx و dy مقطوع من قرص غير متغير (شكل 3.1) . وذلك بعد ان يقوم القرص ككل بتغير شكله .



شكل 3.1

بمعرفة تغير طول الاضلاع (Laengenaenderung) dx , dy وكذلك التغير الزاوي (Winkelaenderung) للزاويا القائمة التي يغلقها العنصر السطحي داخله عند النقطة ذات الاحداثيات (x,y) يتم تعيين تغير الشكل كلياً .

تتحول الاطوال dx , dy (من الحالة غير المتغيرة) اثناء تغير الشكل الى الاطوال $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ وكذلك فان الزاوية الملقاة $\varphi = \pi/2$ تتحول لزاوية $\bar{\varphi}$.

يفهم تحت كلمة التغير النسبي الخطي (التمدد الخطي lineare Dehnung) ϵ_{xx} وكذلك ϵ_{yy} في النقطة ذات الاحداثيات (x,y) انه حاصل قسمة تغير الطول $d\bar{x} - dx$ وكذلك $d\bar{y} - dy$ على الطول الاصلي (الطول قبل التغير) dx وكذلك dy . وبذلك تعرف التغيرات النسبية الخطية (التمددات الخطية) في النقطة ذات الاحداثيات (x,y) كما يلي :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} - 1 = \epsilon_x \\ \epsilon_{yy} &= \frac{d\bar{y} - dy}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dy} - 1 = \epsilon_y \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

اما التغير الزاوي (الانزلاق) (Winkelaenderung Gleitung. Schiebung) للزاوية القائمة عند النقطة ذات الاحداثيات (x,y) والمحصورة بين الاضلاع dx , dy فتعرف بواسطة العلاقة التالية :

$$\gamma_{xy} = \varphi - \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi} \quad (3-2)$$

يطلق على القيم γ_{xy} , ϵ_{yy} , ϵ_{xx} المعبرة عن حالة التشوه

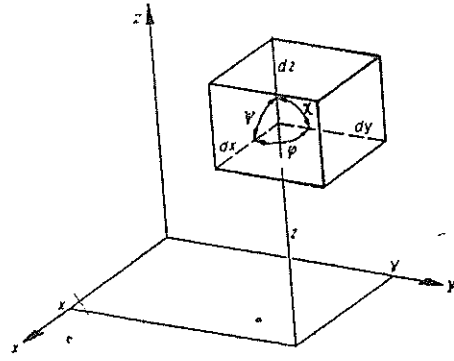
(Deformationszustand , Verzerrungszustand) اسم التشوهات (القيم التشوهية) وهي تواج قابلة للاشتقاق باستمرار بالنسبة لاحداثيات المكان x , y .

٣ - ٢ تشوهات جسم (Verzerrungen eines Körpers)

لوصف حالة تشوه جسم متغير سوف نختار مجموعة نسب متعامدة x , y , z ثم يدرس تشوه المكعب لانتهائي الصغر (صغير قدر الامكان) اطوال اضلاعه dx , dy , dz (شكل 3-2) ومقطع من المكان (x,y,z) من جسم غير متغير .

تتحول اطوال اضلاع المكعب غير المتغير dx , dy , dz لتأخذ بعد التغير الاطوال $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$ كما تتحول الزوايا القائمة φ , χ , ψ المحصورة بين الاضلاع dx , dy , dz لتصبح $\bar{\varphi}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\psi}$. وبذلك يتم التوصل لتمددات (للتغيرات النسبية الخطية) باتجاه المحاور الاحداثية الثلاثة الآتية :

$$\epsilon_{xx} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} - 1$$



شكل 3-2

$$\epsilon_{yy} = \frac{d\bar{y} - dy}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dy} - 1$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{d\bar{z} - dz}{dz} = \frac{d\bar{z}}{dz} - 1$$

وللتغيرات الزاوية الثلاثة التالية :

$$\gamma_{xy} = \varphi - \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}$$

$$\gamma_{yz} = \chi - \bar{\chi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\chi}$$

$$\gamma_{zx} = \psi - \bar{\psi} = \frac{\pi}{2} - \bar{\psi}$$

تصف (تحدد) التشوهات الستة المذكورة حالة التشوه في النقطة ذات الاحداثيات (x, y, z) بشكل كلي وهي توابع قابلة للاشتقاق باستمرار (المستمر) (z, y, x) بالنسبة للاحداثيات المكان (x, y, z) . إذا بواسطة ثلاثية قيم تمديدية (Dehnungsgrößen) وثلاثية تغيرات زاوية (Winkelaenderungen) يتم وصف (تحديد) حالة التشوه الفراغية (ثلاثية المحور) . تمثل التشوهات الستة المذكورة مركبات تنسور التشوه الفراغي (räumlichen Verzerrungstensor) التالي :

$$\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{yx} & d_{zx} \\ d_{xy} & d_{yy} & d_{zy} \\ d_{xz} & d_{yz} & d_{zz} \end{bmatrix} ; d_{kl} = \begin{cases} \epsilon_k & ; k = l \\ \frac{1}{2} \gamma_{kl} & ; k \neq l \end{cases} \quad (3-2)$$

بينما ينبغي ان تحقق الاجهادات شروط التوازن ، ينبغي ان تحقق القيم التشوهية (التشوهات)
 (Verzerrungsgrößen) شروط التوافق (Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen)
 الآتية :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3-3}$$

٣ - ٣ العلاقة بين التشوهات والانتقالات

(Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen)

يستعمل في نظرية المرونة على الغالب شعاع الانتقال (Verschiebungsvektor) :

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$$

بدلا عن القيم ϵ, γ . اثناء التشوه يتغير مكان كل نقطة من الجسم بالنسبة لمجموعة نسب ثابتة (مجموعة محاور إحداثية ثابتة) ، فالنقطة التي كانت قبل التشوه في المكان (x, y, z) سوف تنزلق (تنتقل) بعد تغير شكل الجسم لتصبح في المكان :

$$\bar{x} = x + V_x, \quad \bar{y} = y + V_y, \quad \bar{z} = z + V_z \tag{3.4}$$

ان التغيرات الاحداثية V_z, V_y, V_x هي مركبات لشعاع الانتقال وهي على العموم توابع لاحداثيات المكان z, y, x وبذلك فان شعاع الانتقال يعين حالة الانتقال (Verschiebungszustand) او ما يسمى بحقل الانتقال (Verschiebungsfeld) لجسم متغير (متشوه) . والان سوف يتم إيجاد

العلاقة التي تربط بين التشوهات الستة وبين مركبات الانتقال . لهذا السبب سوف تتم ، في البداية، دراسة حالة الانتقال لقرص. إن العنصر القرصي (العنصر المقتطع من قرص) (Scheibenelement) اللانهائي في الصغر الذي تبلغ أبعاده الموازية للمحاور الاحداثية dx , dy سوف يأخذ بعد التشوه شكل متوازي اضلاع (شكل 3-3) فالنقاط P , A , B تنتقل الى النقاط \bar{P} , \bar{A} , \bar{B} . يحدد انتقال النقطة $P(x,y)$ الى النقطة \bar{P} بواسطة شعاع الانتقال ذو المركبات V_x , V_y . إن النقاط $A(x+dx,y)$ و $B(x,y+dy)$ اللامتناهية في القرب من بعضها والتي تنتقل الى النقاط \bar{A} , \bar{B} سوف تعاني الانتقالات التالية :

$$V_x(x+dx,y) , V_y(x+dx,y) , V_x(x,y+dy) , V_y(x,y+dy)$$

باستخدام سلسلة (منشورة) تايلور (TAYLOR schen Entwicklung) يتم الحصول على علاقات تربط بين تلك الانتقالات وبين الانتقالات $V_x(x,y)$, $V_y(x,y)$ والتي تأخذ بعد اهمال كل الحدود هي التي من المرتبة الثانية فما فوق ، والتي هي صغيرة جداً ، الشكل التالي :

$$V_x(x+dx,y) = V_x(x,y) + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx$$

$$V_y(x+dx,y) = V_y(x,y) + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$$

$$V_x(x,y+dy) = V_x(x,y) + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy$$

$$V_y(x,y+dy) = V_y(x,y) + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy$$

تبلغ اطوال اضلاع متوازي الاضلاع \bar{PA} , \bar{PB} القيم التالية :

$$d\bar{x} = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} dx\right)^2} = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2}$$

$$d\bar{y} = \sqrt{\left(dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} dy\right)^2} = dy \sqrt{1 + 2 \frac{\partial V_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2}$$

وبواسطتها يتم الحصول على التمددات الخطية (التغيرات النسبية الخطية) الآتية :

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{d\bar{x}}{dx} - 1 = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2} - 1 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{d\bar{y}}{dy} - 1 = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial V_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2} - 1\end{aligned}\quad (3.4)$$

لتعيين التغير الزاوي للعنصر ، يشكل الجداء السلمي (skalare Produkt) لاشعة أضلاع متوازي الاضلاع وبذلك يتم بشكل أولي وبواسطة المركبات الآتية :

$$dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \quad , \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \quad , \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \quad , \quad dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy$$

الحصول على العلاقة التالية :

$$d\bar{x} d\bar{y} \cos \bar{\varphi} = \left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\right) \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \left(dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right)$$

ومنها يتم الحصول على العلاقة الزاوية :

$$\cos \bar{\varphi} = \frac{1}{d\bar{x} d\bar{y}} \left[\left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\right) \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \left(dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy\right) \right]$$

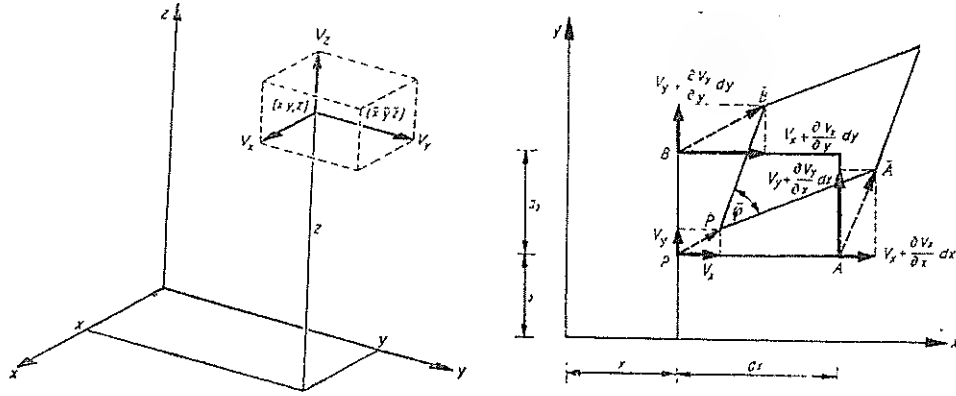
بواسطة القيم :

$$d\bar{x} = dx (1 + \epsilon_{xx}) \quad , \quad d\bar{y} = dy (1 + \epsilon_{yy}) \quad , \quad \rho = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right) = \sin \gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial y}}{(1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})}$$

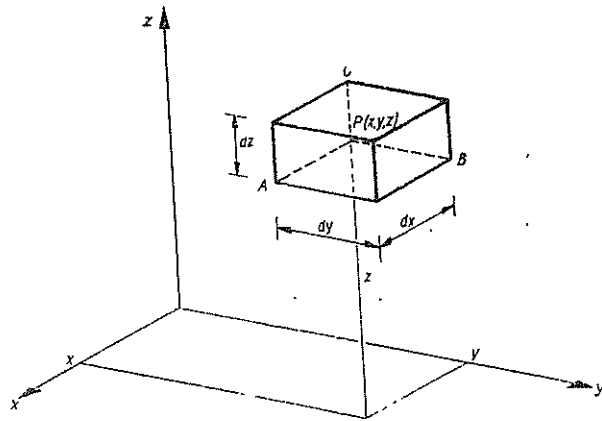
تقتصر مقاومة المواد في كثير من الحالات على التشوهات الصغيرة وذلك بحيث يمكن إهمال كافة الجداءات الناتجة عن ضرب مشتقين للانتقالات بالنسبة للحدود الخطية . بإدخال ماذكر في المنشورات ثنائية الحدود (Binomialentwicklung) العائدة لكل من ϵ_{xx} ، ϵ_{yy} ، $\gamma_{xy} \approx \sin \gamma_{xy}$ بعين الاعتبار ، عندئذ تأخذ تلك العلاقات الشكل المبسط التالي :



شكل 3-3

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} , \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (3.5)$$

وبهذا ينتهي إيجاد العلاقة التي تربط بين تشوهات قرص ومشتقات انتقاله .



شكل 3-4

بالتمع بهذه الاعتبارات ونقلها الى السطوح الجانبية المارة بالنقطة $P(x, y, z)$ ، من المكعب اللانهائي الصغير الممثل في الشكل (3-4) الذي يتحول بعد التغير الى متوازي السطوح (ذو الزوايا المنحرفة) عندئذ ينبغي اعتبار الانتقالات الثلاثة V_x ، V_y ، V_z . وبذلك يتم ، من اجل التشوهات الستة ، الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3-6}$$

في معظم المراجع وفيما يلي من فصول هذا الكتاب سوف يرمز لمركبات شعاع الانتقال بما يلي:

$$V_x = u \quad ; \quad V_y = v \quad ; \quad V_z = w \tag{3.7}$$

٣ - ٤ التمدد الحجمي (Volumendehnung, kubische Dehnung)

فيما يلي سوف يتم تخيل مكعب لانتهائي الصغر (صغير قدر الامكان) اطوال اضلاعه الموازية للمحاور الاحداثية هي dx, dy, dz وحجمه هو $dV = dx dy dz$ ومقتطع من الجسم غير المتغير (شكل 3-4) . أثناء التغير تتحول النقاط C, B, A, P ذات الاحداثيات :

$$\begin{array}{lll}
x, & y, & z, \\
x + dx, & y, & z, \\
x, & y + dy, & z, \\
x, & y, & z + dz
\end{array}$$

الى النقاط $\bar{C}, \bar{B}, \bar{A}, \bar{P}$ ذات الاحداثيات :

$$\begin{array}{lll}
x + V_x, & y + V_y, & z + V_z, \\
x + dx + V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx, & y + V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx, & z + V_z + \frac{\partial V_z}{\partial x} dx, \\
x + V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy, & y + dy + V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy, & z + V_z + \frac{\partial V_z}{\partial y} dy, \\
x + V_x + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz, & y + V_y + \frac{\partial V_y}{\partial z} dz, & z + dz + V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz
\end{array}$$

يعطى حجم المكعب المتشوه بواسطة المعينة التالية :

$$d\bar{V} = \begin{vmatrix} dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx & \frac{\partial V_y}{\partial x} dx & \frac{\partial V_z}{\partial x} dx \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} dy & dy + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy & \frac{\partial V_z}{\partial y} dy \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} dz & \frac{\partial V_y}{\partial z} dz & dz + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \end{vmatrix}$$

التي تأخذ ، بعد إهمال الجداءات الناتجة عن ضرب مشتقات الانتقالات بالنسبة للعدد واحد ، القيمة التالية :

$$d\bar{V} = dx \cdot dy \cdot dz \left(1 + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)$$

وبإدخال العلاقة (3.6) بعين الاعتبار ينتج عنها :

$$d\bar{V} = dV (1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$$

وبذلك يبلغ التغير الحجمي المنسوب على dV القيمة التالية :

$$e = \frac{d\bar{V} - dV}{dV} = \frac{d\bar{V}}{dV} - 1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v} \quad (3-8)$$

ويسمى بالتمدد الحجمي (التغير النسبي الحجمي) (kubische Dehnung oder Volumendilatation)

٣ - المحاور الرئيسية والتمددات الرئيسية من أجل المستوي

(Hauptachsen und Hauptdehnungen für die Ebene)

عندما تكون التشوهات :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} , \epsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} , \gamma_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (3-9)$$

في نقطة ما من قرص بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية x, y معلومة، عندئذ يستطاع بواسطتها تعيين التشوهات بالنسبة لاية مجموعة من المحاور الاحداثية (لتكن مجموعة المحاور الاحداثية ξ, η) التي تدور حول المجموعة الاصلية (وتشارك معها في المبدأ) :

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial V_{\xi}}{\partial \xi}, \quad \epsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial V_{\eta}}{\partial \eta}, \quad \gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial V_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial \xi} \quad (3.10)$$

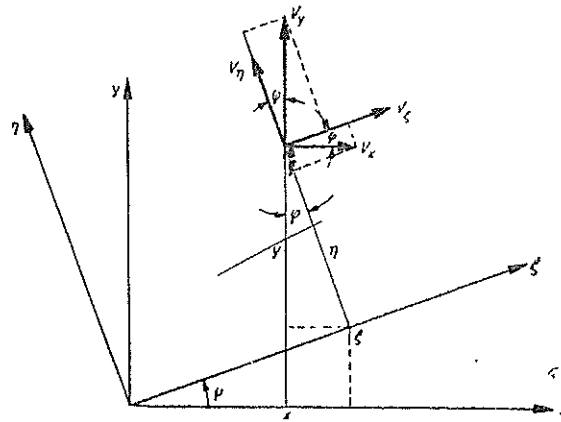
أن العلاقة التي تربط بين إحداثيات المجموعة الأصلية والمجموعة المدورة هي :

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.11)$$

أما العلاقة التي تربط بين الانتقالات بالنسبة للمجموعة الأصلية وبين الانتقالات بالنسبة للمجموعة المدورة فهي :

$$\begin{aligned} V_{\xi} &= V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi \\ V_{\eta} &= -V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.12)$$

يمكن قراءة هذه العلاقات من الشكل (3-5) مباشرة .



شكل 3-5

يفضل ، في العلاقات (3-9) و (3-10) استخدام نصف التغير الزاوي كالتالي :

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad \epsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \gamma_{\xi\eta}$$

لامكانية اعطاء الانتقالات V_{ξ} , V_{η} كتوابع للمتغيرات x , y يتم الحصول من المعادلة (3-10) بعد ادخال العلاقة (3-11) بعين الاعتبار ، على المعادلات التالية :

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial V_{\xi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_{\xi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial V_{\xi}}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial V_{\xi}}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\epsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial V_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = - \frac{\partial V_{\eta}}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial y} \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_{\xi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{\xi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial V_{\xi}}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial V_{\xi}}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial V_{\eta}}{\partial y} \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

بلاستعاضة عن القيم V_{ξ}, V_{η} بالقيم V_x, V_y من خلال العلاقة (3.12) ، يتم الحصول من المعادلات الأخيرة بشكل اولي على العلاقات الآتية :

$$\epsilon_{\xi\xi} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial V_y}{\partial x} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y} \sin \varphi \right) \sin \varphi$$

$$\epsilon_{\eta\eta} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial V_y}{\partial x} \cos \varphi \right) \sin \varphi + \left(- \frac{\partial V_x}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y} \cos \varphi \right) \cos \varphi$$

$$\epsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial V_x}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial V_y}{\partial x} \sin \varphi \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y} \sin \varphi \right) \cos \varphi$$

$$+ \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial V_x}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial V_y}{\partial x} \cos \varphi \right) \cos \varphi + \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial V_x}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial V_y}{\partial y} \cos \varphi \right) \sin \varphi$$

وبعد ادخال التشوهات $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$ ينتج :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi\xi} &= \epsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \epsilon_{yy} \sin^2 \varphi + \epsilon_{xy} \sin 2\varphi \\ \epsilon_{\eta\eta} &= \epsilon_{xx} \sin^2 \varphi + \epsilon_{yy} \cos^2 \varphi - \epsilon_{xy} \sin 2\varphi \\ \epsilon_{\xi\eta} &= - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \epsilon_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

وأخيراً وبعد الاستعانة بالعلاقات التالية :

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

يتم التوصل للمعادلات الآتية :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi \\ \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi \\ \varepsilon_{\xi\eta} &= -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

والآن سوف يسؤل عن الزاوية التي ينبغي ان تدورها مجموعة الاحداثيات ξ, η حتى تأخذ التمددات (التغيرات النسبية الخطية) في نقطة ما من قرص قيماً حدية .

بما ان للمعادلات (3-14) ، التي تعطي العلاقة بين التشوهات $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ وبين التشوهات $\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\eta\eta}, \varepsilon_{\xi\eta}$ نفس شكل معادلات الاجهاد (العلاقة 2-28) لذلك يمكن تعميم النتيجة التي تم الحصول عليها هناك ، على حالة التشوه في قرص . وحسب ذلك فانه يوجد هناك اتجاهان متعامدان هما s_1 و s_2 تأخذ التمددات عندها قيماً حدية :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \max \varepsilon \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} = \min \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

كما ينعدم عندها التغير الزاوي $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$. تسمى القيم الحدية المشار اليها بالعلاقة (3-15) بالتمددات الرئيسية (التغيرات النسبية الخطية الرئيسية Hauptdehnungen) كما تسمى المحاور المتعامدة s_1 و s_2 التابعة لها بمحاور التمددات الرئيسية (Hauptdehnungsachsen) . تعطى الزاوية φ_0 المحصورة بين المحورين x و s_1 بواسطة العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{yy}} \quad (3.16)$$

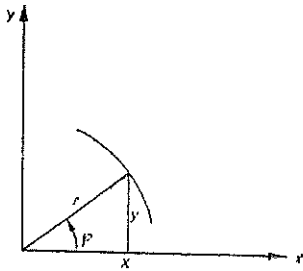
٣ - ٦ التشوهات بالنسبة للمحاور القطبية (Verzerrungen in Polarkoodinaten) :

في كثير من مشاكل مقاومة المواد لا يفضل اختيار مجموعة محاور احداثية متعامدة وذلك لصعوبة تمثيل النتائج . في مثل تلك الحالات يفضل نسب الانتقالات V_x , V_y , V_z والتشوهات ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} الى احداثيات منحنية (krummlinigen Koordinaten). فيما يلي سوف يتم شرح تحويل العلاقات السابقة بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية القطبية φ , r (شكل 3-6) .

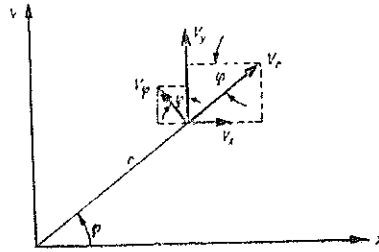
ان العلاقة التي تربط بين الاحداثيات القطبية φ , r والاحداثيات المتعامدة (الديكارنية) y , x كما هو معلوم ، هي التالية :

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

ليحلل شعاع انتقال نقطة ، احداثياته في المجموعة المتعامدة y ; x هي V_x , V_y ، الى مركبة قطرية V_r ومركبة مماسية V_φ (شكل 3-7) .



شكل 3-6



شكل 3-7

من الشكل (3-7) يتم التوصل بشكل مباشر للعلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} V_x &= V_r \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi \\ V_y &= V_r \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3,17)$$

أما التشوهات :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (V_r \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi) ,$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (V_r \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi) ,$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (V_r \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (V_r \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi)$$

فتأخذ بعد اعتبار العلاقات :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

الشكل التالي :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_r}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} \sin \varphi + V_r \frac{\sin^2 \varphi}{r} + V_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_r}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \cos \varphi + V_r \frac{\cos^2 \varphi}{r} - V_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial V_r}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} \cos \varphi \right)$$

$$- \frac{1}{r} V_r \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2r} V_\varphi \cos 2\varphi$$

بما أن V_r, V_φ هي توابع للمتغيرات r, φ وهذه هي بدورها توابع للاحداثيات x, y لذلك تصلح العلاقات التالية :

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial y} = \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial x} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r},$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}$$

وبذلك تأخذ التشوهات الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \cos^2 \varphi - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + V_r \frac{\sin^2 \varphi}{r} \\ &\quad - \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + V_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + V_r \frac{\cos^2 \varphi}{r} \\ &\quad + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - V_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \frac{1}{2r} \cos 2\varphi - V_r \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \\ &\quad + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - V_\varphi \frac{1}{2r} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

يمر من كل نقطة ذات الاحداثيات (x,y) والتي اعطيت تشوهاتها ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} مسبقاً ،
خطين احداثيين هما $\varphi = \text{const.}$ و $r = \text{const.}$.
تشكل المماسات على الخطوط الاحداثية المذكورة في النقطة (x,y) مجموعة احداثيية متعامدة
مدورة هي x,y والتي سوف يتم الآن نسب التشوهات اليها .
ليرمز لهذه التشوهات بالرموز :

$$\epsilon_{rr} , \epsilon_{\varphi\varphi} , \epsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi}$$

وبذلك استطاع استخدام علاقات التحويل (3-13) التي تعطي المعادلات التالية:

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \epsilon_{yy} \sin^2 \varphi + \epsilon_{xy} \sin 2 \varphi$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_{xx} \sin^2 \varphi + \epsilon_{yy} \cos^2 \varphi - \epsilon_{xy} \sin 2 \varphi$$

$$\epsilon_{r\varphi} = - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \sin 2 \varphi + \epsilon_{xy} \cos 2 \varphi$$

بواسطة العلاقة (3-18) يتم الحصول من المعادلات الاخيرة ، بعد اجراء عمليات حسابية أولية
طويلة ، على النتيجة التالية :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_r \right) \\ \epsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-19)$$

المصطلح الرابع

قانون المرونة

ELASTIZITÄTSGESETZ

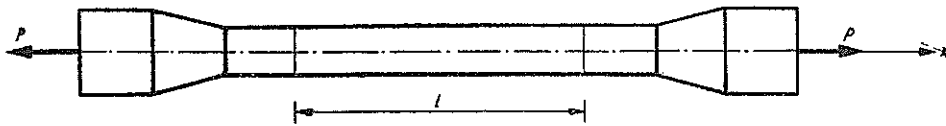
٤ - ١ اختبار المواد (Untersuchung von Werkstoffen)

لا يمكن حل وظيفة مقاومة المواد المتمثلة بتعيين حالة الاجهاد (Spannungszustand) وحالة الانتقال (Verschiebungszustand) للعناصر الانشائية إلا بعد أن يكون السلوك الفيزيائي (physikalische Verhalten) للمادة تحت تأثير الحمل معلوماً . لذلك تظهر ضرورة التجارب التي تعطي العلاقة التي تربط بين الحمولات المطبقة وانتقالات الجسم وتشوهاتة .

بسبب كثرة المواد المستعملة في المجالات الهندسية وتعدد العناصر الانشائية يبدو للوهلة الاولى ان التوصل لقوانين عامة وشاملة لكل المواد هو غير ممكن . لكن فيما بعد ظهرت امكانية تتبع الانواع المتعددة لتحميل العناصر الانشائية بشكل حسابي وذلك من خلال تجربتين ، هما تجربة الشد / الضغط وتجربة قتل القضيب الاسطواني .

٤ - ٢ تجربة شد الفولاذ (Zugversuch für Stahl)

لتعيين العلاقة التي تربط بين الحمل و بين تغير الشكل ، ينبغي تحميل قضيب فولاذي موجود ضمن حرارة الغرفة ، بحمولة شد محورية تنمو تدريجياً وببطء (حمولة مستاتيكية) . لاسباب صناعية (في الصنع) سوف يستخدم وبشكل عام قضيب اختبار اسطواني دائري الشكل توضع نهايتيه العريضتين في آلة الشد (شكل 4.1) .



شكل 4-1

تبعد مسافة القياس l للقضيب ذو المقطع العرضي F عن الاتساعات مخروطية الشكل (لنهايات القضيب) مسافة كافية بحيث تتألف حالة الاجهاد المتشكلة عن قوة الشد Z في جميع نقاط

مجال القياس من اجهاد ناظمي ثابت يشير باتجاه محور القضيب (الاوسط) ، بحيث تسيطر على القضيب ، ضمن مجال طول القياس ، حالة اجهاد خطية (وحيدة المحور) متجانسة (homogener, linearer Spannungszustand) (شكل 2 - 4) .

لوجوب تحقيق المحصلة $\sigma_{xx} F$ المائدة للاجهادات σ_{xx} مع القوى الخارجية P حالة التوازن ، لذلك تصلح من أجل أي مكان من مجال القياس العلاقة التالية :

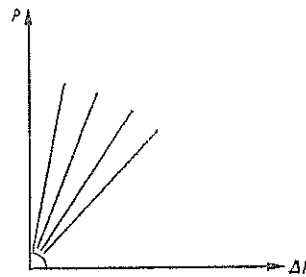
$$\sigma_{xx} F = P$$

من خلال التجارب المديدة تم التأكد من صحة تجانس حالة الاجهاد (على طول مجال القياس) المفروض .



شكل 4-2

نتيجة لتأثير قوة الشد P المطبقة تدريجياً على قضيب الاختبار فإن الطول الأصلي لقياس l سوف يزداد بالمقدار Δl . إذا رسمت الآن ، لكل امتطالة Δl قيمة القوة P التابعة لها ، ضمن مخطط ، عندئذ يتم الحصول ، حسباً تكون أبعاد قضيب الاختبار F ، l من أجل نفس المواد ، على منحنيات مختلفة للقوة والامتطالة (شكل 4-3) .



شكل 4-3

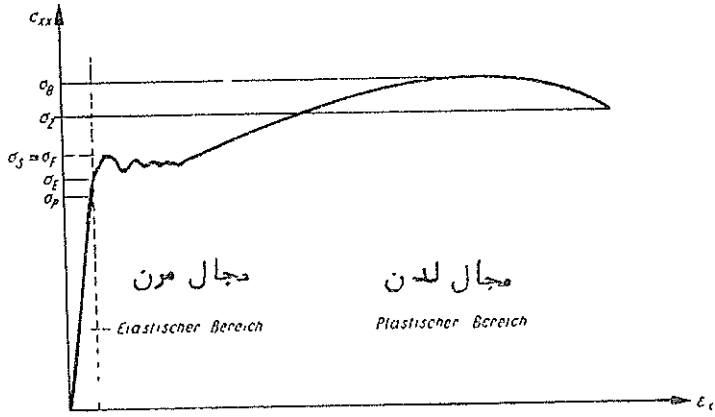
أما إذا رسمت التمددات (التغيرات النسبية الخطية) :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

على المحور الافقي (كترتيب Abszisse) ورسمت قيم الاجهادات التابعة لها :

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{F}$$

على المحور الشاقولي (كفصل Ordinate) لمجموعة نسب متعامدة عندئذ يتم الحصول ، من أجل نفس المادة مهما اختلفت أبعاد قضيب الاختبار F ، l على منحنى واحد الاجهاد - التمدد (Spannungs-Dehnungskurve) (شكل 4-4) .



شكل 4-4

لقد أخذت مفاهيم الاجهاد - التمدد أهميتها بعد أن أعطى إستعمالها علاقات تتعلق بالمادة ولكنها مستقلة عن أبعاد العناصر الانشائية .

من خلال تجربة الشد الممثلة في الشكل (4-4) نشأ قانون يعبر عن المادة ، يسمى قانون المادة (Stoffgesetz) . يتألف منحنى (خط) الاجهاد - التمدد (Spannungs-Dehnungs-Linie) للفولاذ سيره حتى تقريباً بشكل خطي وذلك حتى اجهاد معين ، هو الاجهاد σ_p ، هذا الحد فان الاجهادات تتناسب مع التمددات . لهذا السبب يسمى الاجهاد σ_p

بحد التناسب (Proportionalitätsgrenze) . بزيادة التحميل (بمتابعة التحميل) فان خط الاجهاد - التمدد يبدأ بالانحناء . بخطي الاجهاد σ_p (بعد زيادة التحميل) يظهر الاجهاد σ_E ، الذي يسمى بحد المرونة (Elastizitätsgrenze) والذي يتم تعيينه انطلاقاً من فكرة كون سلوك الفولاذ ، من اجل المحولات $\sigma_{xx} \leq \sigma_E$ ، هو سلوك مرناً كلياً ، فلا استطالات التي

تنتج عن تأثير حمولات أصغر من σ_E تزول بالتدريج كلياً بعد زوال الحمولة بالتدريج ويبطل وتسمى بالتغيرات المرنة . أما الاستطالات التي تنتج عن تأثير الحمولات $\sigma_{xx} > \sigma_E$ فيبقى جزءاً منها حتى بعد زوال الحمولة كلياً (وتسمى بالتغيرات اللدنة) . بمثابة زيادة الاجهاد فإن الخط المميز (Kennlinie) يزداد إنحناء حتى بلوغ قيمة الاجهاد $\sigma_s = \sigma_F$. بلوغ هذا الحد فإن التمدد يزداد بشكل كبير دون الحاجة لزيادة التحميل . أما ذلك فيعود سببه الى التغير الجذري (الواضح) في البناء البلوري للمادة . فالبلورات الكبيرة سوف تتمزق وتنضد ويطرا تغير على طبقاتها الوسطية ، تسمى هذه الظاهرة بالانسياب (Fließen des Werkstoffes) كما يسمى الاجهاد $\sigma_s = \sigma_F$ الذي يتشكل الانسياب حين بلوغه ، بحد الانسياب (حد الرضوخ ، حد الانقياد ، حد الازدعان) (Fließgrenze, Streckgrenze) يشير خط (منحنى) التمدد - الاجهاد عند بلوغه مجال الانسياب الى توزيع متموج بشكل خفيف يمكن إعادة سببه الى الاحتكاك الداخلي الذي يتشكل بين الطبقات البلورية للمادة. تنتهي مرحلة الانسياب بتقسية (verfestigung) للمادة تمكنها من تحمل اجهاد اكبر من الاجهاد σ_F . لكن التمددات المتشكلة اثناء ذلك تزداد بشكل كبير وهي تبقى حتى بعد إزالة (زوال) الحمولة (Entlastung) . تبقى هذه التقسية ممكنة حتى بلوغ الاجهاد الاعظمي σ_B المسمى باجهاد الكسر (اجهاد الانكسار) (Bruchspannung) او مقاومة الشد (متانة الشد Zugfestigkeit)

يشارك طول القياس الكلي حتى بلوغ اجهاد الكسر (الانكسار) في تغير الشكل وحسين بلوغ هذه القيمة من الاجهاد يظهر في المنطقة المخالطة في تركيبها الداخلي اختناق (تضيق Einschnürrung) واضح . يبدأ الفولاذ ضمن هذا المجال بالانسياب وتبدأ مساحة المقطع العرضي A للقضيب الاصلي تتناقص بشكل كبير . وما يلبث الاختناق بالازدياد الى ان يتم التغلب على قوى الارتباط (Kohäsionskräfte) عندئذ ينقطع (ينفصل) القضيب ويتم ذلك عند بلوغ الاجهاد σ_z . يقسم الاجهاد σ_E ، عند حد المرونة ، خط التمدد - الاجهاد الى مجالين :

$$0 \leq \sigma_{xx} \leq \sigma_E \quad (\text{elastischen Bereich}) \quad \text{مجال المرونة}$$

$$\sigma_E \leq \sigma_{xx} \leq \sigma_B \quad (\text{Plastische Bereich}) \quad \text{ومجال اللدونة}$$

بما أن خط الاجهاد - التمدد العائد للفولاذ يشير خارج مجال المرونة الى انسياب واضح تعقبه تقسية في مجال اللدونة لذلك يعتبر الفولاذ معدن لدن - متين (Zaeh plastisch) .

يرافق تغير الاطوال في تجربة الشد تغيراً في ابعاد المقطع العرضي ايضاً . فمثلاً يرافق ازدياد طول القضيب نقص في مساحة المقطع العرضي (القضيب المشدود يطول وينحف) وعلى العكس من ذلك ففي تجربة الضغط يرافق نقص طول القضيب المضغوط (تقاصر القضيب المضغوط) ازدياد في مساحة المقطع العرضي ايضاً (القضيب المضغوط يقصر ويشخن) .

بعض قيم المقاومة الستاتيكية لبعض المواد مقاسة بـ kp/cm^2

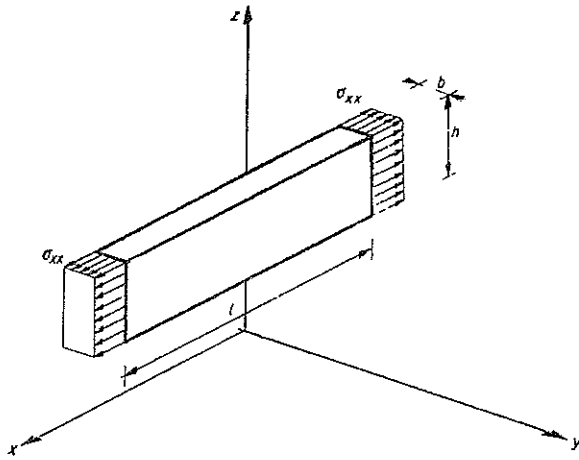
مادة التصنيع	عاب	لرورة	عامل القص	حد التناسب	حد الانسياب	مقاومة الشد (حد الانكسار)	مقاومة الضغط
فولاذ البناء St.37	2 100 000	810 000	1500 ÷ 2000	2000 ÷ 2500	3700 ÷ 4500	تصلح σ_{-B}	
فولاذ البناء St.52	2 10 000	810 000	2 6 5 0	3000 ÷ 3600	5200 ÷ 6400	تصلح σ_{-F}	
نحاس	1 20 000	—	—	—	—	—	
البيتيوم	700 000	—	—	—	—	—	
زجاج دوراك	7 0 000	—	—	—	—	—	
غرانيت	50 000	—	—	—	—	—	
بيتون	10 ⁵ 3 10 ⁵	—	—	—	30 ÷ 100	1000 ÷ 2000	
خشب الصنوبر الاليف	100 000	—	—	—	10 ÷ 20	50 ÷ 400	
خشب الصنوبر - على الاليف	3 000	—	—	—	حتى 900	400	
					30	60	

إذا قيست في قضيب مقطعه العرضي مستطيل الشكل (شكل 4.5) ، عند بلوغ الاجهاد فيه قيمة معينة ، علاوة التغير الطولي Δl ، تغيرات ابعاد المقطع العرضي Δh و Δb ايضاً ، عندئذ يمكن وبشكل مشابه لما تم في التمدد الطولي $\epsilon_{xx} = \Delta l / l$ تعيين التمددات العرضية (التغيرات النسبية العرضية Querdehnungen) :

$$\epsilon_{yy} = \frac{\Delta b}{b} \quad , \quad \epsilon_{zz} = \frac{\Delta h}{h} \quad (4-1)$$

في كلا الاتجاهين y, z . في حالة التحميل على الشد فان $\Delta h, \Delta b$ هي قيم سالبة بحيث تكون $\epsilon_{zz} < 0$, $\epsilon_{yy} < 0$.

تقترن التغيرات الموجبة لـ Δb و Δh ، في حالة التمدد السليبي (Stauchung) بتمددات عرضية موجبة .



شكل 4-5

تعالج في نظرية المرونة فقط الحمولات التي تكون من اجلها العلاقة بين الاجهادات والتمددات هي علاقة خطية وبذلك فان الاجهادات الاعظمية التي تتشكل في المادة تقع تحت مجال التناسب (Proportionalitätsgrenze) . أما تعيين الاجهادات التي تقع فوق مجال التناسب فهي من وظيفة نظرية اللدونة (Plastizitätsgrenze) وهي تظهر بشكل خاص اثناء حدادة (Schmieden) او شد (Pressen) او درفلة (Ziehen) المواد .

يعبر عن العلاقة الخطية ، التي تربط بين الاجهاد والتمدد الطولي ، والتي تعتبر اساساً لنظرية المرونة ، بواسطة التناسب التالي :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (4.2)$$

ويسمى هذا التناسب بقانون المرونة (Elastizitätsgesetz) أو قانون هوك (Hooke'sche Gesetz) وهو يعتبر أبسط قوانين المادة وهو يصلح فقط في المجالات الجزئية من جسم يعمل على الشد (يحمل على الشد) أو على الضغط وتسود فيه اجهادات محورية متجانسة . تمتد صلاحية قانون هوك على تغيرات الشكل الصغيرة فقط .

يسمى عامل التناسب E الذي تربط بينه وبين زاوية الميل α لمنحني الاجهاد - اتمدد في كل نقطة من مجال التناسب ، العلاقة التالية :

$$E = \operatorname{tg} \alpha \quad (4.3)$$

عامل المرونة (Elastizitätsmodul) أو عامل يونغ (YOUNG'schen Modul). تعين واحدة عامل المرونة E ، حسب العلاقة (4.2) وبداخل العلاقة التالية :

$$[\varepsilon_{xx}] = \frac{\text{طول}}{\text{طول}} = 1$$

بعين الاعتبار ، بواسطة العلاقة الآتية :

$$[E] = \frac{[\sigma_{xx}]}{[\varepsilon_{xx}]} = \frac{\text{وحدة القوة}}{\text{وحدة المساحة}}$$

لوصف سلوك المادة في المجال الذي يقع تحت مجال التناسب يلزم ، علاوة على عامل المرونة ، ثابت آخر للمرونة . ولقد كان العالم بواسون (POISSON) هو أول من قام بادخاله . فلقد ثبت له ان العلاقة التي تربط بين التمدد العرضي ε_{yy} ، ε_{zz} وبين التمدد الطولي ε_{xx} هي العلاقة الخطية التالية :

$$\varepsilon_{yy} = -\mu \varepsilon_{xx} ; \quad \varepsilon_{zz} = -\mu \varepsilon_{xx} \quad (4.4)$$

وان هذه العلاقة مستقلة عن قيمة الاجهاد الذي تم قراءه التمدد عنده . يسمى عامل التناسب μ ، الذي لا يتغير بالنسبة لكلا الاتجاهين y, z العموديين على اتجاه التحميل x بعدد (أو عامل) التمدد العرضي (عامل التقلص العرضي) (Querdehnungszahl) وتسمى قيمته العكسية

$$m = \frac{1}{\mu} \quad (4.5)$$

بعامل (أو ثابت) بواسون (POISSON'sche Konstante) . تعلن الاشارة السالبة في

العلاقة (4-1) بأن التمدد الطولي الموجب ϵ_{xx} تتبعه تمددات عرضية سالبة ($\epsilon_{zz}, \epsilon_{yy}$) والعكس صحيح . بالاستعاضة عن التمدد الطولي ϵ_{xx} في العلاقة (4.4) بما يساويه حسب العلاقة (4.2) عندئذ يتم التوصل للعلاقة ، التي تربط بين التمددات الثلاثة وبين الاجهاد الناظمي σ_{xx} ، التالية :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (4-6)$$

$$\epsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_{xx}}{E} , \quad \epsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

وبشكل مشابه يتم التوصل لنفس العلاقات عندما تأخذ مجموعة الاحداثيات وضماً آخر :

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad (4-7)$$

$$\epsilon_{xx} = -\mu \frac{\sigma_{yy}}{E} ; \quad \epsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

وكذلك

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (4-8)$$

$$\epsilon_{xx} = -\mu \frac{\sigma_{zz}}{E} , \quad \epsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

بواسطة هذه العلاقات يصبح من الممكن ، من اجل الاجهاد σ_{xx} المعلوم مسبقاً تعيين التمددات بالاتجاهات الثلاثة المتعامدة z,y,x . يظهر في تلك العلاقات ثابتين للمرونة هما E و μ فقط وهي تعتبر من ثوابت المادة .

مثال 40 :

تستطيل مسافة القياس l لقضيب مساحة مقطعه العرضي F نتيجة لتأثير قوة الشد P بالمقدار Δl .

$$\Delta l = 0,0164 \text{ cm} , \quad P = 5,5 \text{ Mp} , \quad F = 3,2 \text{ cm}^2 , \quad l = 20,0 \text{ m} :$$

المطلوب :

١ - تعيين قيمة اجهاد الشد σ_{xx} وقيمة التمدد الخطي ϵ_{xx} وقيمة عامل المرونة E .

٢ - تعيين مقاومة الشد (متانة الشد Zugfestigkeit) عندما تبلغ قيمة اكبر قوة يمكن للقضيب ان يتحملها هي 11,8 Mp .

الحل :

اجهاد الشد الثابت σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{F} = \frac{5,5}{3,2} = 1,719 \text{ Mpcm}^{-2}$$

التمدد الخطي (التغير النسبي الخطي) :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,0164}{20,0} = 0,00082$$

بالاستعانة بكلتا العلاقتين يتم تعيين عامل المرونة :

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = \frac{1,719}{0,00082} = 2096,0 \text{ Mpcm}^{-2}$$

تبلغ مقاومة الشد (متانة الشد) للمادة :

$$\sigma_B = \frac{11,8}{3,2} = 3,688 \text{ Mpcm}^{-2}$$

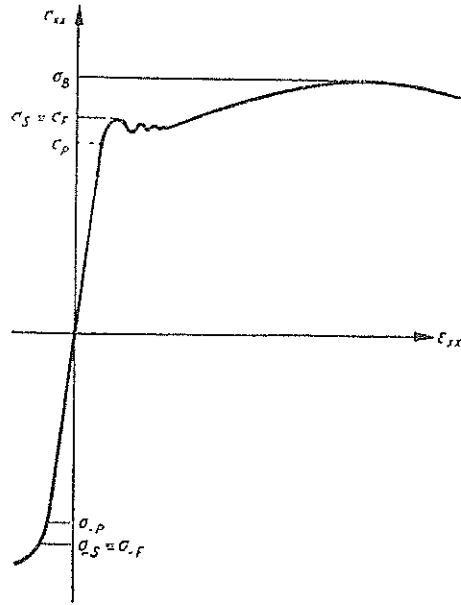
٤ - ٣ اضافات على تجربة الشد (Ergänzungen des Zugversuches)

لاكمال منحنى (خط) الاجهاد - التمدد للفولاذ سوف تجري على اجسام اختبار غليظة (gedrungenen probekörper) تجربة الضغط . حيث ترافق الاجهادات السالبة تمددات سالبة ϵ_{xx} . اما قانون هوك (العلاقة 4.2) فيصالح هنا ايضاً حتى مجال الضغط σ_{-p} (الشكل 4,6) .

يسمى حد الانسياب $\sigma_{-s} = \sigma_{-F}$ الذي يقع تحت حد التناسب σ_{-p} والذي تنساب المادة عنده في تجربة الضغط بحد الانسحاق (Quetschgrenze) وهو اقل ظهوراً من حد الانسياب في تجربة الشد .

يحدد المجال المرن الذي هو مجال اهتمام نظرية المرونة بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_{-p} \leq \sigma_{xx} \leq \sigma_B \quad (4-9)$$

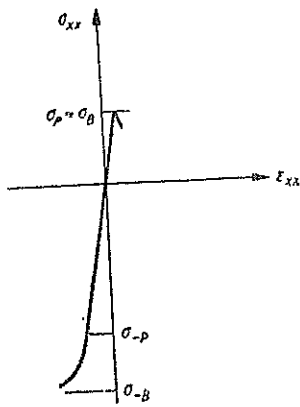


(شكل 4.6)

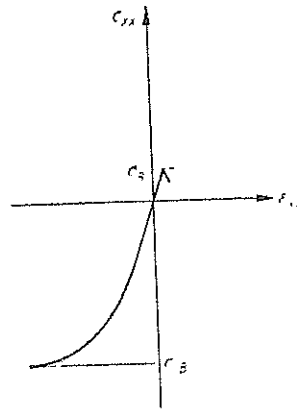
بشكل تقريبي تصلح من أجل الفولاذ :

$$\sigma_p = |\sigma_{-p}| \quad (4.10)$$

يحدد سلوك المواد في حالة التحميل على الشد أو الضغط بواسطة منحنى الاجهاد - التمدد أيضاً . فمن أجل حديد الصب (Gußeisen) يتم الحصول على منحنى التوزيع الممثل في الشكل (4.7) .



شكل 4.7



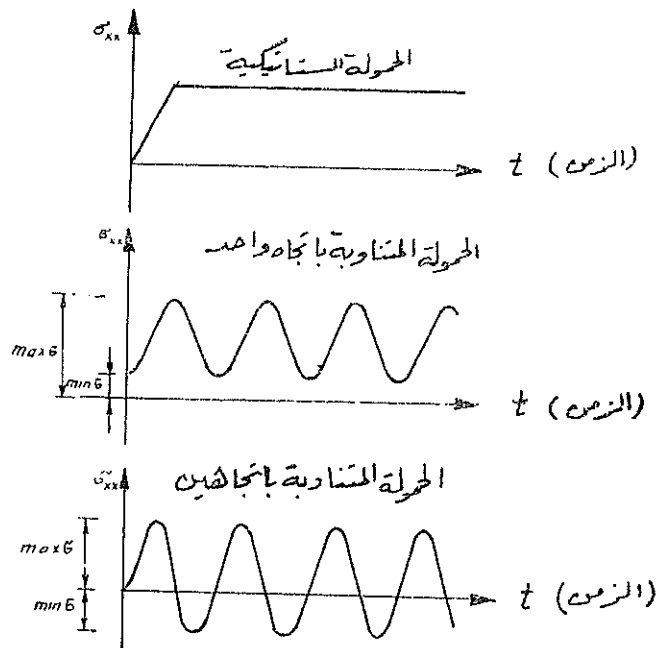
شكل 4.8

لا يلاحظ في قضيب الاختبار المصنوع من حديد الصب ضمن مجال الشد أي انسياب للمادة ولا أي اختناق (تضيق) بحيث تنطبق الاجهادات σ_B و σ_p فوق بعضها البعض . لذا فإن حديد الصب هو مثال نموذجي المواد المتقصفة (Sprüde Werkstoffe) . يشير منحني الاجهاد - التمدد الى ان حديد الصب يستطيع تحمل اجهادات ضغط كبيرة اما اجهادات الشد التي يستطيع تحملها فضئيلة نسبياً .

إن منحني الاجهاد - التمدد للاحجار الطبيعية (Natursteinen) والبيتون (Beton) هو كما يشير الشكل (4.8) . من هذه المنحنيات يتبين ان باستطاعة هذه المواد (بشكل رئيسي) تحمل اجهادات ضاغطة فقط . في هذه الحالة ومن اجل الاجهادات والتمددات الكبيرة فإن قانون هوك يفقد صلاحيته . ولهذا السبب فقد اقترح العالم بلفنجر (BILFINGER) علاقة على شكل قطع مكافئ تربط بين التمدد والاجهاد هي التالية :

$$\epsilon_{xx} = a \sigma_{xx}^m \quad (4-11)$$

ان كل منحنيات (خطوط) الاجهاد - التمدد التي يتم الحصول عليها من تجارب الشد/الضغط تتعلق من درجة الحرارة وتصلح فقط من اجل المحولات الساكنة التي تطبق بالتدرج ويعطى وتسمى بالمحولات الستاتيكية (statische Belastung) (شكل 4.9) .



شكل 4-9

٤ - ٤ أنواع الحمولات (Belastungsarten)

إن السير الزمني للحمولة يلعب دوراً هاماً بالنسبة لمقاومة المادة التي تشكل أساساً لما يسمى بالكشف عن المقاومة (Festigkeitsnachweis) .

يمكن التفريق بين ثلاثة حالات للتحميل :

١ - الحمولة الساكنة (او الحمولة الستاتيكية) (ruhende - oder statische Belastung) (شكل 4-9a) .

٢ - الحمولة المتناوبة باتجاه واحد (بدون تغير اشارة الاجهاد ، بدون قلب اشارة الاجهاد) (schwellende Belastung) (شكل 4-9b) .

٣ - الحمولة المتناوبة باتجاهين (مع تغير اشارة الاجهاد ، مع قلب اشارة الاجهاد) (شكل 4-9c) .

تصعد الحمولة الساكنة ، ابتداء من الصفر الى أن تبلغ قيمتها النهائية التي تحتفظ بها ، ببطء وبالتدريج .

تسمى مقاومة المادة للانكسار (Bruchfestigkeit des Werkstoffes) في هذه الحالة بالمقاومة الستاتيكية أو مقاومة الاثزان (statische - oder Standfestigkeit) σ_{st} , τ_{st} .

تعتبر اجهادات الانكسار σ_B , σ_{-B} المشكلة ، عن المقاومة الستاتيكية للمادة . تسمى مرحلة الانكسار بالذات في حالة التحميل الستاتيكي بالكسر القسري (Gewaltbruch) . لكن تحميل

اجزاء المنشآت وعناصر الآليات ليس ستاتيكياً بل يتغير بتغير الزمن (الاشكال 4-9b , 4-9c)

فجبل الرافعة مثلاً يحمل بشكل تصعد فيه الحمولة من الصفر الى قيمتها النهائية ومن ثم تعود الى الصفر . يسمى هذا النوع من الحمولات بالحمولة المتناوبة باتجاه واحد (فحالة الاجهاد تتغير بتغير الزمن بحيث تظهر له قيمتين من نفس الاشارة) وتسمى مقاومة الكسر (مقاومة الانكسار)

التابعة لها بالمقاومة المتناوبة باتجاه واحد أو المقاومة الابتدائية σ_{sch} , τ_{sch} (Schwell - oder Ursprungfestigkeit) وهي أصغر من المقاومة الستاتيكية وتزداد صفرًا

كلما ازداد عدد تناوب الحمولة (عدد تغير الحمولة) (Zahl der Lastwechsel) .

يقال عن الحمولة انها متناوبة باتجاهين عندما تغير الاجهادات اشارة رمنياً (بتغير الزمن) وتأرجح بين حدين ثابتين (مثلاً اذا اعقب ازالة الحمولة ، تحميل باتجاه آخر كما هو الحال على سبيل المثال في نابض الساعة أو عندما يتكرر نبي السلك الى الخلف والامام عندئذ يتم الحصول

على حمولة متغيرة) (شكل 4-9 c) وتسمى المقاومة الثابتة لها بالمقاومة المتناوبة (Wechselfestigkeit) و σ و τ وهي أصغر من المقاومة المتناوبة باتجاه واحد وتزداد صغراً بزيادة عدد تناوب الحمولة . ان الاجهاد الديناميكي في حالة الحمولة المتناوبة باتجاه واحد وكذلك في حالة الحمولة المتناوبة باتجاهين ، الذي يؤدي لانكسار المادة هو دائماً أصغر بكثير من الاجهاد الستاتيكي ولذلك يتكلم عن تعب (اعياء) المادة ويسمى الانكسار الناتج عن الحمولة المتناوبة بالانكسار الاهتزازي (Schwingungsbruch) او الانكسار الدائم (Dauerbruch) وتسمى القيم الحدية للاجهادات بالمقاومة المتناوبة (Wechselfestigkeit) او المقاومة الدائمة. (Dauerfestigkeit) بشكل عام وفي حالة الانكسار الدائم لا يتشكل على مقربة من مكان الانكسار اختناك (تضييق) تشير تجارب الشد والضغط الى ان تغير الشكل لا يبلغ قيمته النهائية بعد التحميل (بعد تطبيق الحمولة) مباشرة وإنما بعد إنقضاء زمن ليس بالقصير يسمى تأخر بلوغ تغير الشكل قيمته النهائية بعد تطبيق الحمولة بزحف المادة (Kriechen des Werkstoffes). ليس لظاهرة الزحف في الفولاذ أهمية أما في البيتون فينبغي أخذها بعين الاعتبار .

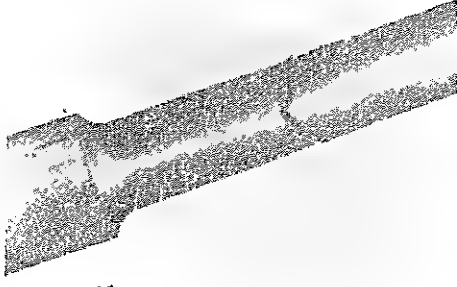
بتحميل قضيب فولاذي فوق حد المرونة σ_E ثم ازالة الحمولة كلياً يلاحظ عند إعادة تحميل الفولاذ من جديد ازدياد في قيمة حد المرونة (ارتفاع حد المرونة) . تسمى هذه الظاهرة بمفعول بلوشنجر (BAUSCHINGER - Effect) . يعتمد في الحياة العملية ، في بعض الحالات ، الى تقسية (vorrecken) الفولاذ الذي سوف يحمل على الشد بالاعتماد على هذه الظاهرة وبذلك يتم التوصل الى حد مرونة أعلى .

يلاحظ في تجارب الشد والضغط نوعان للانكسار (لكسر) هما : كسر انفصال (Trennbruch) وكسر اجهاد مماسي (Schubspannungsbruch) . يتعامد ، في كسر الانفصال ، سطح الكسر مع محور القضيب .

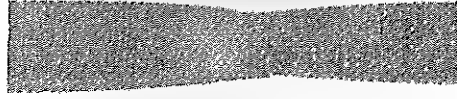
تشير المواد المتقصفة (Spröde Werkstoffe) كما على سبيل المثال في بعض خلائط الالمنيوم والشبه (النحاس الاصفر) والبيتون والخشب الى سطوح كسور تميل بزاوية 45° تقريباً بالنسبة لاتجاه القوة (الاشكال 4-10 a حتى 4-10 h) . تسمى امثال هذه الكسور بكسور الاجهاد المماسي .

لتعليل كلا الظاهرتين سوف تحسب الاجهادات التي تتشكل في سطح القطع الذي يميل بالنسبة لمحور القضيب (الاوسط) بالزاوية φ (شكل 4-11) . ان الاجهادات التي تتشكل في قطع عمودي على محور القضيب هي :

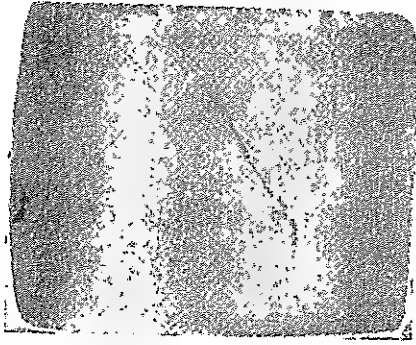
$$\sigma_{xx}(x) = \text{const.} , \quad \sigma_{yy} = 0 , \quad \tau_{xy} = 0$$



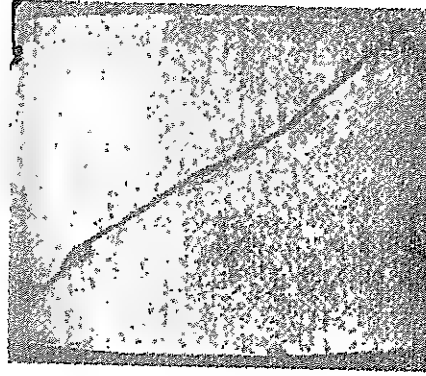
شكل 4-10 a قضيب مبروم مشدود
(خلية ΔI)



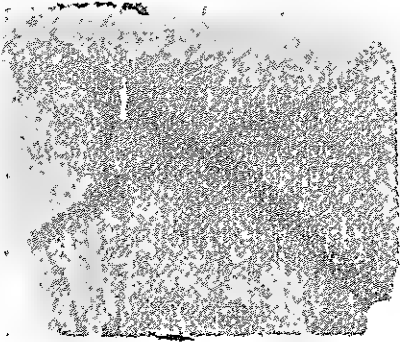
شكل 4-10 b قضيب مستطيل الشكل
مشدود (فولاذ)



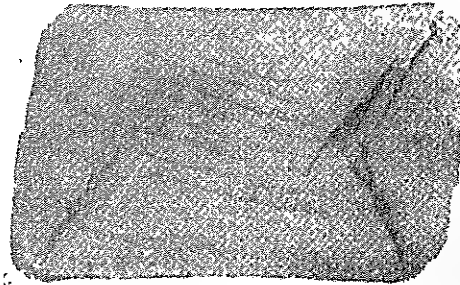
شكل 4.10 c جسم اسطواني مضغوط
(حديد صب)



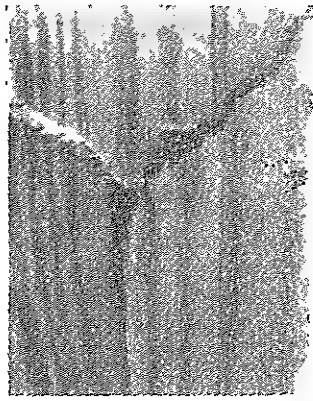
شكل 4.10 d جسم اسطواني مضغوط
(خلية Mg)



شكل 4,10 e مكعب من الخشب القاسي
(زان أحمر) مضغوط باتجاه الألياف



شكل 4.10 f مكعب من الخشب القاسي (زان
أحمر) مضغوط عمودياً على اتجاه الألياف



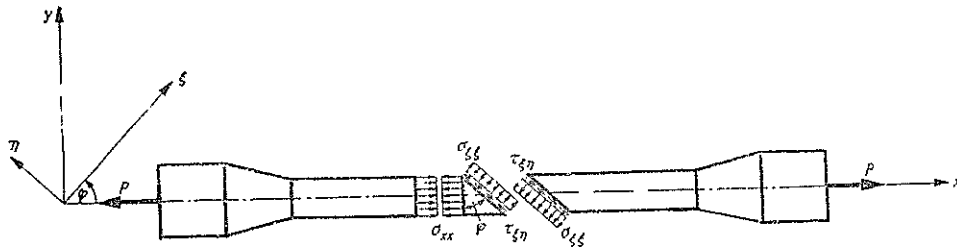
شكل 4.10 g خشب الصنوبر مضغوط
باتجاه الألياف



شكل 4.10 h جسم اسطواناني مضغوط
(فحم المهابط الكهربائية)

من أجل سطح القطع $\xi = \text{const}$ الذي يميل بزاوية φ ، يتم الحصول من العلاقة (2-24) على الاجهادات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\varphi) &= \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx}}{2} \cos 2\varphi = \frac{\sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\varphi) \\ \tau_{\xi\eta}(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx}}{2} \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$



شكل 4.11

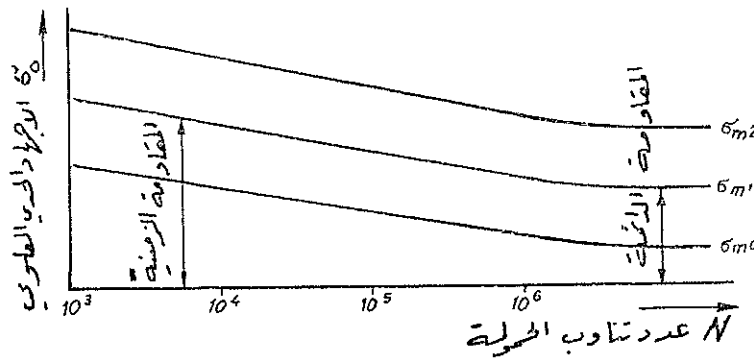
تشكل القيمة الاعظمية (بالقيمة المطلقة) للاجهاد المماسي من اجل $\sin 2\varphi = \pm 1$ ، اي باتجاه القطع $\varphi = \pm \pi/4$ (القطع الذي يميل بزاوية 45°) . اما الاجهادات التي تتشكل على سطوح القطع المذكورة فتبلغ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\xi\xi} \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) &= + \frac{\sigma_{xx}}{2} \\ \tau_{\xi\eta} \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) &= \mp \frac{\sigma_{xx}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

بواسطة العلاقة (4.13) يمكن الان تحليل اسباب تشكل نوعي الكسر في تجارب الضغط والشد: إذا كان سطح الكسر عمودياً على محور القضيبي (الوسط) فان الاجهاد الناظمي وحده هو المسؤول عن الكسر . اما اذا مال سطح الكسر بالنسبة لمحور القضيبي بزاوية قدرها 45° فان السبب في الكسر يعود للاجهاد المماسي الاعظمي $|\sigma_{xx}/2|$. تسمى السطوح المتشككة في هذه الحالة بـ *الانزلاق* (Gleitflaechen) (وذلك لانزلاقها بالنسبة لبعضها في لحظة الكسر).

٤ - ٥ مقاومة الاهتزاز (Schwingungsfestigkeit)

لقد تم ، فيما سبق ، التنويه الى ان مقاومة المواد في حالة الحمولة المبهتة تنقص (تنخفض) بزيادة عدد تناوب الحمولة . تسمى هذه الظاهرة بالتعب (Ermüdung) ، ولقد قام العلماء في الآونة الاخيرة بالتركيز على بحثها ودراستها. ففي القرن التاسع عشر قام العالم فولر (WOEHLER) باختبار مقاومة المواد المستخدمة في حالة الحمولة المبهتة واليه تنسب ما تسمى بمنحنيات فولر . (WOEHLER-Kurven) (شكل 4-11 b) .



شكل 4-11b

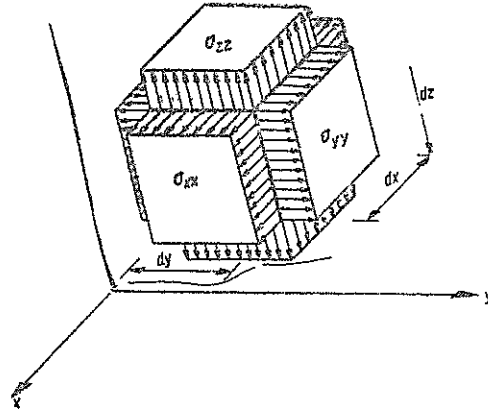
تمثل منحنيات فولر ، المنحنيات الحدية للاجهاد الاعلى (العالي) الذي تستطيع المادة المستخدمة تحمله وذلك من اجل عدد معين لتناوب الحمولة هو N ومن اجل اجهاد وسطي معين هو σ_m . لقد تم في الشكل (4-11b) تمثيل الاجهاد الحدي σ_0 بالاستعانة بعدد تناوب الحمولة (Lastwechselzahl) الذي مثل فيه بشكل لوغاريتمي .

يسمى الاجهاد الحدي في الجزء الهابط من المنحني بالمقاومة الزمنية (Zeitfestigkeit) وفي الجزء الاقوي بالمقاومة الدائمة (Dauerfestigkeit). ويسمى الاجهاد الذي لا يؤدي لتهدم (لتحطيم) المادة المستعملة معها ازداد عدد تناوب الجمولة بالاجهاد الدائم . ففي الفولاذ يتم بلوغ المقاومة الدائمة حين يصل عدد تناوب الجمولة 10^6 ، اما في المعادن الخفيفة فحين بلوغه العدد $8 \cdot 10^6$. تمثل المقاومة الدائمة في كثير من الحالات كنابع للاجهاد الوسطي σ_m اما الناتج فيسمى بالشكل الايضاحي (الصورة الايضاحية) للمقاومة الدائمة (Dauerfestigkeitssehaubild) .

تتلخص وظيفة المصمم بتخمين عدد وقيمة تناوب الجمولة التي تتشكل في اجزاء المنشأ على مدى حياته أما المنحني الذي ينتج عن ذلك فيتوجب وقوعه تحت المنحني الحدي المسموح .

٤ - ٦ قانون مرونة كوشي (CAUCHY sches Elastizitätsgesetz)

لقد تمت حتى الآن ، بواسطة قانون هوك ، معالجة التمدد الرن لجسم تسيطر عليه حالة إجهاد محورية (وحيدة المحور) متجانسة فقط . والآن سوف تتم دراسة مكعب لانتهائي الصغر (صغير قدر الامكان) أضلاعه الموازية للمحاور الأحادية هي dx, dy, dz وتؤثر عليه الاجهادات $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ الموازية لأضلاعه الثلاثة (شكل 4.2) .



شكل 4 12

نتيجة لتأثير هذه الاجهادات فان الجسم يقوم بالتغيرات الطولية التالية :

$$\begin{aligned} & \Delta dx (\sigma_{xx}) , \Delta dx (\sigma_{yy}) , \Delta dx (\sigma_{zz}) , \\ & \Delta dy (\sigma_{xx}) , \Delta dy (\sigma_{yy}) , \Delta dy (\sigma_{zz}) , \\ & \Delta dz (\sigma_{xx}) , \Delta dz (\sigma_{yy}) , \Delta dz (\sigma_{zz}) \end{aligned}$$

ينبغي الانتباه الى أن التغيرات الطولية الموجودة خارج القطر الرئيسي المخطط المكتوب أعلاه هي تغيرات طولية مسالبة. تعطى تغيرات الطول الكلية للكعب بواسطة العلاقة التالية (يتم الحصول على التمددات الكلية بجمع التمددات بالاتجاهات الطولية والتقصص العرضية بالاتجاهين العموديين عليها) :

$$\Delta dx = \Delta dx(\sigma_{xx}) + \Delta dx(\sigma_{yy}) + \Delta dx(\sigma_{zz}) ,$$

$$\Delta dy = \Delta dy(\sigma_{xx}) + \Delta dy(\sigma_{yy}) + \Delta dy(\sigma_{zz}) ,$$

$$\Delta dz = \Delta dz(\sigma_{xx}) + \Delta dz(\sigma_{yy}) + \Delta dz(\sigma_{zz})$$

وكذلك

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(\sigma_{xx}) + \epsilon_{xx}(\sigma_{yy}) + \epsilon_{xx}(\sigma_{zz}) ,$$

$$\frac{\Delta dy}{dy} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{yy}(\sigma_{xx}) + \epsilon_{yy}(\sigma_{yy}) + \epsilon_{yy}(\sigma_{zz}) ,$$

$$\frac{\Delta dz}{dz} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{zz}(\sigma_{xx}) + \epsilon_{zz}(\sigma_{yy}) + \epsilon_{zz}(\sigma_{zz})$$

بتعويض التمددات (العلاقة 4-6 حتى 4-8) في العلاقة الأخيرة ، يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy} - \mu \sigma_{zz}) , \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \mu \sigma_{zz}) , \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (-\mu \sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) . \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

تعطي هذه المعادلات العلاقة التي تربط بين الاجهادات الناعمية والتمددات لحالة إجهاد فراغية (ثلاثية المحور) ولقد كان اول من قام بالتعبير عنها هو العالم كوشي (CAUCHY) .
لحل هذه المعادلات بالنسبة للاجهادات يصار اولاً ومن العلاقة (4-14) ، لتشكيل مجموع التمددات (الانفعالات) :

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4-15)$$

بإضافة ما يلي :

$$0 = -\mu \sigma_{xx} + \mu \sigma_{xx}, \quad 0 = -\mu \sigma_{yy} + \mu \sigma_{yy}, \quad 0 = -\mu \sigma_{zz} + \mu \sigma_{zz}$$

لقانون مرونة كوشي ينتج :

$$E \epsilon_{xx} = \sigma_{xx} (1 + \mu) - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

$$E \epsilon_{yy} = \sigma_{yy} (1 + \mu) - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

$$E \epsilon_{zz} = \sigma_{zz} (1 + \mu) - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

وبعد إعتبار العلاقة (4-14) يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 + \mu} \left[\epsilon_{xx} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 + \mu} \left[\epsilon_{yy} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1 + \mu} \left[\epsilon_{zz} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

تسمى هذه العلاقات في كثير من المراجع بقانون هوك المعمم

(verallgemeinertes HOOKE sches Gesetz) للاجهادات الناعمة .

بواسطة العلاقة (4-14) يمكن التعبير عن التمدد الحجمي (Kubische Dehnung) بالشكل التالي :

$$e = \frac{d\bar{V}}{dV} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (4-17)$$

بسبب صلاحية العلاقة السابقة يتبين ان التمدد الحجمي هو لا متغير (Invarianten) (قيمة مستقلة) بالنسبة للدوران الاحداثيات . بشكل خاص عندما تكون :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma$$

فان التمدد الحجمي يأخذ الشكل التالي :

$$e = \frac{d\bar{V} - dV}{dV} = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma$$

من الخبرة يتبين أنه لا يمكن ان يكون التغير الحجمي (Volumenaenderung) في حالة اجهادات الشد من كل الاطراف ، مائلاً كما لا يمكنه أن يكون في حالة إجهادات الضغط على كل الجهات ، موجباً . من العلاقة العامة (4-17) ومن العلاقة الخاصة الاخيرة يتبين ان إشارة e تتحدد من خلال إشارة الاجهادات . من ذلك يتم التوصل لصلاحيية العلاقة التالية :

$$1 - 2\mu \geq 0$$

التي تحدد المجال الذي يقع عامل التمدد العرضي:

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{2} \quad (4-18)$$

ضمنه . من اجل $\mu=0,5$ ينعدم ، حسب العلاقة (4-17) ، التغير الحجمي . تسمى المواد التي تنطبق عليها هذه الحالة بالمواد غير القابلة للانضغاط (inkompressible Werkstoffe) .

حالات خاصة :

ا - حالة الاجهاد المستوية (Ebener Spannungszustand) .

من اجل حالة الاجهاد المستوية ينعدم في المستوي x , y الاجهاد الناطمي σ_{zz} . اما قانون مرونة كوشي الذي يصلح من اجل هذه الحالة فيتم الحصول عليه من العلاقة (4-14) بالشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

وكذلك من العلاقة (4-16) بالشكل الآتي :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy}) , \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{yy} + \mu \epsilon_{xx}) , \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{1-\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

ب - حالة التشوه المستوية (Ebener Verzerrungszustand) .

إذا لم يكن بالإمكان تشكل التمدد بالاتجاه z وكانت التمددات في كل من الاتجاهين y, x ممكنة حينئذ يقال عن هذه الحالة أنها حالة تشوه مستوية . ففي هذه الحالة يتم الحصول ، من قانون مرونة كوشي (4-14) وكذلك (4-16) وبلاستعانة بالتمدد $\epsilon_{zz} = 0$ على العلاقات التالية :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1+\mu}{E} [1 - \mu' \sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1+\mu}{E} [(1 - \mu') \sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}] \\ \epsilon_{zz} &= \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{E \mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (\epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

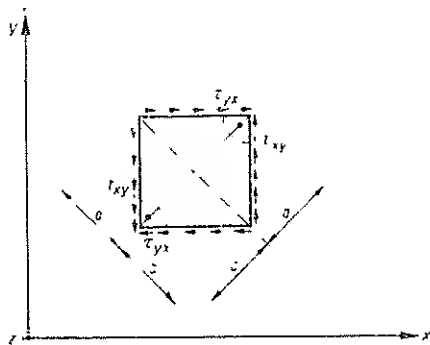
أو بعد حلها بالنسبة للاجهادات على العلاقات الآتية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1 - \mu') \epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1 - \mu') \epsilon_{yy} + \mu \epsilon_{xx}] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{E \mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

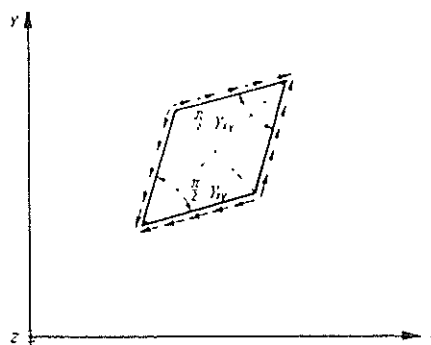
٤ - ٧ قانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية

(Elastizitaetsgesetz für schubbeanspruchung)

بينما يعطي قانون مرونة كوشي (العلاقة 4.14 و 4.16) العلاقات التي تربط بين الاجهادات الناعمية والتمددات فإن قانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية يعطي العلاقات التي تربط بين الاجهادات المماسية (Schubspannungen) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ و $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ و $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ والتغيرات الزاوية $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ، $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ ، $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. للتمكن من التعبير عن هذه العلاقات سوف يتم تمثيل المكعب الممثل في الشكل (4-13) والحمل بالاجهادات المماسية $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. لتكن مادة الجسم المدروس محققة لقانون مرونة كوشي . يؤدي التحميل الصافي بالاجهادات المماسية (التحميل القصي الصافي) الى تغير زاوي γ_{xy} لكل سطح من سطوح القطع المربعة الشكل $x = \text{const}$ بحيث تتحول الزاوية القائمة التي تغلقها السطوح فيما بينها (شكل 4-13) الى زاوية حادة (شكل 4-14) :



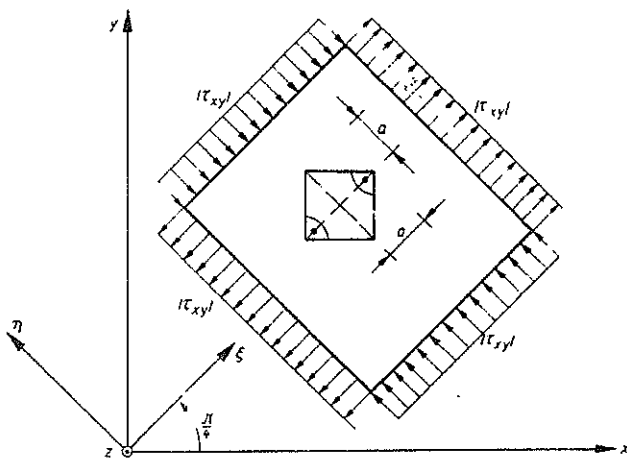
شكل 4-13



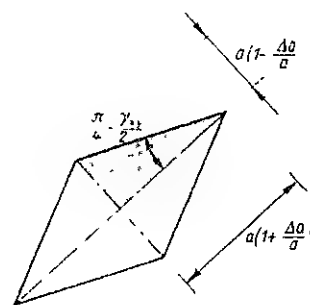
شكل 4-14

$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$

يمكن التوصل للتحميل القصي الصافي المذكور بواسطة الاجهادات الناعمية $\tau_{xy} = \sigma_{\xi\xi}$ و $\sigma_{\eta\eta} = -\tau_{xy}$ التي تؤثر على السطوح المنسوبة الى المجموعة ξ, η المدورة بزاوية $\pi/4$ بالنسبة لمجموعة الاحداثيات x, y وذلك وفقاً لحالة اجهاد ده سانت فينانت (ده سان فينان) المشار إليها في المثال 35 من الفقرة ٢ - ٣ - ٦ (شكل 4-15) .



شكل 4-15



شكل 4-16

لايجاد علاقة تربط بين التغير الزاوي وبين التمددات سوف تتم دراسة نصف الوتر a لسطح القطع $z = \text{const}$ من المكعب غير المتشوه والذي يأخذ بعد التشوه الاطوال التالية :

$$a + \Delta a = a \left(1 + \frac{\Delta a}{a} \right)$$

$$\dot{a} - \Delta a = a \left(1 - \frac{\dot{\Delta a}}{a} \right)$$

بعد اعتبار العلاقة :

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_{xy}}{2} \approx \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

يتم الحصول على ظل الزاوية $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{xy}}{2}$ وذلك كما يلي :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{xy}}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma_{xy}}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{xy}}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma_{xy}}{2}}{1 + \frac{\gamma_{xy}}{2}} = \frac{a \left(1 - \frac{\Delta a}{a} \right)}{a \left(1 + \frac{\Delta a}{a} \right)}$$

منها ينتج

$$\frac{\Delta a}{2} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

بالاستعانة بالتمددات في كل من الاتجاهين ξ, η :

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\Delta a}{a}, \quad \epsilon_{\eta\eta} = - \frac{\Delta a}{a}$$

يتم الحصول ، من العلاقة السابقة، على العلاقات التي تربط بين التمددات والتغيرات الزاوية المطلوبة:

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\gamma_{xy}}{2}, \quad \epsilon_{\eta\eta} = - \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (4.23)$$

من قانون مرونة كوشي (4-19) يتم الحصول ، بعد الاستعانة بالعلاقات $\sigma_{\xi\xi} = \tau_{xy}$ و $\sigma_{\eta\eta} = -\tau_{xy}$ على ما يلي :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\xi\xi} - \mu \sigma_{\eta\eta}) = \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy} \\ \epsilon_{\eta\eta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\eta\eta} - \mu \sigma_{\xi\xi}) = - \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

بمقارنة العلاقة (4.23) مع العلاقة (4-24) ينتج :

$$\frac{1+\mu}{E} \tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

أو

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \quad (4.25)$$

بنفس الطريقة يمكن ، من أجل الاجهادات المماسية τ_{zx} ، τ_{yz} ، اشتقاق العلاقة التالية :

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \quad (4.26)$$

و

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} \quad (4.27)$$

تمثل العلاقات (4-25 حتى 4-27) قانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية لمادة متجانسة متماثلة المناحي (مادة متجانسة ايزوتروبية) ومنها يتم التوصل للعلاقة الخطية بين الاجهادات المماسية وبين التغيرات الزاوية الصغيرة الناتجة عنها . يسمى عامل التناسب :

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (4.28)$$

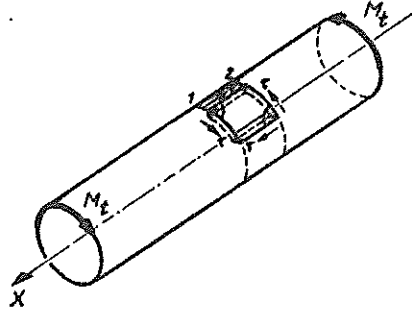
بعامل المرونة القصي (Schubelastizitätsmodul) أو عامل الانزلاق (Gleitmodul) بهذا يكون قد تم التوصل لقانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية ممثلاً بالشكل التالي :

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} , \tau_{yz} = G\gamma_{yz} , \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (4.29)$$

إذا تم ، بواسطة تجربة الشد او تجربة الضغط ، تعيين عامل المرونة E وعامل التمدد العرضي μ لمادة عندئذ يستطيع تعيين عامل المرونة القصي G حسب العلاقة (4-28) . لكن نظراً لما يعده التعيين الدقيق لعامل التمدد العرضي μ لمادة ، بواسطة تجربة الشد او تجربة الضغط ، من صعوبات كبيرة لذلك فإن تعيين G من العلاقة (4-28) ليس أمراً سهلاً كما يعتقد . لذلك يعين عامل الانزلاق G بالاجراء التجارب ثم يعين بعد ذلك عامل التمدد العرضي بواسطة العلاقة (4-28) :

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (4.30)$$

فلتعيين عامل المرونة القصي G تجرى تجربة الفتل (Torsionsversuch) على قضيب اسطواناني دائري يحمل في نهايته بعزم فتل متعاكسة (شكل 4-17) .



شكل 4-17

ختاماً لهذه الفقرة سوف يتم تلخيص قانون المادة لجسم مثالي المرنة (ideal-elastisch) ومتجانس ومتماثل المناحي (قانون كوشي او ما يسمى في اغلب المراجع بقانون هوك المعمم) :

التمدّدات (Dehnungen) :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

التغيرات الزاوية (Winkelaenderungen) :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (4.32)$$

أو تكتب بعد حلها بالنسبة للاجهادات :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\epsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\epsilon_{yy} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\epsilon_{zz} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

بواسطة الاجهادات الرئيسية $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ يتم التوصل من العلاقة (4-31) الى التمددات الرئيسية $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu (\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \mu (\sigma_{33} + \sigma_{11})] \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

حالات خاصة :

آ - حالة الاجهاد المستوية (Ebener Spannungszustand) :

في أحد الاتجاهات لا تشكل اجهادات .

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4.35)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}), \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (4.36)$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) ; \quad \gamma_{zx} = 0$$

وبذلك

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_{yy} + \mu \epsilon_{xx}) \quad (4.37)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

ب - حالة التشوه المستوية (Ebener Verzerrungszustand) :

في أحد الاتجاهات تنعدم تغيرات الشكل .

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

أن فرضية حالة التشوه المستوية هي على العموم حالة اجهاد فراغية . من العلاقة (4.21) يشج
بعد تبديل :

$$\epsilon_{zz} = 0 : \sigma_{zz} = \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.38)$$

وبذلك يتم الحصول على التغيرات (Verformungen) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (4.39)$$

وكذلك الاجهادات :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\epsilon_{xx} + \mu\epsilon_{yy}] ; \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\epsilon_{yy} + \mu\epsilon_{xx}] ; \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} &= \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) ; \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

دائرة التشوه المستوية (Ebener Verzerrungskreis) :

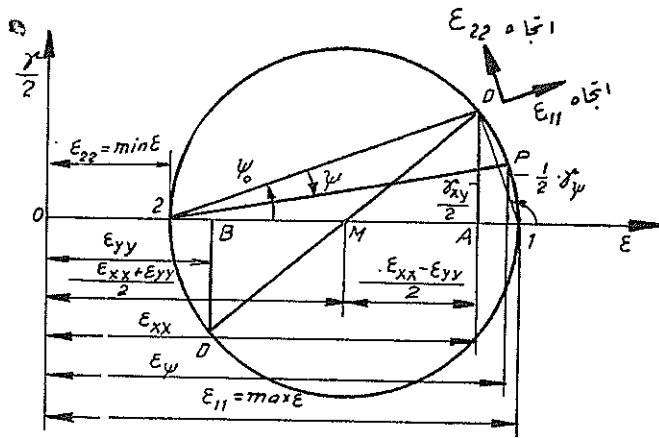
بشكل مشابه لدائرة اجهاد مور يمكن أيضاً تخطيطاً إيجاد قيم التشوهات على سطح يشك
ناظمه مع المحور x الزاوية ψ .

$$\begin{aligned} \epsilon_{\psi} &= \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\psi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\psi = \\ &= \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} + \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \cos 2(\psi_0 - \psi) \\ \frac{\gamma_{\psi}}{2} &= - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \sin 2\psi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\psi = \\ &= \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \sin 2(\psi_0 - \psi) \end{aligned} \quad (4.41)$$

يتم الحصول على اتجاه التغيرات النسبية الرئيسية (التمددات الرئيسية) $\epsilon_{22}, \epsilon_{11}$ من العلاقة التالية :

$$\operatorname{tg} 2 \psi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \quad (4.42)$$

تتطابق المعادلات (4-41) مع معادلات حالة الاجهاد المستوية (العلاقة 2-24) ولهذا السبب يمكن تبديل τ_{xy} في دائرة اجهاد مور بـ $\gamma_{xy}/2$ (شكل 4-18)



شکل 4-18

٨ - ٤ أمثلة

مثال 41 :

حمل قضيب موشوري (prismatische Druckstab) مقطعه العرضي دائري الشكل بحجمولة ضاغطة (شكل 4-18a) .

المعطى :

$$P = 2000 \text{ kp} \quad , \quad r = 2 \text{ cm} \quad , \quad \varphi = 30^\circ$$

المطلوب : تعيين

- ١ - اجهادات القطع (Schnittspannungen) التي تتشكل في المستوي الذي يميل بزاوية φ .
- ٢ - الاجهادات المماسية الاعظمية.

بإستخدام الطريقتين التحليلية والتخطيطة .

الحل :

الاجهادات في القطع النازمي (القطع العمودي على المحور الاوسط للقصيب) :

$$\sigma_0 = - \frac{P}{F} = - \frac{P}{\pi r^2} = - 159 \text{ kp/cm}^2$$

الطريق التحليلي :

اجهادات القطع :

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\varphi) = - 119,5 \text{ kp/cm}^2$$

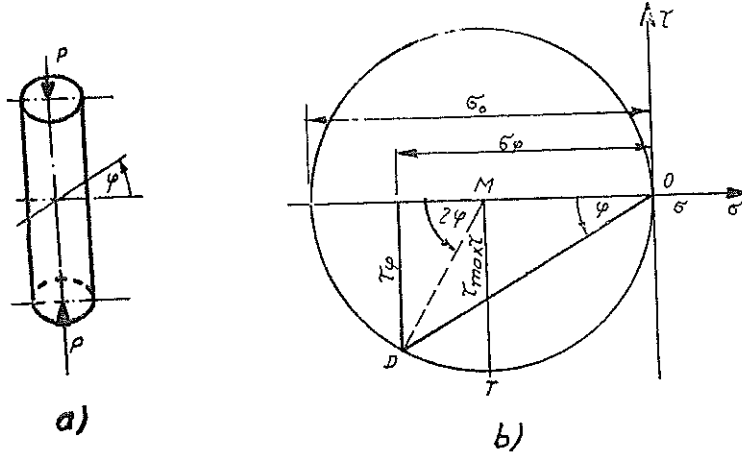
$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\varphi = - 69 \text{ kp/cm}^2$$

الاجهاد المماسي الاعظمي (وهو يتشكل عند الزاوية $\varphi = 45^\circ$) :

$$\max \tau = \tau_\varphi (\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_0}{2} = - 79,5 \text{ kp/cm}^2$$

الطريق التخطيطة :

المقياس : $1 \text{ cm} \widehat{=} 34,5 \text{ kp/cm}^2$ (شكل 4-18 b)



شكل 4-18 a, b

مثال 42 :

المعطى : حالة اجهاد مستوية

$$\sigma_{xx} = -1000 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{yy} = +400 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{xy} = -500 \text{ kp/cm}^2$$

المطلوب : تعيين

١ - الاجهادات الرئيسية σ_{11}, σ_{22} .

٢ - اتجاه الاجهادات الرئيسية .

٣ - اجهادات القطع $\sigma_\varphi, \tau_\varphi$ التي تتشكل في المستوي الذي يميل ناظمه بزاوية قدرها $\varphi = 30^\circ$.

٤ - الاجهادات المماسية الرئيسية .

٥ - سطوح الاجهادات المماسية الرئيسية .

وذلك باتباع الطريقتين التحليلية والتخطيطة .

الحل :

الطريق التحليلي :

اتجاه الاجهادات الرئيسية :

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = 0,7144$$

$$\varphi_0 = 17,77^\circ ; \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = 107,77^\circ$$

(φ_0 هي الزاوية المحصورة بين الناظم على السطح والمحور x وهي تشير بمكس اتجاه عقارب الساعة) .

$$\sigma_{22} = \sigma_\varphi(\varphi = \varphi_0) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi_0 + \tau_{xy} \sin 2\varphi_0 = -1160,3 \text{ kp/cm}^2$$

$$= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

الاجهادات المماسية الرئيسية :

$$\tau_1 = \tau_\varphi(\varphi = \varphi_1) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi_1 + \tau_{xy} \cos 2\varphi_1 = 860,3 \text{ kp/cm}^2$$

$$\tau_2 = \tau_\varphi\left(\varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\tau_1$$

الطريق التخطيطي :

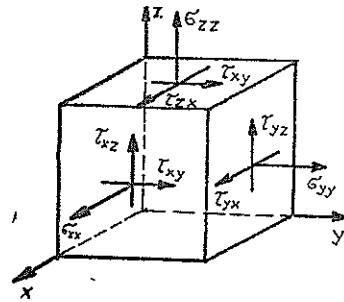
لقد تم في الشكل (4-19) تمثيل دائرة اجهاد مور .

المقياس :

$$1 \text{ cm} \cong 370 \text{ kp/cm}^2$$

مثال 43 :

المعطى : حالة اجهاد فراغية (شكل 4-20) .



شكل 4-20

$$\sigma_{xx} = 300 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 200 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{yy} = 200 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{yz} = 200 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{zz} = 500 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \tau_{zx} = 100 \text{ kp/cm}^2$$

المطلوب : تعيين :

١ - الاجهادات الرئيسية σ_{11} ، σ_{22} ، σ_{33} .

٢ - الاجهاد المماسي الاعظمي .

الحل :

معادلة ايجاد الاجهادات الرئيسية (Bestimmungsgleichung der Hauptspannungen) :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - [\sigma_{xx}(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{yz}^2) + \tau_{xy}(\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{xy}\sigma_{zz}) + \tau_{zx}(\tau_{xy}\tau_{yz} - \tau_{zx}\sigma_{yy})] = 0$$

القيم العددية :

$$\sigma^3 - 10^3 \sigma^2 + 22 \cdot 10^4 \sigma - 4 \cdot 10^6 = 0$$

$$\sigma_{11} = 689,2 \text{ kp/cm}^2, \quad \sigma_{22} = 290,9 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{33} = 19,9 \text{ kp/cm}^2$$

الاجهاد المماسي الاعظمي :

بما أن :

$$\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33}$$

فإن :

$$\max \tau = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} = 334,65 \text{ kp/cm}^2$$

ان سطح الاجهاد المماسي العائد للاجهاد المماسي $\max \tau$ ينصف الزاوية القائمة المحصورة بين سطوح الاجهادات الرئيسية العائدة للاجهادات الناعمية σ_{11} , σ_{33} .

مثال 44 :

المعطى : حالة تشوه مستوية .

$$\sigma_{xx} = 400 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{yy} = -200 \text{ kp/cm}^2 ; \mu = 0,3$$

$$\tau_{xy} = -200 \text{ kp/cm}^2 ; E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

المطلوب : تعيين

١ - الاجهاد σ_{zz} اللازم ليتم بلوغ حالة التشوه المستوية .

٢ - ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , γ_{xy} (تحليلياً) .

٣ - التمددات الرئيسية ϵ_{11} , ϵ_{22} واتجاهات التمددات الرئيسية وكذلك التغيرات التي تشكل على السطح الذي يشكل ناظمه مع المحور x زاوية $\psi = +30^\circ$ (تخليطاً بواسطة دائرة التشوه) .

٤ - التمدد الحجمي .

الحل :

حالة التشوه المستوية :

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

١ - من العلاقة التالية :

$$\epsilon_{zz} = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

يتج :

$$\sigma_{zz} = \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 60 \text{ kp / cm}^2$$

٢ -

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 8,08 \cdot 10^5 \text{ kp / cm}^2$$

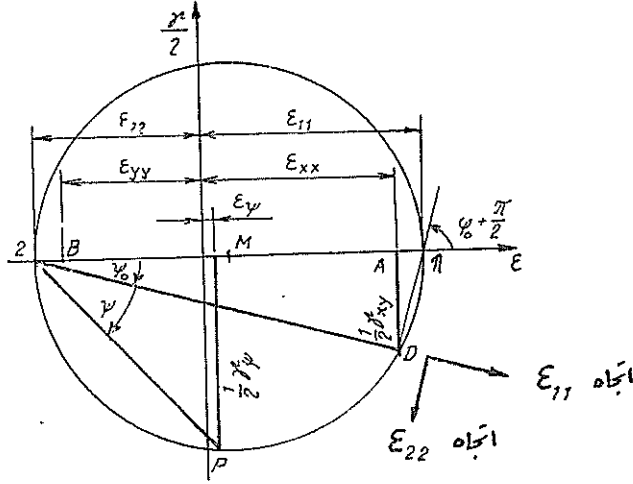
$$\epsilon_{xx} = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu) \sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}] = 2,105 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu) \sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}] = -1,610 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -2,476 \cdot 10^{-4}$$

مقاومة المواد م ٤٣

٣ - القياس : $1 \text{ cm} \hat{=} 0,8 \cdot 10^{-4}$ (شكل 4-21) .



شكل 4-21

من الشكل المذكور ينتج :

$$\psi_0 = -16,85^\circ$$

$$\psi_0 + \frac{\pi}{2} = 73,15^\circ$$

التمددات الرئيسية :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_p (\psi = \psi_0) = \max \epsilon = 2,480 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_p (\psi = \psi_0 + \frac{\pi}{2}) = \min \epsilon = -1,986 \cdot 10^{-4}$$

تغير الشكل على السطح المائل :

$$\epsilon_\psi = 0,104 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_\psi = -4,455 \cdot 10^{-4}$$

٤ - التمدد الحجمي :

$$c = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 0,495 \cdot 10^{-4}$$

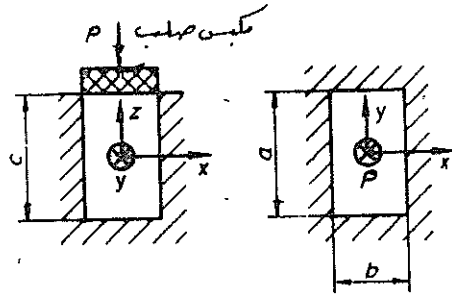
مثال 45 :

وضع جسم مرن عديم الحركة (spielfrei) وعديم الاحتكاك (Reibungsfrei) في مغطس (قالب) صلب (starren Gesenk) ثم ضغط عليه بواسطة مكبس صلب بقوة قدرها P (شكل 4-22) .

المعطى : V_z , μ , E , c , b , a .

المطلوب : تعيين

- ١ - القوة الضاغطة P التي تكبس الجسم بالاتجاه z بمقدار يساوي V_z .
- ٢ - الضغط (الذي يتشكل) على سطوح المغطس (القالب) .
- ٣ - تغير طول المحيط (konturlaenge) تحت تأثير القوة P وذلك بعد رفع المغطس (القالب) .
- ٤ - القوة الضاغطة P^* اللازمة لكبس الجسم بمقدار V_z دون مغطس (قالب) .



مقطع شاقولي

شكل 4-22

الحل :

قانون هوك :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\epsilon_{xx} = 0 \quad , \quad \sigma_{zz} = -\frac{P}{ab}$$

$$\epsilon_{yy} = 0$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{V_z}{c}$$

وبذلك يتم التوصل من قانون هوك المعمم لما يلي :

$$P = \frac{V_z ab E}{c \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right)}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{-P \mu}{ab (1-\mu)}$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad , \quad \Delta b = \epsilon_{xx} b = \frac{\mu P}{E a} \quad - ٣$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad , \quad \Delta a = \epsilon_{yy} a = \frac{\mu P}{E b}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{P}{ab} \quad , \quad \Delta c = \epsilon_{zz} c = -\frac{P c}{ab E}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{-V_z}{c} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = -\frac{P^*}{ab E} \quad , \quad (\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0) \quad - ٤$$

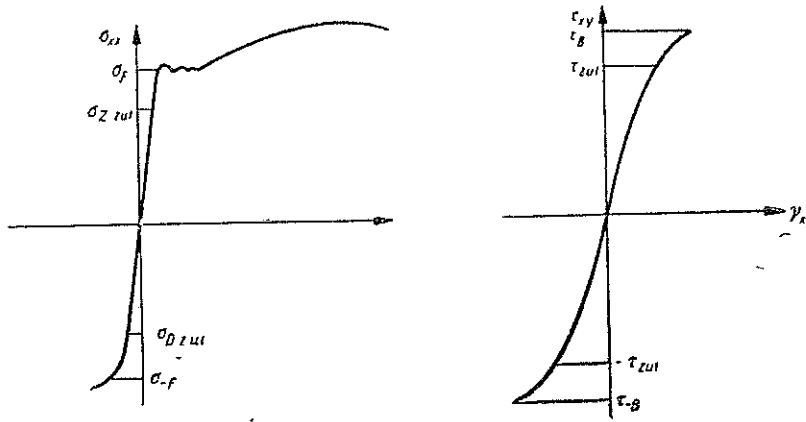
$$P^* = \frac{V_z E ab}{c}$$

٤ - ٩ مفهوم الاجهادات المسموحة (Begriff der zulaessigen Spannungen)

في حالة استعمال القضيب المشدود أو المضغوط كعنصر إنشائي عندئذ لا يجوز للاجهادات الناتجة عن تأثير التحولة (اجهاد الاستعمال Gebrauchsspannung) (والتي يتم الحصول عليها حسابياً) أن تتخطى حد الانسياب في المواد المتينة (zählen Werkstoffen) كما ولا يجوز أن تتخطى حد الانكسار في المواد المتقصفة (spröden Werkstoffen) (يعتبر حد الانسياب وحد الانكسار ، التي تمثل عوامل المتانة للمادة ، ثوابت يتم الحصول عليهما تجريبياً) . ففي الحالة

الأولى تظهر (تشكّل) تغيرات شكل كبيرة وغير مسموحة (unzu'ässig große, bleibende Formaenderungen) وفي الحالة الثانية يحدث الانكسار (الذي يعتبر من أبلغ الأخطار التي يمكن أن تحدث للمنشأ) .

لوجوب تفادي وقوع كل من الحالتين أو كلاهما في العناصر الانشائية وبأمان معين ، لذلك ينبغي تحديد المجال الذي يسمح لاجهادات الاستعمال أن تقع ضمنه . أما ذلك فيتم بواسطة ما يسمى بالاجهادات المسموحة σ_{zul} , τ_{zul} (شكل 4-23) .



شكل 4-23

تعتبر الاجهادات المسموحة المذكورة جزءاً من اجهادات الانسياب σ_F , σ_{-F} , τ_F وكذلك جزءاً من اجهادات الانكسار σ_B , σ_{-B} , τ_B (يقع الاجهاد المسموح دائماً تحت اجهاد الانكسار وكذلك تحت اجهاد الانسياب أيضاً) وهي تحسب بتقسيم اجهادات الانكسار وكذلك اجهادات الانسياب على عامل الأمان وذلك حسب العلاقة التالية :

$$\sigma_z = \frac{\sigma_F}{\nu_F} , \quad \sigma_D = \frac{\sigma_{-F}}{\nu_F} , \quad \tau = \frac{\tau_F}{\nu_F} \quad (4.43)$$

وكذلك

$$\sigma_z = \frac{\sigma_B}{\nu_B} , \quad \sigma_B = \frac{\sigma_{-B}}{\nu_B} , \quad \tau = \frac{\tau_B}{\nu_B} \quad (4.44)$$

حسب ذلك ينبغي أن تقع إجهادات الاستعمال σ_{xy} , τ_{xy} ضمن المجالات التالية :

$$\text{zul } \sigma_D \leq \sigma_{xx} \leq \text{zul } \sigma_z \quad (4.45)$$

$$- \text{zul } \tau \leq \tau_{xy} \leq \text{zul } \tau \quad (4.46)$$

يسمى العامل $v > 1$ بعامل الامان (v_F عامل امان الانسياب و v_D عامل امان الانكسار) وهو يحدد من قبل مشرعي المواصفات أما قيمته فتتعلق بسلسلة من العوامل هي جودة (Güte) وخواص (Eigenschaft) المادة ودقة معطيات المحولة وطرق حساب الاجهادات ومن وظيفة العنصر الانشائي (فعامل الامان المستعمل هو مسألة اقتصادية تلعب فيها وظيفة العنصر الانشائي دوراً هاماً) . يصغر عامل الامان كلما ازدادت دقة الطريقة المتبعة لحساب الاجهادات التي تتشكل في العنصر الانشائي . كما أنه يصغر أيضاً كلما ازدادت الدقة التي تعطى بها صفات المادة (خواص المادة) .

فعلى سبيل المثال يمكن إعطاء الفولاذ عامل امان أصغر من عامل الامان الذي يعطى للخشب وذلك لأن البناء الداخلي للفولاذ هو نوعاً ما متجانس بينما لا يمكن ضمان التجانس في البناء الداخلي للخشب . يرافق اختيار عوامل امان كبيرة تصميم غير اقتصادي .

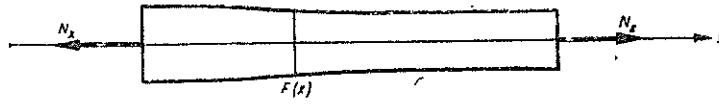
الفصل الخامس

التحميل على الشد - الضغط

ZUG / DRUCKBEANSPRUCHUNG

٥ - ١ الاجهادات في حالة التحميل على الشد / الضغط
(Spannungen bei Zug/Druckbeanspruchung)

ليكن المقطع العرضي للقضيب المدروس ، الحمل بقوة طولية (ناظمية) ثابتة والتي ينطبق حاملها على محور القضيب الاوسط (المحور x) (شكل 5-1) ثابتاً او متغيراً بشكل خفيف . يسمى هذا التحميل ، بالتحميل على الشد / الضغط .

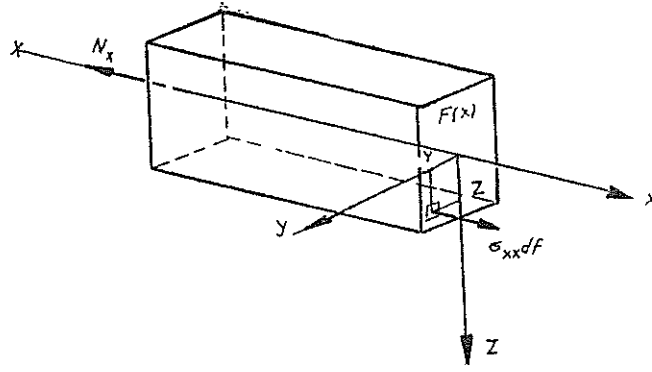


شكل 5-1

لتعيين الاجهادات التي تؤدي لها (الناتجة عن) القوة النازمية N_x ، سوف يقطع القضيب وتثبت فيه مجموعة المحاور الاحداثية z, y (شكل 5-2) . يزال إضطراب التوازن الناتج عن القطع عندما تتوازن محصلة الاجهادات المتشكلة على سطح القطع مع القوة النازمية N_x التي تؤثر على القضيب (وبذلك يتوازن كل جزء من الاجزاء المقطوعة على حدة تحت تأثير المحولات الخارجية ومحصلات الاجهاد الداخلية المؤثرة عليه) .

تتحقق شروط توازن القوى في كل من الاتجاهين z, y وشروط توازن العزوم بالنسبة للمحور x دائماً عندما لا يحتوي سطح القطع إجهادات مماسية τ_{xz}, τ_{xy} . أما شرط توازن القوى بالاتجاه x وشرطي توازن العزوم بالنسبة لكل من المحورين z, y فتأخذ الشكل التالي :

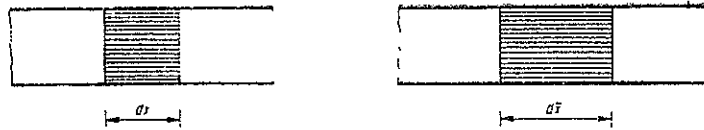
$$\begin{aligned} N_x \cdot \int_{F(x)} \sigma_{xx} dF &= 0 , \\ \int_{F(x)} z \sigma_{xx} dF &= 0 , \\ \int_{F(x)} y \sigma_{xx} dF &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$



شكل 5-2

لكن هذه المعادلات لا تكفي وحدها لتعيين توزيع الاجهادات الناعمية $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y, z)$ بشكل واضح (eindeutig) لذلك فان المشكلة المروضة هي غير مقررة ستاتيكياً . لاتوصل إلى حل هذه المشكلة سوف يستعان بالحقيقة المستمدة من الخبرة ألا وهي ان المقاطع العرضية للقضبان المشدودة / او المضغوطة الثابتة والمتغيرة بشكل خفيف ، تبقى بعد تغير الشكل مستوية . تؤدي هذه الفرضية لان تبقى كافة النقاط التي تقع قبل التغير على مستوي عمودي على محور القضيب الاوسط ، بعد التغير ايضاً على مستوي عمودي على المحور x . وبذلك يبلغ التمدد الانفعال في كل مكان من المقطع العرضي (شكل 5-3) القيمة التالية :

$$\epsilon_{xx} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \epsilon(x) \quad (5.2)$$



شكل (5-3)

بالاستعانة بقانون هوك :

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$$

فان العلاقة السابقة تعطي النتيجة التالية :

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \epsilon(x) = \sigma(x) \quad (5.3)$$

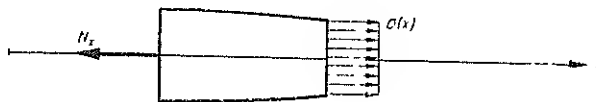
منها يلاحظ ان الاجهاد الناظمي يتوزع على المقطع العرضي بشكل منتظم . تبديل العلاقة (3-5) في المعادلات (5-1) ينتج :

$$\left. \begin{aligned} N_x - \sigma(x) \int F(x) dF &= 0 \\ \sigma(x) \int z dF &= 0 \\ \sigma(z) \int y dF &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

يتطابق تحقيق المعادلتين الاخيرتين وذلك لان العزوم الستاتيكية لسطح المقطع العرضي (للمقطع العرضي) بالنسبة للمحور y والمحور z ، والتي هي بالفرض (حسب الفرض) محاور مركزية معدومة . من المعادلة الاولى للعلاقة (5-1) يتم التوصل من اجل الاجهاد الناظمي الى العلاقة التالية :

$$\sigma(x) = \frac{N_x}{F(x)} \quad (5.5)$$

يشير الشكل (5-4) إلى توزيع الاجهاد الناظمي في المقطع العرضي .



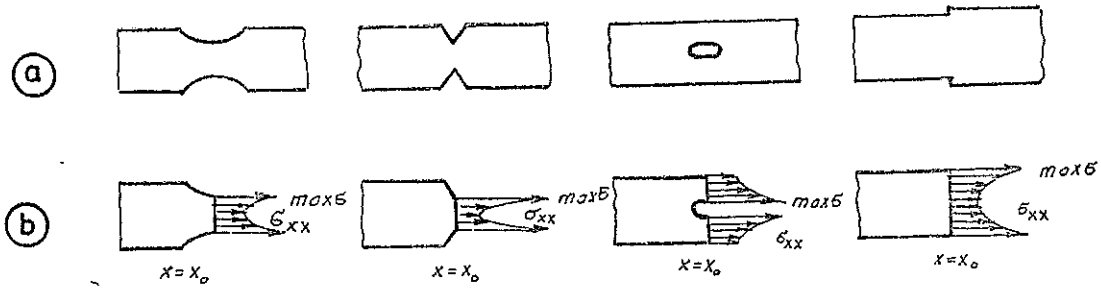
شكل 5-4

من اجل القوة الناظمية N_x الموجبة فان جزءاً من القضيب (قطعة من القضيب) سوف يشد ومن اجل القوة السالبة فانه سوف يضغط . تعتبر الاجهادات الناظمية في القضيب المشدود موجبة اي انها إجهادات شادة (Zugspannungen) اما في القضيب المضغوط فان الاجهادات الناظمية هي سالبة ، اي انها إجهادات ضاغطة (Druckspannungen) .

يسمى إستقلال (عدم إرتباط) التمدد عن إحداثيات المقطع العرضي ، الذي تعبر عنه المعادلة (5-2) ، بفرضية بقاء المقاطع العرضية ، للقضبان المحملة على الشد / الضغط ، مستوية ، وهي تصالح بدقة فقط من أجل القضبان ذات المقاطع العرضية الثابتة على طول القضيب وعلى بعد

كأف عن نقاط تطبيق القوى الوحيدة N_x . فعلى مقربة من نقاط تطبيق القوى الوحيدة لا يستطاع تعيين توزيع الاجهاد بواسطة العلاقة البسيطة (5-5) فهناك تشكّل حالة اجهاد فراغية معقدة ولكنها تقتصر على الحدود الطرفية من القضيب فبعد تخطي تلك الحدود يأخذ توزيع الاجهاد الشكل المعروف بالمعادلة 5-5 وهو يزداد دقة كلما إزداد البعد عن نقاط تطبيق القوى N_x . تسمى هذه الحقيقة بمبدأ ده سانت فينانت (سان فينانت) (Prinzip von DE ST. VENANT) . في حالة تغير المقطع العرضي عند النقطة x بشكل كبير أو بشكل مفاجيء (شكل 5-5a) فإن المقاطع العرضية لا تبقى مستوية وإنما تشوه (verwölben) أما توزيع الاجهاد في مناطق تغير المقاطع العرضية بشكل كبير (على مسيل المثال فجوة ، ثقب والخب) فانه يشير الى رؤوس اجهاد (Spannungsspitzen) . يشير الشكل (5-5 b) الى توزيع الاجهاد الناطمي في المقاطع العرضية التي يكون فيها التغير أعظمية . إن الاجهادات الاعظمية $\max \sigma_{xx} = \max \sigma$ أكبر بكثير من الاجهاد :

$$\sigma(x_0) = \frac{N_x}{F(x_0)}$$



شكل 5 5

الذي يتشكل فيما لو استخدمت العلاقات دون أخذ لتأثير الفجوات بعين الاعتبار . حيث ان $F(x_0)$ هي مساحة المقطع العرضي في أضيق مكان من القضيب . تسمى النسبة :

$$\kappa = \frac{\max \sigma}{\sigma(x_0)} \geq 1 \quad (5.6)$$

عامل الفجوة (معامل الثقب) (kerbfaktor) . فاذا كان هذا العامل (المعامل) معلوماً فبالامكان تعيين الاجهاد الاعظمي بواسطة العلاقة التالية :

$$\max \sigma = \kappa \sigma(x_0) = \frac{N_x}{F(x_0)} \quad (5.7)$$

عندما يكون أجهاد الشد المسموح (zulässige Zugspannungen):

$$\text{zul } \sigma > 0$$

وكذلك أجهاد الضغط المسموح (Zulaessige Druckspannungen):

$$\text{zul } \sigma_D < 0$$

لقضيب يحمل معلومين عندئذ يطلب من الأجهادات الناعمية المشكلة في أي مقطع عرضي من القضيب أن تقع ضمن مجال الأجهاد التالي:

$$\text{zul } \sigma_D \leq \sigma(x) = \frac{N_x}{F(x)} \leq \text{zul } \sigma_z \quad (5.8)$$

يسمى هذا النوع من الاختبار بالكشف عن الأجهاد (Spannungsnachweis). من المعتاد الاستعاضة عن العلاقة (5.8) بالعلاقة المختصرة التالية:

$$\frac{|N_x|}{F(x)} \leq |\text{zul } \sigma| \quad (5.9)$$

ففي حالة القوى الشادة يستعاض في المراجعة بدلا عن $\text{zul } \sigma$ بأجهاد الشد المسموح $\text{zul } \sigma_z$ وفي حالة القوى الضاغطة يستعاض عنها بأجهاد الضغط المسموح $\text{zul } \sigma_D$. إذا كانت القوة الناعمية N_x والأجهاد المسموح $\text{zul } \sigma$ معلومين فبالامكان استخدام العلاقة (5.9) لحساب مساحة المقطع العرضي اللازمة $\text{erf } F$ والتي لا يجوز أثناء التصميم أخذ قيمه أصغر منها. وبذلك يتم التوصل لعلاقة التصميم (Bemssungsformel) التالية:

$$\text{erf } F \geq \frac{|N_x|}{|\text{zul } \sigma|} \quad (5.10)$$

في حالة كون المقطع العرضي معطاً وعندما يكون الأجهاد المسموح معلوماً عندئذ تعطي العلاقة (5.9)، من أجل القيمة الحدية، القوة المسموحة $\text{zul } N$:

$$|\text{zul } N_x| \leq F(x) \cdot |\text{zul } \sigma| \quad (5.11)$$

وبذلك يتم تعيين تحمل المقطع العرضي (Tragfaehigkeit des Querschnittes).

للتوسع في البحوث السابقة سوف يدخل تغير القوة الناعمية الموجودة (المشكلة) في المقاطع العرضية على طول القضيب بعين الاعتبار (أي سوف تدرس حالة كون القوى الناعمية

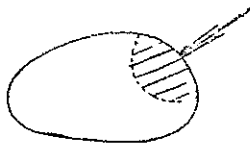
المتشكلة في مقاطع عرضية مختلفة من القضيب ليست ثابتة وإنما هي توابع للاحداثي x .
 سوف نستخدم ، في هذه الحالة أيضاً ، العلاقة (5.5) لتحديد الاجهاد الناطمي والتي تكتب
 هكذا :

$$\left. \begin{aligned} \frac{|N_s(x)|}{F(x)} &\leq |zul \sigma| \\ erf F &\geq \frac{|N_s(x)|}{|zul \sigma|} \\ |zul N_s(x)| &\leq F(x) \cdot |zul \sigma| \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

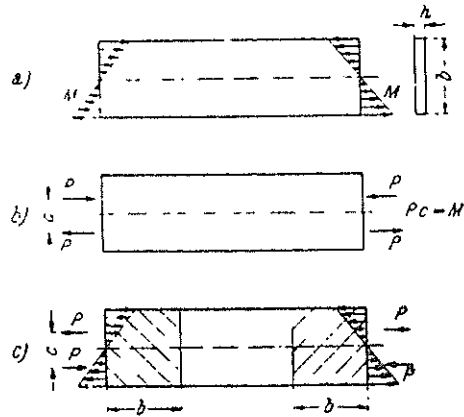
٥ - ٢ مبدأ ده سانت فينانت (Prinzip von DE ST. VENANT)

عندما تؤثر على جسم ، مجموعة متوازنة من القوى بشكل موضعي (شكل 5-6) عندئذ
 تتخامد القوى الداخلية والتغيرات بالابتعاد عن مكان التحميل بحيث تتحول عملياً ، على امتداد
 جزء محدود فقط يحيط بموضع التحميل ، الى اجهادات (لقد تم تهيئته في الشكل 5-6) ،
 بينما لا تظهر في بقية اجزاء الجسم أية قوى داخلية وتغيرات ذات قيمة . مما ذكر يتم التوصل
 للنتيجة الهامة التي تقول ان حالة الاجهاد وحالة التغير في اجزاء معينة من الجسم لا تتغير عملياً
 عندما تستبدل المحولة المؤثرة موضعياً بما يكافئها ستاتيكيًا ولزيادة الايضاح سوف يلجأ المثال التالي:

حملت الاطراف الضيقة لجسم سطحي مستوي (بلاطة او صفيحة) بعزمي انعطاف M تطبق
 على الجسم على شكل قوى مستمرة التوزيع (شكل 5-7 a) . بالاستعاضة عن هذه القوى
 الموزعة بمزدوجة قوى وحيدة $P.C=M$ تكافئها ستاتيكيًا (شكل 5-7 b) عندئذ لا تتغير



شكل 5-6



شكل 5-7

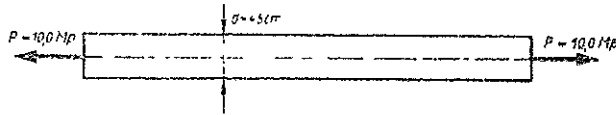
حالة الاجهاد في الجزء الاوسط تغيراً ملموساً (ذو اهمية) . بعد ذلك ليحمل الجسم في نفس الوقت بالقوى الموزعة ومزدوجة القوى $P.c -$ (شكل c 57) عند ذلك تشكل هذه المحولات ، على كل حافة ، مجموعة متوازنة من القوى ، لا يتعدى تأثيرها ، حسب مبدأ ده سانت فينانت ، الاجزاء الطرفية المباشرة (شكل c 57) بينما يبقى الجزء الاوسط عملياً خال من الاجهادات . اي ان تأثير القوى الموزعة (المستمرة التوزيع) في المنطقة الوسطى يبطل تأثير مزدوجة القوى $P.c -$ (اي ان مزدوجة القوى $P.c +$ والقوى الموزعة لها ، في المنطقة الوسطى ، نفس التأثير) .

٥ - ٣ امثلة

مثال 46 :

حمل قضيب فولاذي مقطعه العرضي دائري الشكل ، قطره d بقوة شد P (شكل 5-8) . المعطى : $d=4,5 \text{ cm}$, $P=10,0 \text{ Mp}$ وعامل الامان بالنسبة لانسياب مادة القضيب $v_F=3$. يبلغ إجهاد انسياب المادة $\sigma_F=2,1 \text{ Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : التأكد من امكانية القضيب على حمل القوة P ضمن الامان المعطى .



شكل 5 8

الحل :

سوف يتم في البداية تعيين الاجهاد المسموح ، حسب العلاقة (4.43) :

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{v_F} = \frac{2,1}{3} = 0,7 \text{ Mp cm}^{-2}$$

بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 4,5^2}{4} = 15,9 \text{ cm}^2$$

والقوة الناعمية $N_x(x)=P$ فان الكشف عن الاجهادات حسب العلاقة (5-9) يصبح كالتالي:

$$\frac{P}{F} = \frac{10,0}{15,90} = 0,629 \text{ Mp cm}^{-2} < 0,7 \text{ Mp cm}^{-2}$$

من هذه العلاقة يتبين ان القضيب المذكور يستطيع حمل القوة P ضمن عامل امان قيمته 3 .

مثال 47 :

حمل قضيب مسطح (Flachstab) سماكته d بقوة شد P .

المعطى :

$$\text{zul } \varepsilon = 1,4 \text{ Mp cm}^{-2} , \quad P = 7,5 \text{ Mp} , \quad d = 1,0 \text{ cm}$$

المطلوب : تعيين عرض القضيب b حتى يستطيع تحمل القوة المؤثرة عليه .

الحل :

يتم تعيين المساحة اللازمة للمقطع العرضي ، حسب العلاقة (5.10) :

$$\text{erf } F \geq \frac{7,5}{1,4} = 5,36 \text{ cm}^2$$

وبما ان سماكة القضيب هي $d = 1,0 \text{ cm}$ فان العرض اللازم للقضيب erf b يأخذ القيمة التالية :

$$\text{erf } b \geq \frac{5,36}{1,0} = 5,36 \text{ cm}$$

مثال 48 :

يتألف المقطع العرضي لقضيب من بروفيل 16 [.

المعطى : الاجهاد المسموح للمادة $\text{zul } \sigma = 1,6 \text{ Mpcm}^{-2}$.

المطلوب : تعيين قوة الشد التي يستطيع القضيب المذكور حملها .

الحل :

تقرأ مساحة المقطع العرضي للبروفيل 16 [، من الجدول الخاص بالبروفيلات الموجود في الملحق:

$$F = 24,0 \text{ cm}^2$$

وحسب العلاقة (5.11) يتم تعيين قوة حمل القضيب:

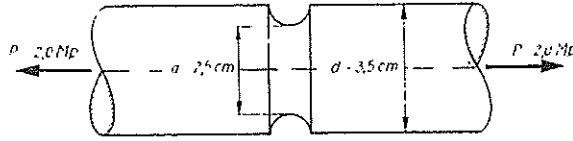
$$\text{zul } P \leq 24,0 \cdot 1,6 = 38,4 \text{ Mp}$$

مثال 49 :

حمل قضيب فولاذي مدور (مقطعه العرضي دائري الشكل) ، يحتوي على فجوتين مدورتين على شكل نصف دائرة حسب الشكل (5.9) ، بقوة شد P .

المعطى : $P=2,0 \text{ Mp}$ وعامل الفجوة $\alpha=2,8$.

المطلوب : تعيين الاجهاد الأعظمي في القضيب .



شكل 5.9

الحل :

بالاستعانة بمساحة أصغر مقطع عرضي :

$$F = \pi \frac{2,5^2}{4} = 4,91 \text{ cm}^2$$

يتم ، استناداً الى العلاقة (5.7) ، تعيين الاجهاد الأعظمي :

$$\sigma_{\max} = \alpha \frac{P}{F} = 2,8 \cdot \frac{2,0}{4,91} = 1,141 \text{ Mp cm}^{-2}$$

مثال 50 :

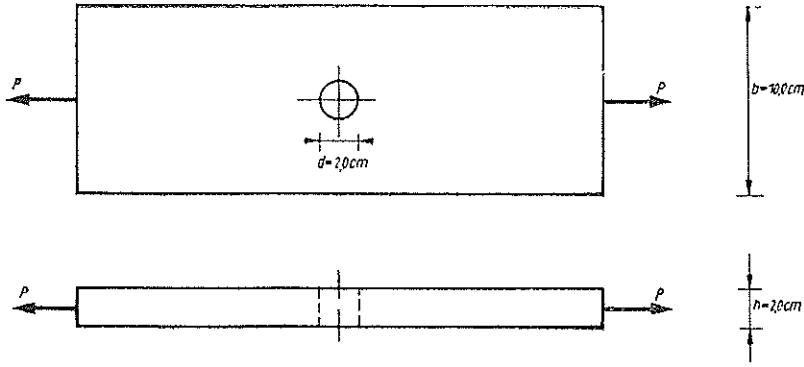
يحتوي قضيب مسطح ، عرضه b وسماكته d ، على ثقب دائري الشكل قطره $1,0 \text{ cm}$ يقع في منتصفه (شكل 5.10) .

المعطى : $b=10,0 \text{ cm}$ ، $d=2,0 \text{ cm}$ ويبلغ الاجهاد المسموح لمادة القضيب $\sigma_{zul}=1,6 \text{ Mcm}^{-2}$

المطلوب : تعيين القوة P التي يستطيع القضيب حملها .

الحل :

لوجود عدم تخطي الاجهاد الاعظمي للاجهاد المسموح σ_{zul} يتم الحصول ، من العلاقة (5.7) على ما يلي :



شكل 5.10

$$N_x = P = \frac{F_{zu} \sigma}{x} = \frac{(10.0 - 2.0) 2.0 \cdot 1.6}{3.0} = 8.53 \text{ Mp}$$

٥ - ٤ تغيرات الشكل (Formaenderungen)

لتعيين الانتقالات في القضبان المشدودة / المضغوطة ذات المقطع العرضي المتغير بشكل خفيف سوف ينطلق من التوزيع المنتظم للاجهاد الناطمي على المقطع العرضي :

$$\sigma(x) = \frac{N_x(x)}{F(x)}$$

تقابل هذه الاجهادات ، حسب قانون هوك ، التمددات (التغيرات النسبية) :

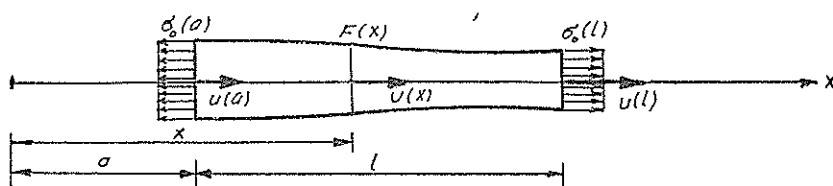
$$\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N_x(x)}{E F(x)} \quad (5.13)$$

العائدة لكل من محاور القضيب الموازية لمحور القضيب الاوسط . بما أن هذه التمددات مستقلة عن احداثيات المقطع العرضي z, y لذلك فإن كل مقطع عرضي كسكن يقوم بالانتقال (شكل 5-11) :

$$V_x = u(x) \quad (5.14)$$

إن العلاقة التي تربط بين الانتقالات $u(x)$ والتمددات للانفعالات $\epsilon(x)$ ، تبعاً للعلاقة الأولى من (3-9) هي :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x}$$



شكل 5-11

هي

$$\epsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (5-15)$$

باختزال (بجذف) التمدد $\epsilon(x)$ من العلاقتين (5-13) و (5-15) ينتج :

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N_x(x)}{E F(x)} \quad (5-16)$$

من هذه العلاقة يمكن ، في حالة كون $\sigma(x)$ أو كذلك $N_x(x)$ و $F(x)$ معلومة ، تعيين الانتقالات $u = u(x)$ (حالة مقررة مستاتيكيًا) . بذلك ينتج :

$$u(x) = \int \frac{\sigma(x)}{E} dx + c \quad (5-17)$$

أو كذلك

$$u(x) = \int \frac{N_x(x)}{E F(x)} dx + c \quad (5-18)$$

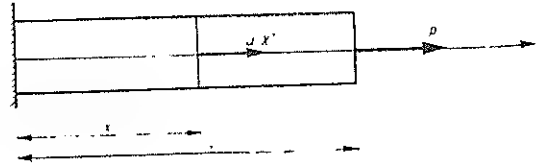
حيث أن c هي في البداية ثابت تكامل ما .

حالة خاصة :

عندما تكون القوة الطولية $N_x(x) = P$ ومساحة المقطع العرضي F ثابتة فإن علاقة الانتقال تصبح ، بالاستعانة بالانتقال $u(a)$ في المكان $x=a$ ، كما يلي :

$$u(x) = \frac{P(x-a)}{E F} + u(a) \quad (5-19)$$

من أجل قضيب موثوق عند النقطة $x=0$ (شكل 5-12) فإن علاقة الانتقال السابقة تصبح ، بسبب كون $u(0) = 0$ ، كالتالي :



شكل 5.12

$$u(x) = \frac{Px}{EF} \quad (5-19b)$$

عندما تكون P قوة شد فإن الانتقال $u(x)$ يكون موجباً وعندما تكون P قوة ضغط فإن الانتقال $u(x)$ يكون سالباً . أما الاستطالة / التقاصر Δl لقضيب طوله l فتبلغ :

$$\Delta l = u(l) = \frac{Pl}{EF} \quad (5.20)$$

من أجل القضيب المدور (المبروم ، ذو المقطع العرضي الدائري الشكل) المستعمل في المثال 46 الذي يبلغ طوله $l=4,0$ m وعامل مرونته $E=2000,0$ Mpa فإن الاستطالة تبلغ :

$$\Delta l = \frac{10,0 \cdot 400,0}{2000,0 \cdot 15,9} = 0,126 \text{ cm}$$

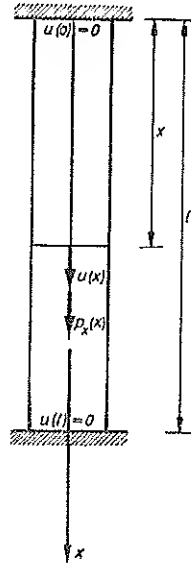
يمكن تعيين الانتقال $u(x)$ لقضيب مشدود / مضغوط ، بواسطة العلاقة (5.16) وذلك عندما تكون القوة الناعمية $N_x(x)$ معلومة . وهذا يتحقق في جميع القضبان ذات الاستناد المقرر ستاتيكيًا . أما في القضبان ذات الاستناد غير المقرر ستاتيكيًا (شكل 5.13) فلا يمكن تعيين القوة الناعمية $N_x(x)$ بواسطة شروط التوازن وحدها . للتمكن من حل أمثال هذه الحالات سوف ينطلق من العلاقة (5.16) :

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N_x(x)}{EF(x)}$$

للتسهيل سوف يفترض بأن المقطع العرضي للجائز ثابت على طوله . باشتقاق العلاقة السابقة ينتج:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \frac{1}{EF} \frac{dN_x(x)}{dx}$$

وبالاستعانة بالعلاقة التفاضلية التي تربط بين القوة الناعمية والحمولة التالية :



شكل 5.13

$$\frac{dN_x(x)}{dx} = -p_x(x)$$

يتم الحصول ، من المعادلة السابقة ، على العلاقة التفاضلية الآتية :

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = - \frac{p_x(x)}{EI} \quad (5.21)$$

باجراء مكاملة مزدوجة (مضاعفة) ينتج :

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{du(x)}{dx} &= - \int p_x(x) dx + c_1 \\ EI u(x) &= - \int dx \int p_x(x) dx + c_1 x + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

بهذه العلاقة يتم تعيين الانتقال $u(x)$ ماعدا ثابتي التكامل c_1 , c_2 . أما تعيين ثوابت التكامل هذه فيتم ، بعد تحقيق النتائج لشروط أطراف القضيب . فمن أجل الجائز الممثل في الشكل (5.13) فان شروط الأطراف هي :

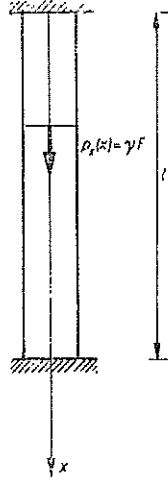
$$u(x=0) = 0 ; u(x=l) = 0$$

والآن يمكن تعيين القوة الناعمية (القوة الطولية) $N_x(x)$ ، حسب العلاقة (5.16) :

$$N_x(x) = EF \frac{du(x)}{dx} \quad (5.23)$$

مثال 51 :

حمل قضيب موثوق من كلا الطرفين ومقطعه العرضي F ثابت ، بوزنه الذاتي (شكل 5.14).
المعطى : مساحة المقطع العرضي F وطول القضيب l والوزن النوعي لمادة صنع القضيب γ .
المطلوب : تعيين توزيع الانتقال وتوزيع القوة الناعمية .



شكل 5 14

الحل :

تؤثر على الجائز نتيجة لتأثير وزنه الذاتي ، المحولة الموزعة $p_x(x)$ باتجاه المحور x :

$$p_x(x) = \gamma F$$

بحيث تصبح المعادلة التفاضلية بالشكل التالي :

$$EF \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = - \gamma F$$

باجراء مكاملة مزدوجة (مضاعفة) عليها ينتج :

$$EF \frac{du(x)}{dx} = - \gamma F x + c_1$$

$$EF u(x) = - \gamma F \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

بتحقيق الحلول السابقة لشروط الأطراف التالية :

$$u(x=0) = u(x=l) = 0$$

يتم التوصل للمعادلتين التاليتين :

$$c_2 = 0 ; -\gamma F \frac{l^2}{2} + c_1 l + c_2 = 0$$

والتي تعطي بعد الحل ، ثوابت التكامل :

$$c_1 = \gamma F \frac{l}{2} ; c_2 = 0$$

وببديلها في العلاقات السابقة ينتج :

$$EF \frac{du(x)}{dx} = N_x(x) = \gamma F \frac{l}{2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

$$u(x) = \frac{\gamma l^2}{2E} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

أما ردود أفعال المساند (قوى الاستناد) فتبلغ :

$$N_x(x=0) = \frac{\gamma Fl}{2} , N(x=l) = -\frac{\gamma Fl}{2}$$

يوضح الشكل (5.15) توزيع القوة الناعمية $N_x(x)$ وكذلك توزيع الانتقال $u(x)$.

مثال 52 :

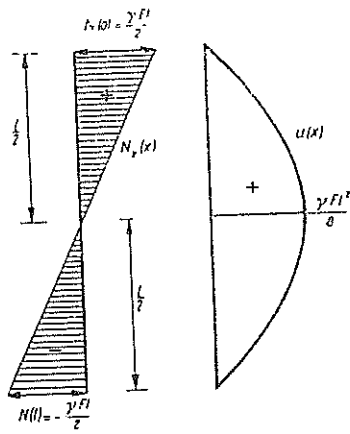
حمل قضيب طوله l ومقطعه العرضي F ثابت ويتألف من دائرة مليئة ، بقوتي شد قيمة كل منها P وتؤثر على كل من نهايتي القضيب (شكل 5.16) .

المعطى :

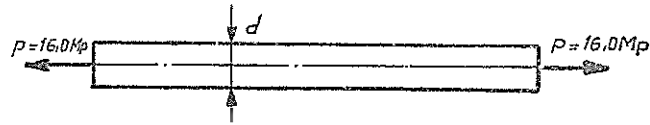
$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 , l = 12 \text{ m} , P = 16000 \text{ kp} , \sigma_{zul} = 1400 \text{ kp/cm}^2$$

المطلوب : حساب

١ - القطر اللازم $erf d$ للدائرة (قطر الدائرة اللازم) وذلك عندما يكون الاجهاد المسموح لمادة صنع القضيب هو $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kp/cm}^2$.



شكل 5.15



شكل 5.16

٢ - الانتقال المتبادل للمقاطع العرضية المتواجدة عند النهاية .
(يهمل الوزن الذاتي أثناء الحل) .

الحل :

١ - عندما يطلب تصميم عنصر انشائي فهذا يعني أنه يطلب تعيين أبعاده بحيث يكون الاجهاد الاعظمي σ_{max} الموجود في المقطع العرضي اصغر من الاجهاد المسموح σ_{zul} . بقطع القضيب في نقطه ما منه يتبين ان قيم القطع فيه تقتصر على القوة الناعمية فقط :

$$N = + P$$

الاجهاد الناعمي :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}$$

مساحة المقطع العرضي (الدائرة) :

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

بالتبديل في علاقة الاجهاد ينتج :

$$\sigma = \frac{4 P}{\pi d^2}$$

شرط التصميم (Dimensionierungsbedingung) :

$$\max \sigma = \frac{4 P}{\pi d^2} \leq \text{zul } \sigma$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 P}{\pi \cdot \text{zul } \sigma}}$$

من هذه المتراجحة يتم تعيين قطر الدائرة اللازم وهو كالتالي :

$$\text{erf } d = \sqrt{\frac{4 \cdot 16\,000}{\pi \cdot 1400}} = 3,81 \text{ cm}$$

٢ - يتم حساب الانتقال المتبادل للمقطعين العرضيين المتواجدين عند نهايتي القضيب بواسطة العلاقة التالية :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

تعطي العلاقة التي تربط بين التمدد والاجهاد بواسطة قانون هوك :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

بالتبديل في المعادلة السابقة يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

ينبغي ان يمتد التكامل على كامل القضيب المشدود . من أجل الحد السفلي $u=0$ فان $u=0$ ومن أجل الحد العلوي $x=l$ فان $u(x)=u$:

$$\int_0^l du = \frac{\sigma}{E} \int_0^l dx \quad : \quad u = \frac{\sigma}{E} l$$

$$u = \frac{1400}{2,1 \cdot 10^6} \cdot 1200 = 0,8 \text{ cm}$$

مثال 53 :

حمل قضيب متدلي ، مقطعه العرضي F ثابت ، وموثوق من طرفه العلوي وحر من طرفه السفلي بالوزن P .

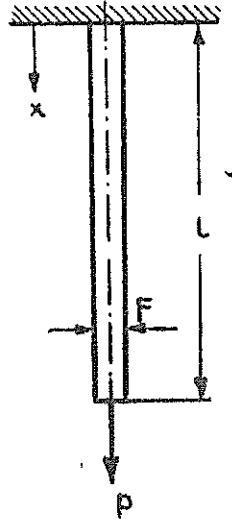
المعطى :

$$l = 60 \text{ m} , \quad F = 1 \text{ cm}^2 , \quad P = 1000 \text{ kp}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 ; \quad \gamma = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ kd/cm}^2$$

المطلوب : حساب

- ١ - الاجهاد الناطمي الاعظمي .
 - ٢ - إنتقال المقطع العرضي عند النهاية السفلى للقضيب .
- يدخل الوزن الذاتي للقضيب بعين الاعتبار .



شكل 5.17

الحل :

بقطع الجائز في النقطة ذات الاحداثي x يتبين ، بعد تطبيق شروط التوازن ، أن قيم القطع الموجودة فيه تقتصر على القوة الناطمية فقط :

$$N = P + \int_x^l \gamma F dx = P + \gamma F (l - x)$$

١ - الاجهاد الناطمي :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{1}{F} [P + \gamma F (l - x)] = \frac{P}{F} + \gamma (l - x)$$

الاجهاد الناظمي الأعظمي :

تظهر القيمة الاعظمية الاجهاد الناظمي عند النقطة $x=0$ وهي تبلغ :

$$\max \sigma = \frac{P}{F} + \gamma l$$

$$\max \sigma = \left(\frac{1000}{1} + 7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6000 \right) = 1047 \text{ kp/cm}^2$$

٢ - حساب انتقال النهاية السفلي للجائز :

$$\frac{du(x)}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{P}{EF} + \frac{\gamma}{E} (l-x)$$

بالكاملة ينتج :

$$u(l) = \int_0^l \left[\frac{P}{EF} + \frac{\gamma}{E} (l-x) \right] dx = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

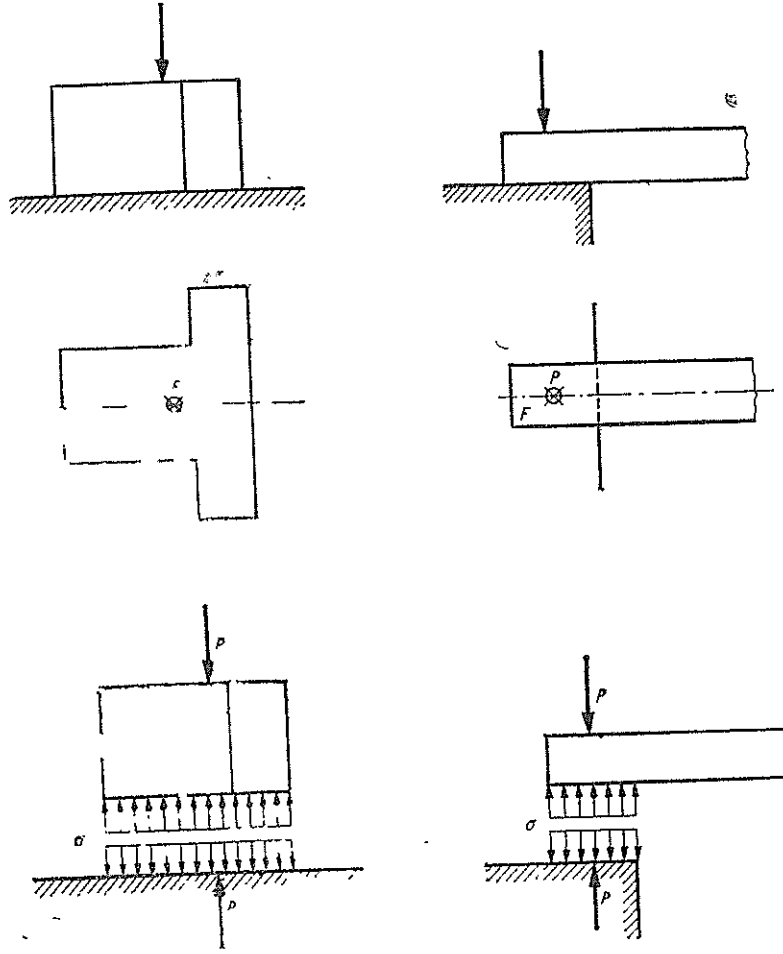
$$u(l) = \frac{1000 \cdot 6000}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1} + \frac{7,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6000^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} = 2,93 \text{ cm}$$

• - • اجهادات التماس (Berührungsspannungen)

أثناء انتقال القوى بين العناصر الانشائية المتلامسة (شكل 5 18 a,b) تتشكل في سطوح التماس قوى سطحية . لتكن P هي القوة التي ينبغي نقلها ولتكن F هي مساحة سطح التماس المستوي ، بذلك فان الاجهاد الضاغط الوسطي (mittlere Druckspannung) الذي يتشكل هو :

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (5.24)$$

ولقد تم في الشكل (5.18 c) ايضاح الاجهاد الضاغط الوسطي من أجل المثالين المرسومين هناك . للتمكن من استخدام العلاقة (5.24) يشترط أن تؤثر القوة P في مركز ثقل سطح التماس وذلك حتى يتم التوازن بين القوة الوحيدة P وبين الاجهاد الثابت (القوة السطحية) .

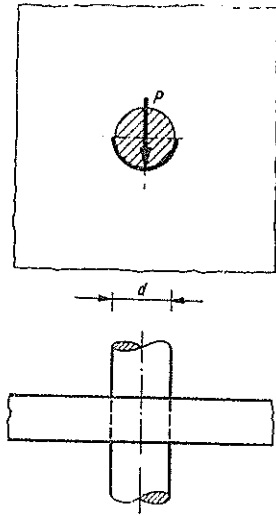


شكل 5.18

تشكل اجهادات التماس أيضاً أثناء نقل القوى بين مسطوح التماس المنحنية وعلى سبيل المثال في حالة البراغي (Bolzen) والبراشيم (Nieten) المحملة عمودياً على المحور (شكل 5.19) . نتيجة لتأثير القوة P فان السطح الاسطوانى المرسوم بشكل غامق سوف يضغط . إن بالامكان اتباع اقتراح العالم فايسباخ (WEISBACH) التقريبي والافتراض أن اجهادات التماس تتوزع على السطح $F=b.d$ بشكل منتظم (شكل 5-20) وذلك بحيث تصلح من أجله العلاقة التالية:

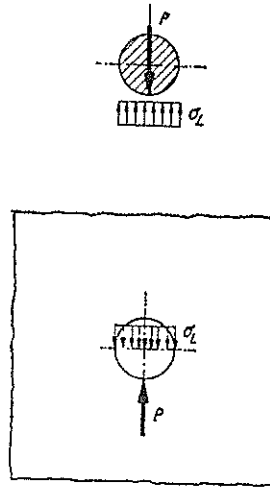
$$\sigma_L = \frac{P}{h.l} \quad (5-25)$$

تسمى الاجهادات σ_L باجهادات حافة الثقب (Lochleibungsspannungen) أو بضغط حافة الثقب (Lochleibungsdruck) . كما لا يسمح للاجهادات التي تتشكل في القضبان المشدودة / المضغوطة أن تتخطى قيمة مسموحة معينة مسبقاً هي σ_{zul} لايسمح أيضاً أن تتخطى اجهادات التماس قيمة مسموحة معينة مسبقاً هي σ_L ، σ_{zul} وبذلك تصلح العلاقة التالية :



شكل 5-19

Bild 9



شكل 5.20

في حالة سطوح التماس المستوية :

$$\sigma = \frac{|P|}{F} \leq |zul \sigma|$$

وفي حالة سطوح التماس المنحنية :

$$\sigma_L = \frac{|P|}{F} \leq |zul \sigma_L| \quad (5-27)$$

٥ - ٦ تطبيقات

مثال 54 :

حملت القضبان ذات المقطع العرضي الثابت، الممثلة في الشكل (5.22)، بوزنها الذاتي وبالقوة P.

المعطى : P , l , γ .

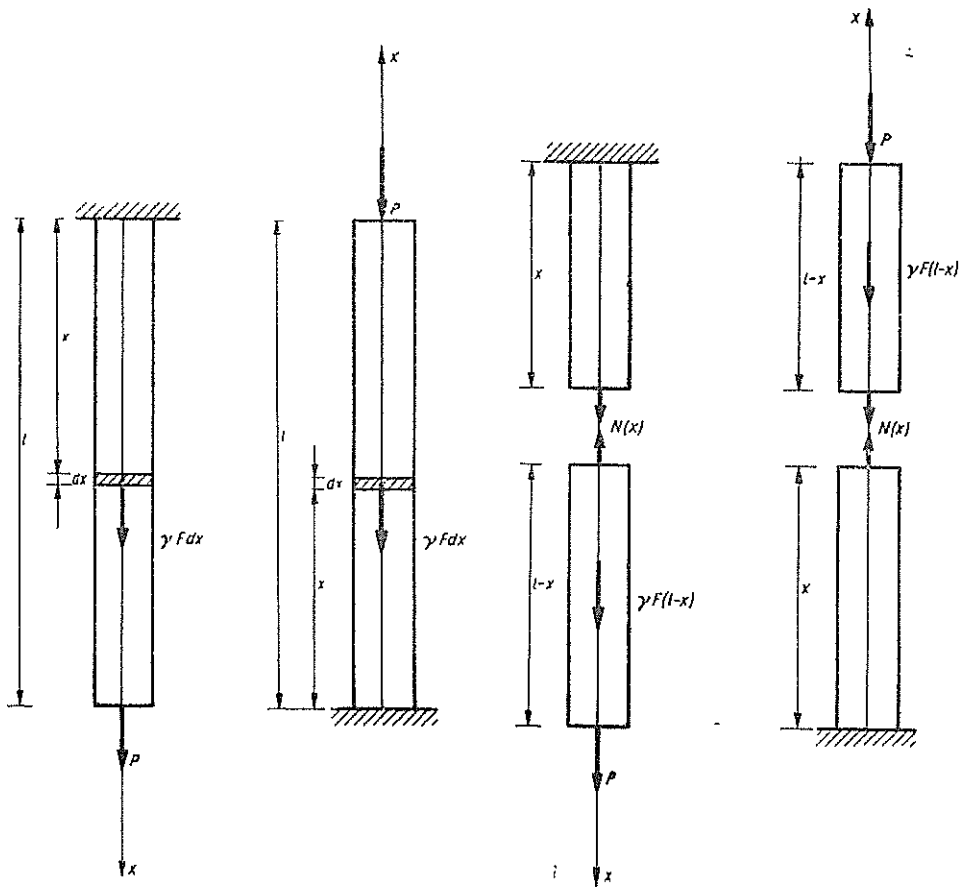
المطلوب : حساب توزيع الاجهاد σ (x) وكذلك الانتقالات u (x) .

الحل :

بتطبيق شروط التوازن على أجزاء القضيب التي يبلغ طولها l-x (شكل 5.23) :

$$N_x (x) = P + \gamma F (l - x)$$

أو كذلك



شكل b.21

شكل 5.22

$$N_x(x) = - [P + \gamma F (l - x)]$$

يتم الحصول على الاجهادات

$$\sigma(x) = \frac{P}{F} + \gamma(l-x)$$

أو كذلك

$$\sigma(x) = - \left[\frac{P}{F} + \gamma(l-x) \right]$$

تشكل القيم الاعظمية في المكان $x=0$ وبذلك يصبح الكشف عن الاجهاد كما يلي :

$$\left| \frac{P}{F} + \gamma l \right| \leq | \text{zul } \sigma |$$

أما الانتقالات فيتم حسابها من العلاقة (5.18) بالشكل التالي :

$$u(x) = \frac{1}{E} \int \left[\frac{P}{F} + \gamma (l-x) \right] dx + c = \frac{1}{E} \left[\frac{P}{F} x + \gamma x \left(l - \frac{x}{2} \right) \right] + c$$

أو كذلك

$$u(x) = - \frac{1}{E} \int \left[\frac{P}{F} + \gamma (l-x) \right] dx + c = - \frac{1}{E} \left[\frac{P}{F} x + \gamma x \left(l - \frac{x}{2} \right) \right] + c$$

بالاستعانة بشرط الطرف $u(x=0) = 0$ يتم تعيين ثوابت التكامل لكلا الحالتين وهو $c=0$ وبذلك يصبح الانتقال ، بعد تبديل الثوابت ، كما يلي :

$$u(x) = \frac{Px}{EF} + \frac{\gamma l^2}{E} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l} \right)$$

أو كذلك

$$u(x) = - \left[\frac{Px}{EF} + \frac{\gamma l^2}{E} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \right]$$

تشكل الانتقالات الاعظمية عند مواضع تطبيق القوة الوحيدة ، وبذلك ينتج :

$$u(x=l) = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

أو كذلك

$$u(x=l) = - \left(\frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} \right)$$

إذا كان القضيب محملاً بوزنه الذاتي فقط فبالإمكان بسبب العلاقة التالية :

$$\gamma l \leq | \text{zul } \sigma |$$

تعريف طول القضيب الاعظمي (maximale Stablaenge) :

$$\text{zul } l = \frac{| \text{zul } \sigma |}{\gamma} \quad (5-28)$$

الذي يسمى بطول التحمل للمادة (Traglaenge des Werkstoffes) . فعلى سبيل المثال يبلغ طول التحمل لسلاك، اجهاده المسموح $\text{zul } \sigma = 5,0 \text{ Mp cm}^{-2}$ ووزنه النوعي $\gamma = 7,85 \text{ Mp cm}^{-2}$ القيمة التالية :

$$zul\ l = \frac{5,0 \cdot 10^4}{7,85} = 6369,4\text{ m}$$

بالاستماسة عن $zul\ \sigma$ في العلاقة (5.28) باجهاد الكسر σ_B عندئذ يمكن تعيين الطول l_B الذي ينقطع القضيب المعلق بشكل حر عند بلوغه . يسمى هذا الطول والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية :

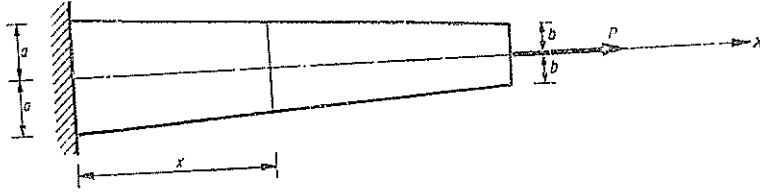
$$l_B = \frac{\sigma_B}{\gamma} \quad (5-25)$$

والذي يتعلق من (يتبع) مادة الصنع ، بطول الكسر (طول الانكسار) او طول الانتطاع (Reiß - oder Bruchlaenge) .

يبلغ طول الكسر (طول الانتطاع) لسلك مصنوع من مادة تبلغ فيها $\sigma_B = 18,0\text{ Mp cm}^{-2}$ و $\gamma = 7,85\text{ Mpm}^{-3}$ القيمة التالية : $l_B = 22,93\text{ km}$. كما يبلغ طول الانتطاع لحبال القنب (Hanfseile) $35,0\text{ km}$ ولحبال القطن (لأحبال المصنوعة من القطن) $25,0\text{ km}$.

مثال 55 :

يطلب تعيين الاجهاد $\sigma(x)$ والانتقال $u(x)$ لقضيب مبروم (قضيب مقطعه العرضي دائري الشكل) مخروطي (شكل 5.23) .



شكل 5.23

الحل :

بالاستماسة بمساحة المقطع العرضي :

$$F(x) = \pi \left(a - \frac{a-b}{l} x \right)^2$$

يتم مبدئياً تعيين الاجهاد :

$$\sigma(x) = \frac{P}{\pi \left(a - \frac{a-b}{l} x \right)^2}$$

ومن العلاقة التالية :

$$u(x) = \int \frac{P}{E\pi \left(a - \frac{a-b}{l} x \right)^2} dx + c = P \frac{l}{E\pi(a-b) \left(a - \frac{a-b}{l} x \right)} + c$$

يتم التوصل ، بعد الاستعانة بشروط الاطراف :

$$u(x=0) = 0 = P \frac{l}{E\pi(a-b)a} + c$$

تعيين ثوابت التكامل :

$$c = -P \frac{l}{E\pi a(a-b)}$$

وذلك بحيث يصبح الانتقال :

$$u(x) = \frac{Px}{E\pi a \left(a - \frac{a-b}{l} x \right)} = \frac{Px}{E \sqrt{F(0) F(x)}}$$

مثال 56 :

يطلب اعطاء قضيب يحمل بوزنه الذاتي وبقوة وجيدة ، الشكل اللازم ليكون الاجهاد المتشكل في أي مقطع عرضي من القضيب مساويا لاجهاد معلوم σ_0 (اي ليكون الاجهاد في كل مقطع عرضي من القضيب مساويا للقيمة الثابتة σ_0) (شكل 5.24) .

الحل :

لحل هذا المثال سوف يتم تطبيق شروط توازن القوى بالاتجاه x على قطعة صغيرة قدر الامكان من القضيب .

تؤثر ، حسب الفرض على سطوح القطوع $F(x)$ و $F(x+dx)$ الاجهادات σ_0 بحيث تبلغ محصلة الاجهادات على سطوح القطوع القيمة التالية :

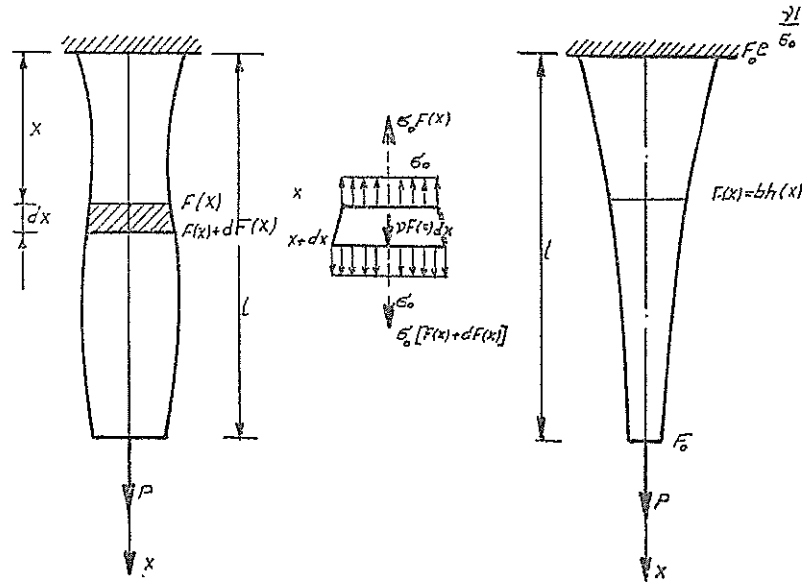
$$\sigma_0 F(x) , \sigma_0 F(x+dx) \approx \sigma_0 [F(x) + dF(x)]$$

بالاستعانة بالوزن الذاتي $\gamma F(x)$ للقطعة الصغيرة قدر الامكان المقطعة من القضييب فان شرط التوازن يأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_0 [F(x) + dF(x)] + \gamma F(x) dx - \sigma_0 F(x) = 0$$

كما انه يأخذ بعد فصل المتغيرات (Trennung der veraenderlichen) الشكل الآتي :

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = - \frac{\gamma}{\sigma_0} dx$$



شكل 5.24

تعطي مكاملة العلاقة السابقة ، التسكامل العام التالي :

$$\ln F(x) - \ln c = \ln \frac{F(x)}{c} = - \frac{\gamma}{\sigma_0} x$$

أو :

$$F(x) = c e^{-\frac{\gamma}{\sigma_0} x}$$

عندما تكون مساحة المقطع العرضي $F(x=l) = F_0$ معطاة فان الشرط الذي يعبر عنها ، يكتب هكذا :

$$F(x=l) = F_0 = c e^{-\frac{\gamma}{\sigma_0} l}$$

بواسطة هذا الشرط يتم تعيين ثابت التكامل :

$$c = F_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} l}$$

الذي يعطي بعد التبديل علاقة تعيين مساحة المقطع العرضي كتابع للمحور x :

$$F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} (l-x)}$$

اما مساحة المقطع العرضي F_0 الذي تؤثر فيه القوة P ، فيتم تعيينها استناداً الى المطلب الذي يشترط ان يكون الاجهاد المتشكل في كل مقطع عرضي هو الاجهاد المعلوم الثابت σ_0 :

$$F_0 = \frac{P}{\sigma_0}$$

لقد تم في الشكل (5.24 c) تمثيل قضيب مشدود من هذا النوع ، مقطعه العرضي مستطيل الشكل ومساحته هي $F(x) = bh(x)$.

للتمكن قدر المستطاع ، في حالة القضبان المشدودة / المضغوطة ذات المقاومة المتساوية (اثنائية) من بلوغ الاجهاد الموجود الثابت ، تستعمل في الحياة العملية قضبان ذات مقطع عرضي متدرج (كما هو الحال في ابراج نقل القدرة وكذلك في قضبان الحفر) . يتم تعيين الانتقالات في قضيب متساوي المقاومة (ذو مقاومة ثابتة) باستخدام العلاقة (5.17) وذلك بعد ادخال $\sigma(x) = \sigma_0$ بعين الاعتبار ، وبذلك ينتج :

$$u(x) = \frac{\sigma_0}{E} x + c$$

بالاستعانة بشروط الأطراف :

$$u(x=0) = 0 = c$$

يتم التوصل من العلاقة السابقة لما يلي :

$$u(x) = \frac{\sigma_0}{E} x \quad (5-30)$$

وبواسطة :

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$$

فان العلاقة السابقة تأخذ شكلها النهائي :

$$u(x) = \frac{P x}{E F_0}$$

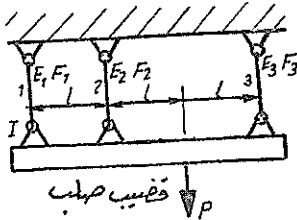
بمقارنة هذه النتيجة مع العلاقة (5.19 b) يتبين ان الانتقالات في القضيب متساوي المقاومة لها نفس قيمة الانتقالات في قضيب عديم الوزن وتحمل بالقوة P ومقطعه العرضي F_0 ثابت .

٥ - ٩ حل المسائل غير المقررة ستاتيكيًا بالاستعانة بتغيرات الشكل

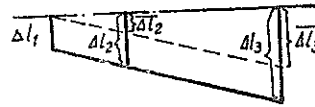
(Loesung statisch unbestimmte Aufgaben mit Hilfe der Formaenderung)

ليست تغيرات الشكل في الجسم هي اعتباطية وإنما تتبع شروطاً معينة . بما ان علاقات التوازن (شروط التوازن) لا تكفي لايجاد القيم المجهولة في المسائل غير المقررة ستاتيكيًا ، لذلك يتم اللجوء لاعتبارات تغير الشكل والاستعانة بها . أما هذه الطريقة فسوف يتم شرحها من خلال المثالين التاليين .

٥ - ٩ - ١ قضيب صلب متصل بثلاثة قضبان (شكل 5-25)



شكل 5-25



شكل 5-26

بعد الافتراض ان قوى القضبان الثلاثة هي قوى شد فان شروط التوازن تأخذ الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} \sum V = 0 & : S_1 + S_2 + S_3 - P = 0 \\ \sum M_1 = 0 & : S_2 \cdot l + S_3 \cdot 3l - P \cdot 2l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

بالافتراض ان القوة تؤثر على قضيب صلب (شكل 5-25) لذلك يمكن بسهولة الحصول على العلاقات التي تربط بين التغيرات المائدة لكل من القضبان مع بعض :

$$\begin{aligned}\Delta l_2 &= \Delta l_1 + \bar{\Delta l}_2 \\ \Delta l_3 &= \Delta l_1 + \bar{\Delta l}_3 \\ \frac{\bar{\Delta l}_3}{\Delta l_2} &= \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1} = \frac{3l}{l}\end{aligned}\quad (5-32)$$

منها ينتج ان :

$$3 \Delta l_2 = 2 \Delta l_1 + \Delta l_3$$

من العلاقات (5-31) و (5-32) بالارتباط مع قانون هوك الذي يمكن تمثيله كما يلي :

$$\Delta l_i = \frac{S_i l_i}{E_i F_i}$$

يستطاع تعيين قوى القضبان :

$$S_1 = P \frac{3 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} - \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3}}{4 + 9 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3}} ; \quad S_2 = P \frac{2 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3}}{4 + 9 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3}} \quad (5-33)$$

$$S_3 = P \frac{2 + 6 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}}{4 + 9 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3}}$$

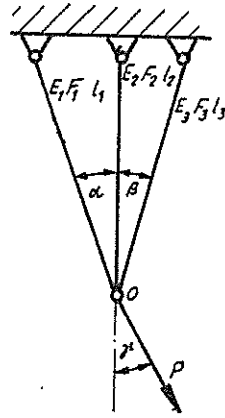
٥ - ٩ - ٢ جانز شبكي غير مقرر ستاتيكيًا (شكل 5-27)

شروط توازن القوى :

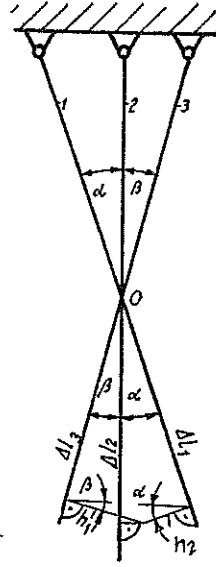
$$\Sigma V = 0 : S_1 \cos \alpha + S_2 + S_3 \cos \beta - P \cos \gamma = 0 \quad (5-34)$$

$$\Sigma H = 0 : S_1 \sin \alpha - S_3 \sin \beta - P \sin \gamma = 0$$

نتيجة للتحميل فان النقطة 0 سوف تقوم بالانتقال . بسبب تغيرات الشكل ، التي يفترض انها صغيرة ، يستطاع تمثيل استطالات القضبان Δl_i وذلك بأخذ عمود من النقطة المنتقلة على كل من الخطوط التابعة لها (شكل 5-28) . وعلاوة على ذلك يمكن ايهال تغير الزوايا α, β وبذلك يمكن التوصل للعلاقات الهندسية التالية :



شكل 5 26



شكل 5,28

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha + h_2 \sin \alpha$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 \cos \beta + h_1 \sin \beta$$

$$\Delta l_1 \sin \alpha + \Delta l_3 \sin \beta = h_1 \cos \beta + h_2 \cos \alpha$$

منها يتم الحصول ، بعد اختزال (اختصار ، حذف) h_2, h_1 ، على ما يلي :

$$\Delta l_1 \sin \beta + \Delta l_3 \sin \alpha = \Delta l_2 \sin (\alpha + \beta) \quad (5-5)$$

بادخال قانون هوك في العلاقة (5 35) عندئذ يتم الحصول من العلاقات (5 34) و (5.35) على قوى القضبان المجهولة :

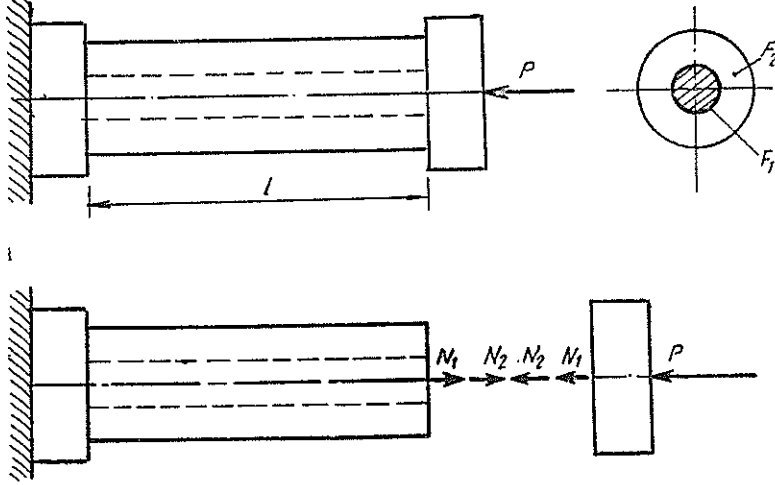
$$S_1 = \frac{\frac{l_2}{E_2 F_2} \sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \gamma) + \frac{l_3}{E_3 F_3} \sin \alpha \sin \gamma}{\frac{l_1}{E_1 F_1} \sin^2 \beta + \frac{l_2}{E_2 F_2} \sin^2 (\alpha + \beta) + \frac{l_3}{E_3 F_3} \sin^2 \alpha} P$$

$$S_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2 \sin (\alpha + \beta)} \left[\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} \sin \beta + \frac{S_3 l_3}{E_3 F_3} \sin \alpha \right] \quad (5.36)$$

$$S_3 = S_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - P \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

مثال 57 :

يتألف قضيب مترابط (verbundstab) ، طوله l ومقطعه العرضي دائري الشكل ، من نواة فولاذية ومن تلبيسة (تغطية ، تكسية) نحاسية (شكل 5.29) .



شكل 5.29

يتم تحميل القضيب بقوة الضغط P بواسطة صفيحتين صلبتين .

المطابوب : حساب الاجهادات في النواة الفولاذية وفي التلبيسة النحاسية وذلك عندما تكون عوامل مرونتها هي E_1 , E_2 .

الحل :

لتعيين الاجهادات سوف تفصل الصفيحة اليمنى عن جسم القضيب ثم ترسم بعد ذلك القوة الناعمية N_1 على النواة الفولاذية والقوة N_2 على التلبيسة النحاسية (شكل 5.29 b) . بتطبيق شرط توازن القوى الافقية على الصفيحة اليمنى المفصولة يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$N_1 + N_2 + P = 0 \quad (5.37)$$

لعدم التمكن من تعيين المجهولين N_1 , N_2 بواسطة المعادلة السابقة لذلك فان المسألة المدروسة هي غير مقررة ستاتيكيًا . أما معادلة التعيين التي مازال ناقصة فيتم الحصول عليها من الانتقالات التي تنتج عن القوى N_1 , N_2 :

$$u_1 (x = l) = \frac{\dot{N}_1 l}{E_1 F_1} \quad ; \quad u_2 (x = l) = \frac{\dot{N}_2 l}{E_2 F_2}$$

والتي ينبغي ان تكون متساوية وذلك لان الصفيحتين الصلبتين تقسم نهايتي المقطع العرضي من البقاء مستوية . اذاً :

$$u_1 (x = l) = u_2 (x = l)$$

بالاستعانة بهذا الشرط يتم التوصل لمعادلة التعيين الثانية ممثلة بالشكل التالي :

$$\frac{N_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2}{E_2 F_2} \quad (5.38)$$

من العلاقتين (5.37) و (5.38) ينتج :

$$N_1 = - \frac{E_1 F_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P \quad ; \quad N_2 = - \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P$$

وبذلك فان الاجهادات المطلوبة تبلغ :

$$\sigma_1 = - \frac{E_1}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P \quad ; \quad \sigma_2 = - \frac{E_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} P$$

مثال 58 :

حمل قضيب ، مقطعه العرضي ثابت وموثوق من كلا طرفيه، عند النقطة x بقوة وحيدة محورية (شكل 5.30) .

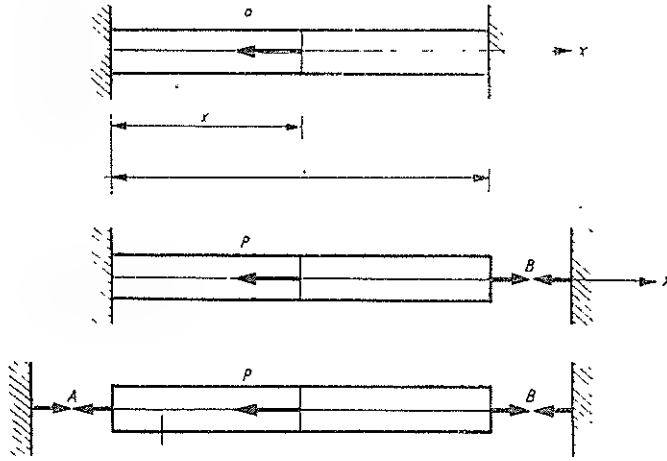
انطوب : تعيين كيفية توزيع القوة على كلا المسندين وكذلك تعيين إنتقال المقطع العرضي عند النقطة x .

الحل :

لحل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكيأ سوف يفصل القضيب عن المسند الأيمن ثم يجرى إدخال رد فعل المسند B الذي يعتبر في البداية كقوة مجهولة (شكل 5.30 b) .

لوجوب إنعدام الانتقال في المقطع العرضي عند النهاية x=l ، والنتائج عن تأثير القوى P , B مشتركة ، يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$u (x = l) = \frac{B l}{EF} - \frac{P x}{EF} = 0$$



شكل 5.30

من هذه العلاقة يتم تعيين رد فعل المسند :

$$B = P \frac{x}{l}$$

أما رد فعل المسند A الذي يؤثر على القضيب عند المقطع $x=0$ (شكل c 5-26) فهو :

$$A = -P + B = -P \frac{l-x}{l}$$

وأما إنتقال المقطع العرضي الكائن عند النقطة x فيبلغ :

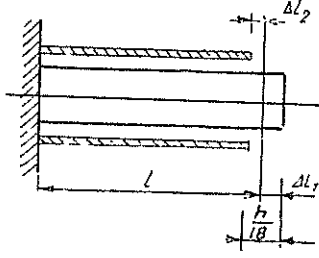
$$u(x) = \frac{B-P}{EF} x = -\frac{Px}{EF} \frac{l-x}{l}$$

من حل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكيًا يتبين أنه ينبغي ، علاوة على شرط التوازن ، إضافة شرط هندسي يعبر عن الانتقالات .

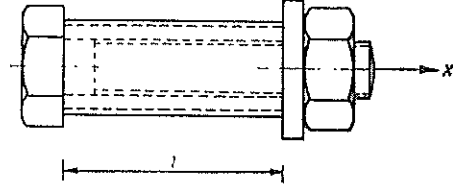
مثال 59 :

يحاط برغي من الفولاذ ($E_1 = 2100,0 \text{ Mp cm}^{-2}$, $F_1 = 3,2 \text{ cm}^2$) بغلاف من الألمنيوم ($E_2 = 700,0 \text{ Mpcm}^{-2}$, $F_2 = 1,9 \text{ cm}^2$) طوله ثمانية سنتيمترات (شكل a 5 31) . يبلغ طول الخطوة (ارتفاع الخطوة Ganghoehe) في البرغي $h = 3,0 \text{ mm}$.

المطلوب : تعيين الاجهادات التي تتشكل في جسم البرغي (Schraubenbolzen) وكذلك في غلاف الألمنيوم وذلك عندما تشد الصامولة بمقدار 20° .



شكل 5-31 b



شكل 5-31 a

الحل :

أثناء شد الصامولة فإن جسم البرغي سوف يحمل على الشد أما الغلاف فإنه سوف يحمل على الضغط . لتكن إستطالة البرغي الفولاذي هي Δl_1 وليكن تقاصر الغلاف هو Δl_2 . لأسباب هندسية ينبغي أن يكون الانتقال الناتج عن تدوير الصامولة والذي يؤدي لانتقال طولي مقداره $h/18$ مساوياً $\Delta l_1 + \Delta l_2$.

ليرمز للقوة التي تمتد (تشد) البرغي وتقلص (تضغظ) الغلاف بالحرف X ، عندئذ تنتج من الشرط الهندسي التالي (geometrischen Bedingung) :

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{h}{18}$$

وبعد إعتبار العلاقة (5.20) ، المعادلة الآتية :

$$\frac{X l}{E_1 F_1} + \frac{X l}{E_2 F_2} = \frac{h}{18}$$

من هذه المعادلة يتم تعيين القوة المجهولة :

$$X = \frac{1}{18} \frac{h}{l} \frac{F_1 F_2 E_1 E_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

وبفضلها يتم تعيين الاجهادات :

$$\sigma_1 = \frac{X}{F_1} , \quad \sigma_2 = \frac{X}{F_2}$$

بإستخدام المعطيات العددية للمسألة ينتج :

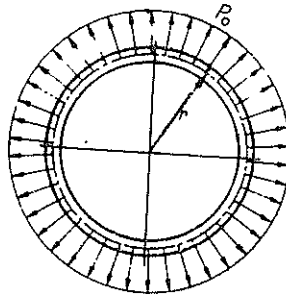
$$X = 2,313 \text{ Mp} , \quad \sigma_1 = 0,723 \text{ Mp cm}^{-2} , \quad \sigma_2 = 1,217 \text{ Mp cm}^{-2}$$

٥ - ٧ الحلقات الدائرية رقيقة الجدار (Duennwandige Kreisringe)

يقال عن الحلقة الدائرية أنها رقيقة الجدار عندما تكون فيها أبعاد المقطع العرضي صغيرة بالنسبة لنصف القطر .

بتحميل أمثال هذه الحلقة الرقيقة بحمولة خطية p_0 ثابتة بالنسبة لمحور الحلقة (شكل 5-32) عندئذ تتشكل في كل مقطع عرضي من الحلقة إجهادات ناظرية σ_0 (إجهادات حلقيّة Ringspannungen) يمكن اعتبارها موزعة على مساحة المقطع العرضي F بانتظام . حسب ذلك فإن القوة الحلقيّة (قوة الحلقة Ringkraft) ، التي تؤثر مماسية على محور الحلقة ، تبلغ القيمة التالية :

$$N = \sigma_0 F$$



شكل 5-32

لتعيين هذه القوة ، سوف يتم ، حسب اقتراح العالم رانكين (RANKINE) ، شطر الحلقة الى شطرين (شكل 5-33) ثم تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه y على النصف العلوي وبذلك ينتج :

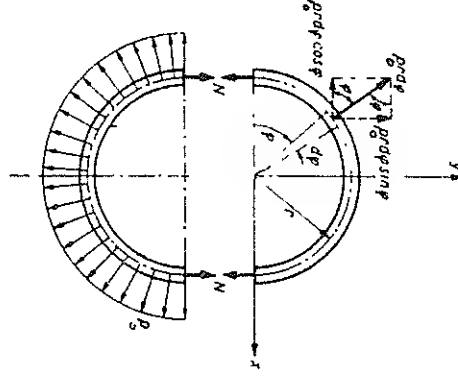
$$\int_0^\pi p_0 r \sin \varphi d\varphi - 2N = 0$$

من هذه العلاقة يتم تعيين القوة الحلقيّة المطلوبة :

$$N = \frac{1}{2} p_0 r [-\cos \varphi]_0^\pi = p_0 r \quad (5-39)$$

أما شرط توازن القوى بالاتجاه x فهو لأسباب التناظر ، محقق . وبذلك فإن الاجهاد الحلقي يبلغ :

$$\sigma_0 = \frac{p_0 r}{F} \quad (5-10)$$



شكل 5-33

عندما يكون تأثير القوة الموزعة p_0 قطرياً ونحو الخارج فإن القوة الحلقيّة وكذلك الاجهاد الحلقي يكونا موجبتين ، وتكونا سالبتين عندما يكون تأثير القوة نحو الداخل (عندما تتجه المحولة نحو الداخل) .

نتيجة الاجهادات الحلقيّة الموجبة يستطيل كل عنصر حلقي بالمقدار $\bar{ds} - ds$ (شكل 5.34) كما يظهر في نفس الوقت تغير قطري (تغير في القطر Radiusaenderung) مقداره Δr . من أجل التمدد

$$\epsilon_0 = \frac{d\bar{s}}{ds} - 1$$

العائد لكل عنصر قوسي ، يتم بعد الاستعانة بالعلاقات التالية :

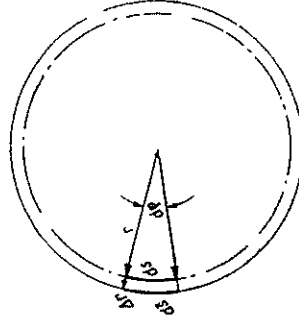
$$d\bar{s} = (r + \Delta r) d\varphi , ds = r d\varphi$$

الحصول على العلاقة الآتية :

$$\epsilon_0 = \frac{r d\phi + \Delta r d\phi}{r d\phi} - 1 = \frac{\Delta r}{r}$$

وبذلك فإن التغير القطري يبلغ :

$$\Delta r = r \epsilon_0 \quad (5-41)$$



شكل 5.34

بواسطة قانون هوك :

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

يتم التوصل لاتساع حلقة دائرية رقيقة والذي يبلغ :

$$\Delta r = r \frac{\sigma_0}{E} = \frac{P_0 r^2}{EF} \quad (5-41b)$$

في حالة تحميل الحلقة على الضغط فإن Δr يكون سالباً وذلك بحيث ينتج عنه تقلص الحلقة .
بالامكان استخدام العلاقتين (5,40) و (5,41 b) ايضا لتعيين الاجهادات الحلقية والتغير القطري
لأنبوب رقيق الجدار ، سماكة جداره هي h .

في حالة تحميل الأنبوب بقوة سطحية q_0 ثابتة القيمة وقطرية الاتجاه ومنسوبة على السطح
الأوسط للأنبوب فإن بالامكان تطبيق علاقة الحلقة (Ringformel) على الحلقة المقطعة من الأنبوب
التي يبلغ عرضها b (شكل 5 35) . بواسطة محصلة القوة الخطية :

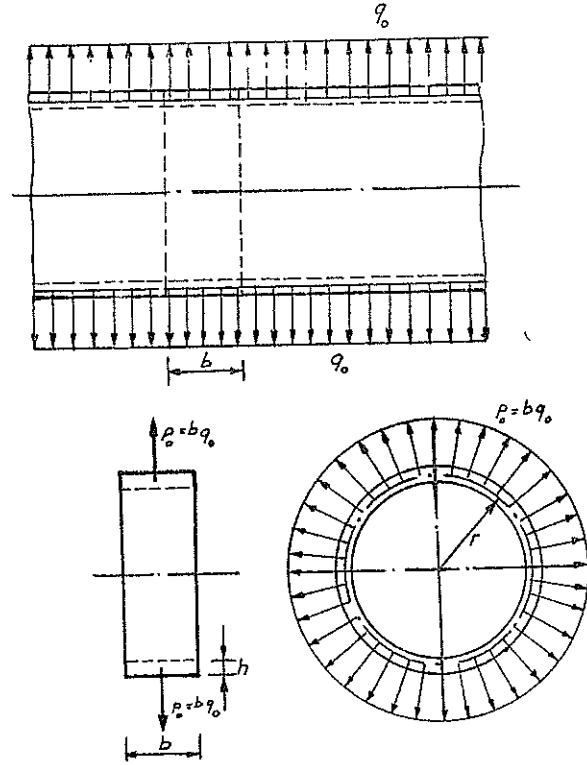
$$p_0 = b q_0$$

والمساحة $F=bh$ فإن الاجهاد الحلقي يبلغ حسب العلاقة (5,39) القيمة التالية :

$$\sigma_o = \frac{b q_o r}{bh} = \frac{q_o r}{h} \quad (5-42)$$

كما ان التغير القطري يبلغ حسب العلاقة (5-41 b) ما يلي :

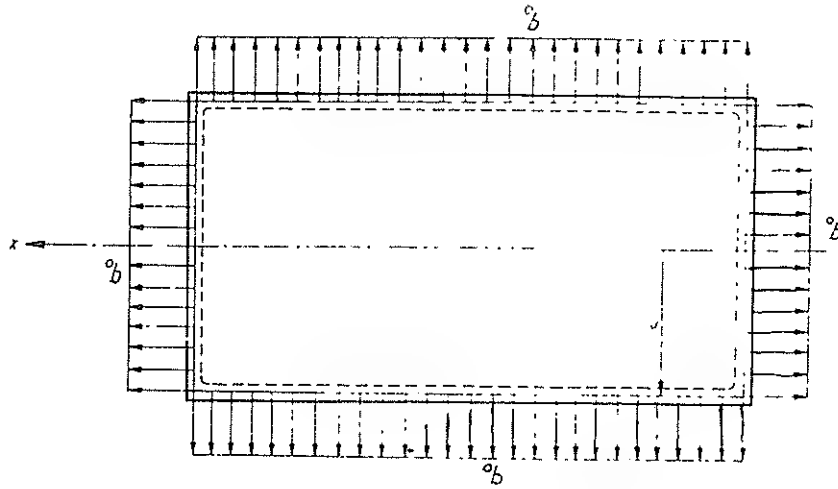
$$\Delta r = \frac{b q_o r^2}{Ebh} = \frac{q_o r^2}{Eh} \quad (5-43)$$



شكل 5.35

ان كلا القيمتين مستقل عن العرض b ولذلك فصلاحيتها تشمل كل انبوب رقيق منها بلغ طوله .

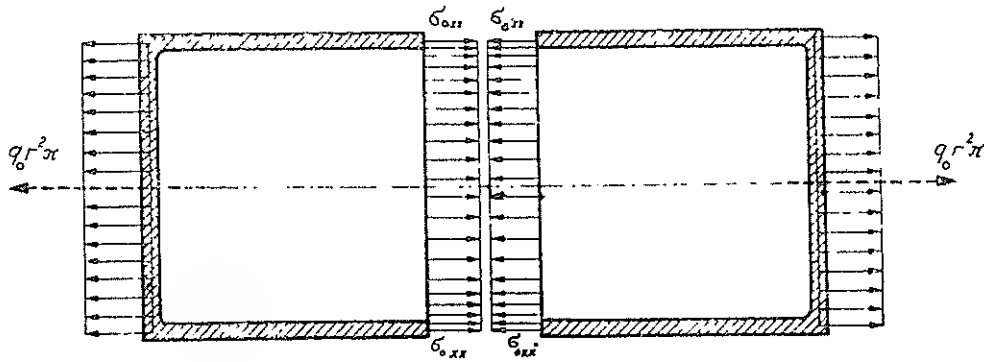
باغلاق نهايتي الانبوب رقيق الجدار يتشكل عنه مرجل اسطواناني دائري (kreiszyllindrischer Kessel) (شكل 5 36) وبذلك تتشكل في جداره ، في حالة التحميل على الضغط ، اجهادات حلقيية واجهادات طولية (Ring- und Laengsspannungen) . على بعد كبير وكاف عن صفائح اغلاق الأنبوب (Stirnwaenden) فان الاجهادات الحلقيية في المرجل تتطابق مع الاجهادات الحلقيية في الانبوب .



شكل 5-36

لتعيين الاجهادات الطولية ، سوف يقطع المرسل عرضياً (ناظمياً) على المحور الطولي (شكل 5.37) . تقوم محصلة الاجهادات الطولية σ_{xx0} ، التي يفترض انها تتوزع بانتظام ، مع المحصلة المائدة للقوى $q_0 r^2 \pi$ التي تؤثر على سطح صفائح الاغلاق ، بتحقيق حالة التوازن . بحيث تأخذ شروط التوازن من اجل الجزء المقتطع (المطبقة على الجزء المقتطع) من المرسل الشكل التالي :

$$\sigma_{xx0} 2 r \pi h - q_0 r^2 \pi = 0$$



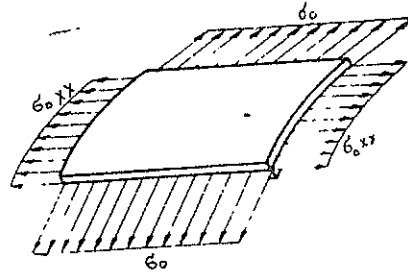
شكل 5.37

من هذه العلاقة يتم تعيين الاجهاد القطري :

$$\sigma_{xx0} = \frac{q_0 r}{2h} \quad (3.44)$$

الذي تبلغ قيمته نصف قيمة الاجهاد الحلقي σ_0 الذي يحسب بواسطة العلاقة (5.42) . اذا توتر على عنصر ما من السطح المغلف (Mantelflaeche) الموجود على بعد كاف من صفائح الاغلاق ، الاجهادات الناعمية التالية :

$$\sigma_0 = \frac{q_0 r}{h} , \quad \sigma_{xx0} = \frac{q_0 r}{2h}$$



شكل 5.38

يوضح الشكل (5.38) حالة الاجهاد المذكورة .

٥ - ٨ التأثيرات الحرارية (Temperaturwirkungen)

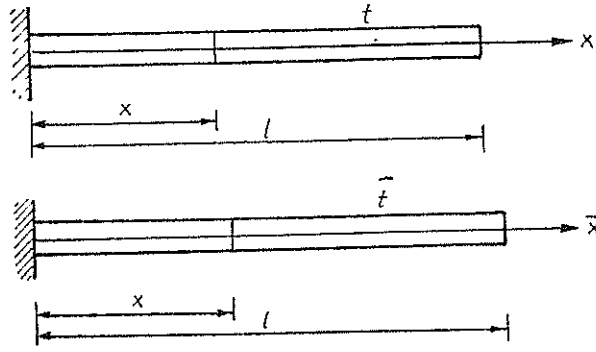
عندما تتغير درجة حرارة القضيب فانه يقوم في حالة ارتفاع درجة الحرارة بالاستطالة وفي حالة انخفاض درجة الحرارة بالتقاصر . سوف تهمل التغيرات الطارئة على ابعاد المقطع العرضي للقضيب وذلك لانها بالمقارنة مع طول القضيب صغيرة . سوف يتم الآن دراسة قضيب مقطعه العرضي F ثابت وطوله l (شكل 5.39 a) وتبلغ درجة حرارته t .

عندما يكون α هو عامل التمدد الحراري الخطي (عامل الاستطالة الحراري الخطي او عامل التغير النسبي الحراري) (lineare thermische Ausdehnungskoeffizient) للمادة فان انتقال المقطع العرضي ، الذي يقع على بعد x من الاحداثيات والمعرف بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} - x = u(x)$$

يلعب في حالة تغير درجة الحرارة من t الى \bar{t} (شكل 5.39 b) القيمة التالية :

$$u(x) = \alpha(\bar{t} - t)x \quad (5-45)$$



شكل 5.39

ان تغير الطول الكلي للقضيب ، اي انتقال المقطع العرضي للنهاية (الموجود عند النهاية) والواقع على بعد $x=l$ ، يبلغ حسب العلاقة (5.40) ما يلي :

$$u(x=l) = \alpha (\bar{t} - t) l \quad (5.46)$$

في حالة ارتفاع درجة الحرارة ، اي عندما تكون $\bar{t} > t$ ، فان الانتقالات تكون موجبة وفي حالة انخفاض درجة الحرارة ، اي عندما تكون $\bar{t} < t$ ، فانها تكون سالبة . من العلاقة (5.45) ومن اجل التمدد الحراري ϵ_{th} ، يتم الحصول على القيمة المستقلة عن x ، التالية :

$$\epsilon_{th} = \frac{du(x)}{dx} = \alpha (\bar{t} - t) \quad (5.47)$$

حيث ان :

\bar{t} هي درجة الحرارة النهائية.

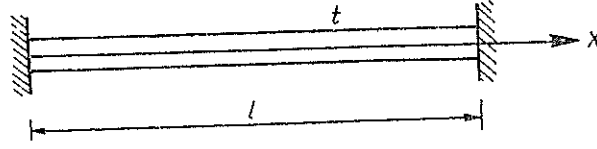
t هي درجة الحرارة الابتدائية .

α هو عامل التمدد الخطي الحراري (فهو يساوي ، على سبيل المثال

$$\alpha_{Cu} = 16,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ C} , \alpha_{Fe} \approx 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ C} .$$

لعدم اعاقبة تمدد المادة اثناء التغير الحراري $\bar{t} - t$ فان التمددات الحرارية لا تؤدي في الجمل المقررة ميكانيكياً الى اجهادات . لكن بعد اعاقبة التغير الطولي وذلك بثبيت

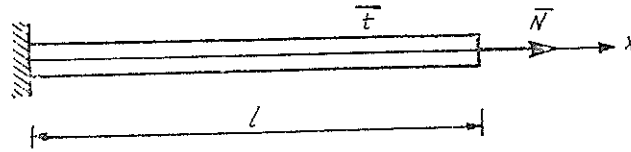
نهاية القضيب (شكل 5-40) تشكل في القضيب اجهادات ، تسمى بالاجهادات الحرارية (Waermespannungen) .



(شكل 5-40)

لتعيين الاجهادات الحرارية المذكورة سوف يفصل القضيب عن نقطة الوثاقة ثم يجرى ادخال رد فعل المسند N الذي يعتبر في البداية مجهولا (شكل 5 41). نتيجة لتغير درجة الحرارة بالمقدار $\bar{t} - t$ فقط فان نهاية القضيب سوف تنتقل بالمقدار :

$$u(x=l) = \alpha (\bar{t} - t) l = \epsilon_{th} l$$



شكل 5.41

بينما يبلغ انتقال نفس النقطة من القضيب ، تحت تأثير قوة رد فعل المسند N ؛ حسب العلالة (5 20) ، القيمة التالية :

$$\bar{u}(x=l) = \frac{\bar{N} l}{EF}$$

لكن بما ان نهاية القضيب اليمنى هي في الحقيقة ثابتة ، لذلك ينبغي ان ينعدم مجموع كلا الانتقالين $u(l) + \bar{u}(l)$ بحيث يصبح :

$$\epsilon_{th} l + \frac{\bar{N} l}{EF} = 0$$

من هذه العلاقة يتم تعيين القوة الناطمية ، التي تشكل في القضيب نتيجة لاعاقبة التمددات الحرارية وهي تبلغ :

$$\bar{N} = -EF \epsilon_{th} = -EF\alpha(\bar{t} - t) = N_s(x) \quad (5-48)$$

في حالة ارتفاع درجة الحرارة تكون هذه القوة ضاغطة وفي حالة انخفاض درجة الحرارة فانها تكون قوة شادة . اما قيمة الاجهادات الحرارية الثابتة على طول القضيب فتبلغ :

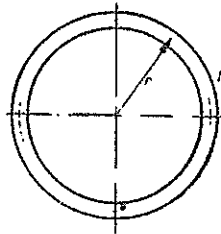
$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} = -E \epsilon_{th} = -E\alpha(\bar{t} - t) \quad (5-49)$$

والآن سوف تتم دراسة الحلقة الدائرية الرقيقة التي تبلغ مساحة مقطعها العرضي F والتي غيرت فيها درجة الحرارة (شكل 5.42) . بواسطة التغير الطولي الناتج عن التأثير الحراري الذي يقوم به كل عنصر قوسي ds وبالبالغ :

$$d\bar{s} - ds = \alpha (\bar{t} - t) ds$$

يتم تعيين التمدد الحلقي الحراري (thermische Ringdehnung) :

$$\epsilon_{th} = \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 = \alpha (\bar{t} - t) \quad (5-50)$$



شكل 5.42

ومن هذه المعادلة وبالاستعانة بالمعادلة (5.41) يتم تعيين التغير القطري الحراري للحلقة (thermische Radiusaenderung) :

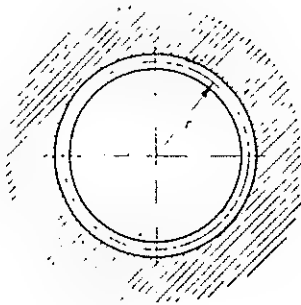
$$\Delta r = r \epsilon_{th} = r\alpha (\bar{t} - t) \quad (5-51)$$

بارتفاع درجة الحرارة تتسع الحلقة ($\Delta r > 0$) وبانخفاض درجة الحرارة تنقلص الحلقة ($\Delta r < 0$) وبالرغم من ذلك فان الحلقة تبقى خالية من الاجهاد (Spannungsfrei) . في حالة إعاقة الحلقة من القيام بالتمدد الحراري وذلك بواسطة الاستناد المتناظر دورانياً

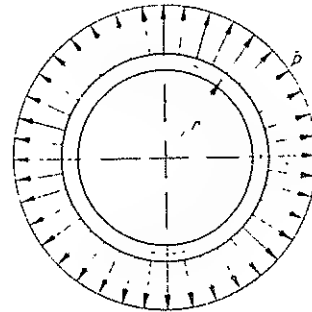
(rotationssymmetrische stützung) (شكل 5-43) عندئذ تتشكل فيها اجهادات حرارية .
لتعيينها سوف تفصل الحلقة عن الاستناد ثم تطبق عليها القوى الخطية \bar{p} ، التي تعتبر في البداية
مجهولة ، كردود افعال مساند (شكل 5-44) .

بسبب بقاء قطر الحلقة ثابتاً ، ينبغي ان يتعادل تغير القطر الناتج عن تأثير التغير الحراري :

$$\Delta r = r \alpha (\bar{t} - t) = r \epsilon_{th}$$



شكل 5-43



شكل 5-44

مع تغير القطر (التغير القطري) الناتج عن تأثير ردود افعال المساند \bar{p} . بما ان القوة \bar{p}
تؤدي ، حسب العلاقة (5 39) ، الى تشكل القوة الحلقية (قوة الحلقة Ringkraft) :

وحسب العلاقة (5-41 b) الى تغير القطر :

$$\frac{\bar{p} r^2}{EF} = \frac{\bar{N} r}{EF}$$

لذلك ينبغي تحقيق الشرط الهندسي التالي :

$$r \epsilon_{th} + \frac{\bar{N} r}{EF} = 0$$

ان الحلقة المدروسة هي بالفرض رقيقة الجدار ولذلك لا يؤثر تطبيق المحسولة الخطية \bar{p} سواء
كان على الجدار الخارجي ام على الجدار الداخلي ام على محور الحلقة ، على النتائج .

في حالة اعاقاة التمدد الحراري (الانفعال الحراري) عندئذ تتشكل القوة الحلقية التالية :

$$\bar{N} = - EF \epsilon_{th} = - EF \alpha (\bar{t} - t) \quad (5-52)$$

وكذلك الاجهاد الحراري الآتي :

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} = - E \varepsilon_{th} = - E \alpha (\bar{t} - t) \quad (5-53)$$

مثال 60 :

وضعت مسكة حافلة مصنوعة من الفولاذ ($E=2100,0 \text{ Mp cm}^{-2}$, $\alpha = 0,000 012 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) مقطوعا العرضي ثابت $F = 62,48 \text{ cm}^2$ ، تحت تأثير تغير حراري $\bar{t}-t = 40^\circ\text{C}$.
المطلوب : تعيين القوة الناعمية والاجهاد التي تتشكل في المسكة عندما توثق من كلا طرفيها .

الحل :

بواسطة العلاقة (5 47) يتم تعيين القوة الناعمية :

$$\bar{N} = 2100,0 \cdot 62,48 \cdot 0,000 012 \cdot 40 = 62,980 \text{ Mp}$$

وبواسطة العلاقة (5.48) يتم ايجاد اجهادات الشد :

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} = - E \varepsilon_{th} = - E \alpha (\bar{t} - t)$$

$$\bar{\sigma} = 2100,0 \cdot 0,000 012 \cdot 40 = 1,008 \text{ Mp cm}^{-2}$$

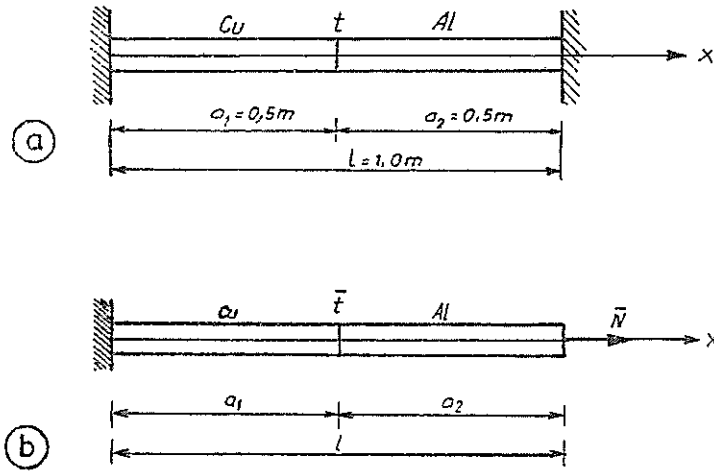
مثال 61 :

يتألف قضيب مقطعه العرضي ثابت $F=100,0\text{cm}^2$ على طوله (شكل a 5-45) حتى المسافة a_1 من النحاس ($E_1=720,0 \text{ Mp cm}^{-2}$, $\alpha_1=0,000017 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) وحتى المسافة a_2 من الالمنيوم ($E_2=1300,0 \text{ Mp cm}^{-2}$, $\alpha_2=0,000024 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) . ترفع درجة حرارة القضيب من $t = 20^\circ\text{C}$ حتى $\bar{t} = 80^\circ\text{C}$.
المطلوب : تعيين القوة الناعمية التي تتشكل في القضيب .

الحل :

يفصل القضيب عن المسند الايمن (شكل b 5-45) ثم يؤثر عليه برد الفعل \bar{N} الذي ينبغي ان يتم تعيينه بالاستعانة بشرط بقاء طول القضيب ثابتاً .

يبلغ انتقال نهاية القضيب، الناتج عن تأثير الحرارة ، القيمة التالية :



شكل 5-45

$$u(l) = \alpha_1 (\bar{t} - t) a_1 + \alpha_2 (\bar{t} - t) a_2 = (\bar{t} - t) (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$$

أما انتقالها الناتج عن تأثير رد فعل المسند \bar{N} فيبلغ :

$$\bar{u}(l) = \frac{\bar{N} a_1}{E_1 F} + \frac{\bar{N} a_2}{E_2 F} = \frac{\bar{N}}{F} \left(\frac{a_1}{E_1} + \frac{a_2}{E_2} \right)$$

لوجوب انعدام مجموع الانتقالين :

$$u(l) + \bar{u}(l)$$

يتم التوصل لشرط الهندسي التالي :

$$(\bar{t} - t) (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + \frac{\bar{N}}{F} \left(\frac{a_1}{E_1} + \frac{a_2}{E_2} \right) = 0$$

من هذه العلاقة ينتج :

$$\bar{N} = -F \frac{E_1 E_2}{E_1 a_2 + E_2 a_1} (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) (\bar{t} - t)$$

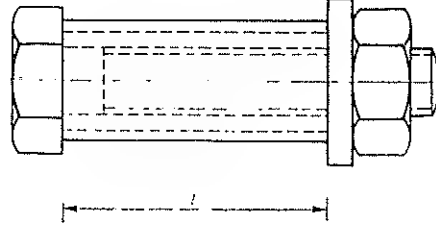
من أجل المعطيات العددية للمسألة ينتج :

$$\bar{N} = -114,0 \text{ Mp}$$

مثال 62 :

محيط برغي فولاذي ($\alpha_1 = 0,000\,012\,^{\circ}\text{C}^{-1}$, $E_1 = 2100,0\,\text{Mp cm}^{-2}$) بغلاف نحاسي ($\alpha_2 = 0,000017\,^{\circ}\text{C}^{-1}$, $E_2 = 720,0\,\text{Mp cm}^{-2}$) (شكل 5-47) . ان كلا الجزئين يكونا عند درجة الحرارة $t = 20\,^{\circ}\text{C}$ عديما الاجهاد) .

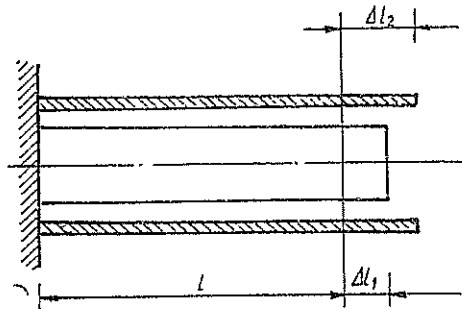
المطلوب : تعيين الاجهادات التي تؤثر في جسم البرغي الفولاذي وكذلك في الحافة النحاسية وذلك عندما تسخن المجموعة حتى الدرجة $\bar{t} = 80\,^{\circ}\text{C}$.



شكل 5-47

الحل :

لتعيين الاجهادات المطلوبة سوف يتخيل فك (حل) الصامولة بحيث تستطيع المجموعة من الاستطالة بشكل حر . نتيجة للتغير الحراري الذي يبلغ $\bar{t} = t$ فان الغلاف النحاسي سوف يقوم باستطالة اكبر من الاستطالة التي يقوم بها البرغي الفولاذي . بما ان فعل الصامولة يعاكس التمدد الطولي الحر للغلاف لذلك فان الغلاف سوف يحمل على الضغط اما جسم البرغي فانه سوف يحمل على الشد .



شكل 5-48

سوف يرمز للقوة التي تضغط الغلاف والتي تشد البرغي بالحرف X . بذلك فان التغير الطولي لكلا الجزئين (شكل 5-48) يأخذ القيم التالية :

$$\Delta l_1 = \alpha_1 (\bar{t} - t) l + \frac{X l}{E_1 F_1}$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 (\bar{t} - t) l - \frac{X l}{E_2 F_2}$$

لوجوب انعدام مجموع الانتقاليين ، يتم التوصل من العلاقة التالية :

$$\alpha_1 (\bar{t} - t) l + \frac{X l}{E_1 F_1} = \alpha_2 (\bar{t} - t) l - \frac{X l}{E_2 F_2}$$

للقوة المطلوبة :

$$X = (\alpha_2 - \alpha_1) (\bar{t} - t) \frac{E_1 E_2 F_1 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

وبواسطتها يتم تعيين الاجهادات المطلوبة :

$$\sigma_1 = \frac{X}{F_1} , \quad \sigma_2 = - \frac{X}{F_2}$$

من اجل المعطيات العددية للمسألة ينتج :

$$X = 0,341 \text{ Mp} , \quad \sigma_1 = 0,107 \text{ Mp cm}^{-2} , \quad \sigma_2 = - 0,179 \text{ Mp cm}^{-2}$$

مثال 63 :

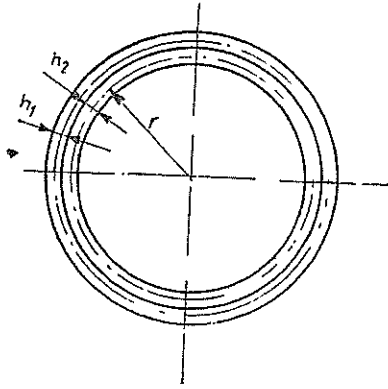
تسخين حلقة نحاسية (E_1 , α_1) سماتها h_1 حتى درجة الحرارة τ يستطاع حينئذ بكل حرية زلقها (مع وجود فراغ صغير جداً) على حلقة فولاذية (E_2 , α_2) قطرها r وسماتها h_2 ودرجة حرارتها t (شكل 5-49) .

ان لكلا الحلقتين نفس العرض وهو b .

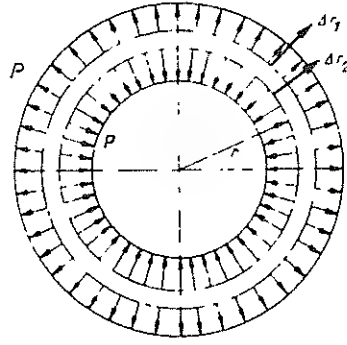
المطلوب : تعيين الاجهادات التي تتشكل في كلا الحلقتين ، عندما تصبح درجة الحرارة في الحلقة النحاسية τ وفي الحلقة الفولاذية \bar{t} .

الحل :

بما ان $\alpha_1 > \alpha_2$ فان الحلقتين سوف تنكمش على بعضها اثناء التبريد . لتكن القوة الخطية التي تمدد الحلقة النحاسية وتقلص الحلقة الفولاذية هي \bar{p} (شكل 5.50) .



شكل 5.49



شكل 5-50

بواسطة العلاقة التالية :

$$r + \frac{1}{2} (h_1 + h_2) \approx r$$

يتم الحصول على تغير القطر (التغير القطري) :

$$\Delta r_1 = \alpha_1 (\bar{\tau} - \tau) r + \frac{\bar{p} r^2}{E_1 b h_1} , \Delta r_2 = \alpha_2 (\bar{t} - t) r - \frac{\bar{p} r^2}{E_2 b h_2}$$

لوجوب بقاء الحلقة متصلتين مع بعض اثناء التغير الحراري فان الشرط الهندسي يأخذ الشكل التالي :

$$\Delta r_1 = \Delta r_2$$

بتبديل تغيرات الاقطار في العلاقة السابقة ينتج :

$$\alpha_1 (\bar{\tau} - \tau) r + \frac{\bar{p} r^2}{E_1 b h_1} = \alpha_2 (\bar{t} - t) r - \frac{\bar{p} r^2}{E_2 b h_2}$$

ومنها يتم تعيين القوة الخطية :

$$\bar{p} = \frac{b h_1 h_2}{r} [- \alpha_1 (\bar{\tau} - \tau) + \alpha_2 (\bar{t} - t)] \frac{E_1 E_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \quad (5-54)$$

تبلغ القوى الطولية ما يلي :

$$N_1 = \bar{p} r ; N_2 = - \bar{p} r \quad (5-55)$$

أما الاجهادات فتبلغ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{b h_1} = \frac{\bar{p} r}{b h_1} ; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{b h_2} = - \frac{\bar{p} r}{b h_2} \quad (5-56)$$

من أجل المعطيات العددية للمسألة :

$$E_1 = 720,0 \text{ Mp cm}^{-2} ; \alpha_1 = 0,000017 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; \tau = 50^\circ\text{C} ; \bar{\tau} = 20^\circ\text{C}$$

$$E_2 = 2100,0 \text{ Mp cm}^{-2} ; \alpha_2 = 0,000012 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; t = 20^\circ\text{C} ; \bar{t} = 20^\circ\text{C}$$

$$r = 4,0 \text{ cm} ; h_1 = 0,5 \text{ cm} ; h_2 = 0,5 \text{ cm}, b = 5,0 \text{ cm}$$

يتم التوصل للنتائج التالية :

$$\bar{p} = 0,171 \text{ Mp cm}^{-1} , N_1 = 0,684 \text{ Mp} , N_2 = -0,684 \text{ Mp}$$

$$\sigma_1 = 0,273 \text{ Mp cm}^{-2} , \sigma_2 = -0,273 \text{ Mp cm}^{-2}$$

في حالة الحرارة المشتركة للحلقتين $c = \bar{\tau} = \bar{t} = c$ عندئذ يتم الحصول على القوة الخطية التالية :

$$p^* = \frac{b h_1 h_2}{r} [-\alpha_1 (c - \tau) + \alpha_2 (c - t)] \frac{E_1 E_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2}$$

عندما تختار :

$$c = \frac{\alpha_1 \tau - \alpha_2 t}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (5-57)$$

عندئذ تنعدم القوة الخطية p^* وبالإمكان في ذلك الحين فك (حل) الحلقتين عن بعض. تبلغ درجة الحرارة ، من أجل المعطيات العددية للمسألة $c = 122^\circ\text{C}$.

مثال 64 :

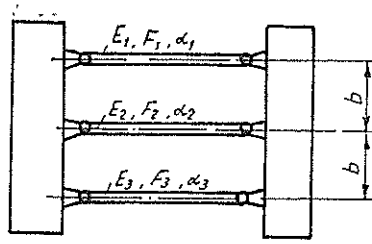
عرضت ثلاثة قضبان موثوقة من نهايتها بصفيحتين صلبتين الى تأثير تغير حراري مقداره

$$\Delta t = \bar{t} - t \quad (\text{شكل 5-51}) .$$

المعطى :

$$\Delta t , b , (E_3 , F_3 , \alpha_3) ; (E_2 , F_2 , \alpha_2) ; (E_1 , F_1 , \alpha_1)$$

المطلوب : تعيين الاجهادات الحرارية التي تتشكل في كل من القضبان .



شكل 5-51

الحل :

بالافتراض أن قوى القطع في القضبان كلها هي قوى شد ، عندئذ يأخذ شرط توازن القوى الشكل التالي :

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad (5-58)$$

بسبب اختلاف عوامل التمدد الحرارية للقضبان الثلاثة ، لذلك سوف تتشكل فيها إجهادات حرارية. تبلغ التمددات الكلية للقضبان ، القيم التالية :

$$\epsilon_1 = \epsilon_{1el} + \epsilon_{1th} = \epsilon_{1el} + \alpha_1 \Delta t$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_{2el} + \epsilon_{2th} = \epsilon_{2el} + \alpha_2 \Delta t$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_{3el} + \epsilon_{3th} = \epsilon_{3el} + \alpha_3 \Delta t$$

حيث أن :

$$\epsilon_{iel} = \frac{P_i}{E_i F_i}$$

تأخذ الشروط الهندسية الشكل التالي :

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$$

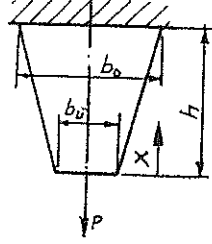
من هذه العلاقة يتم التوصل للمعادلة التي تساعد على تعيين المجاهيل . في حالة كون $F_1 = F_3$ ، $\alpha_1 = \alpha_3$ ، $E_1 = E_3$ ، عندئذ ينتج :

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}{\frac{1}{E_1} + \frac{2 F_1}{E_2 F_2}} = \sigma_3$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = \frac{-2 P_1}{F_2} = -2 \frac{F_1}{F_2} \sigma_1$$

مثال 65 :

المعطى : b_0, b_u, h والسماكة $d = \text{const}$ و P ، γ مقاسة بـ kp/cm^3 (شكل 5-52) .
المطلوب : تعيين الاجهاد σ وكذلك انتقال نقطة تطبيق القوة .



شكل 5-52

الحل :

مساحة المقطع العرضي للقضيب على ارتفاع x :

$$F(x) = d \left[b_u + \frac{x}{h} (b_0 - b_u) \right]$$

بتطبيق شروط التوازن على العنصر الحجمي ينتج :

$$\sigma(x) F(x) = \int_0^x \gamma F(\bar{x}) d\bar{x} + K = \gamma dx \left[b_u + \frac{x}{2h} (b_0 - b_u) \right] + K$$

شروط الطرف عند:

$$x = 0 : \sigma(0) F(0) = P = K$$

$$\sigma(x) = \frac{\frac{P}{d b_u} + \gamma x \left[1 + \frac{x}{2h} \left(\frac{b_0}{b_u} - 1 \right) \right]}{1 + \frac{x}{h} \left(\frac{b_0}{b_u} - 1 \right)}$$

بدون مكاملة يتم الحصول ، من أجل هذه الحالة البسيطة ، بتطبيق شرط التوازن على الجزء المتبقي من الجسم بعد الاقتران على ارتفاع x ، على نفس العلاقة :

$$\sigma(x) d \left[b_u + \frac{x}{h} (b_0 - b_u) \right] = P + \gamma \frac{x}{2} \left[b_u + b_u + \frac{x}{h} (b_0 - b_u) \right] d$$

٧٣٠ :

الانتقال :

$$\varepsilon = \frac{d \dot{V}_x}{dx} = \frac{d u}{d x} = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$V_x(x) = u(x) = \frac{1}{E} \int_0^x \sigma(\bar{x}) d\bar{x} + C = \frac{1}{E} \left\{ \frac{\gamma}{4} x^2 + \frac{h}{2 \left(\frac{b_o}{b_u} - 1 \right)} \right.$$

$$\left. \left[x \gamma + \frac{\frac{2 P}{d b_u} \left(\frac{b_o}{b_u} - 1 \right) - h \gamma}{\left(\frac{b_o}{b_u} - 1 \right)} \ln \left[1 + \frac{x}{h} \left(\frac{b_o}{b_u} - 1 \right) \right] \right] \right\} + C$$

شرط الاطراف :

$$V_x(x=h) = 0 :$$

$$C = -\frac{1}{E} \left\{ \frac{\gamma}{4} h^2 + \frac{h}{2 \left(\frac{b_o}{b_u} - 1 \right)} \left[\gamma h + \frac{\frac{2 P}{d b_u} \left(\frac{b_o}{b_u} - 1 \right) - h \gamma}{\frac{b_o}{b_u} - 1} \ln \frac{b_o}{b_u} \right] \right\}$$

انتقال نقطة تطبيق القوة :

$$V_x(0) = C$$

مثال 66 :

حملت اسطوانتان مفرغتان (Hohlzylinder) ، وضعت احدهما داخل الاخرى بحيث أخذتا وضماً مركزيا وحصرتا بين صفيحة صلبة من جهة ومن الجهة الاخرى بين تربة صلبة ، بحمولة سطحية (شكل 5-53) .

المعطى : $q, l, E_1, E_2, r_1, r_2, h_1, h_2$.

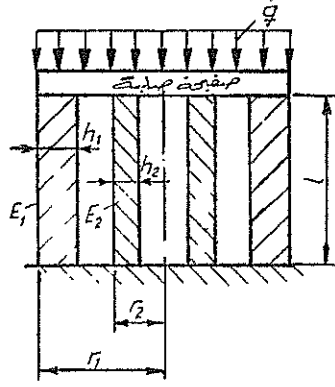
المطلوب :

حساب الاجهادات في الاسطوانتين والتقاصر Δl .

الحل :

الاجهادات :

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{P_2}{F_2}$$



شكل 5-53

حيث أن :

$$F = \pi r_1^2$$

$$F_i = \pi r_i^2 - \pi (r_i - h_i)^2 = \pi h_i (2 r_i - h_i) \quad ; \quad i = 1 \quad ; \quad 2$$

شرط التوازن :

$$P_1 + P_2 + q F = 0$$

شرط التمدد :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{P_1}{E_1 F_1} = \frac{P_2}{E_2 F_2} \quad (\text{قانون هوك})$$

وبذلك ينتج :

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{F_1} = - q r_1^2 \frac{E_1}{E_1 h_1 (2 r_1 - h_1) + E_2 h_2 (2 r_2 - h_2)}$$

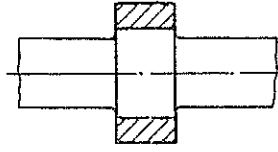
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F_2} = \sigma_1 \frac{E_2}{E_1}$$

التقاصر :

$$\Delta l = l \varepsilon = l \frac{\sigma_1}{E_1} = l \frac{\sigma_2}{E_2}$$

مثال 67 :

تنطبق حلقة نحاسية (E_1, α_1) ، تبلغ درجة حرارتها $t_1 = 100^\circ\text{C}$ ، بدقة على محور فولاذي (Stahlwelle) درجة حرارته $t_2 = 20^\circ\text{C}$ (شكل 5-54) .



شكل 5-54

المعطى :

$$\alpha_1 = 16 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$E_1 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ kp/cm}^2$$

$$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$E_2 = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ kp/cm}^2$$

المطلوب : تعيين

١ - الاجهادات التي تتشكل في الحلقة النحاسية وذلك عندما تبرد الحلقة حتى الدرجة 20°C .

٢ - الاجهادات التي تتشكل في الحلقة النحاسية وذلك عندما تبرد المجموعة (الحلقة والمحور) حتى الدرجة 0°C .

٣ - درجة الحرارة المشتركة t_3 التي ينفك عند بلوغها الرباط بين الحلقة والمحور .

الحل :

للتماس الدائم بين الحلقة (1) والمحور (2) لذلك ينبغي أن تكون التمددات في كلا الجزئين متساوية $\epsilon_1 = \epsilon_2$. بالامتعانة بالعلاقة التالية :

$$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{th}$$

(حيث أن ϵ_{el} هو التمدد المرن وأن ϵ_{th} هو التمدد الحراري وأن ϵ هو التمدد الكلي) . وبعد إهمال التمدد المرن للمحور ($\epsilon_{2el} \approx 0$) ينتج :

$$\frac{\sigma_1}{E_1} + \alpha_1 \Delta t_1 - \alpha_2 \Delta t_2 = 0$$

- ١

$$\Delta t_1 = \bar{t} - t_1 = (20 - 100)^\circ \text{C} ; \Delta t_2 = \bar{t} - t_2 = 0$$

$$\sigma_1 (20^\circ\text{C}) = 1408 \text{ kp/cm}^2$$

- ٢

$$\Delta t_1 = \bar{t} - t_1 = (0 - 100)^\circ\text{C} ; \Delta t_2 = \bar{t} - t_2 = (0 - 20)^\circ\text{C} = -20^\circ\text{C}$$

$$\sigma_1 (0^\circ\text{C}) = 1496 \text{ kp/cm}^2$$

٣ - من العلاقة التالية :

$$\sigma_1 (t_3) = 0$$

يُستج :

$$\alpha_1 (t_3 - t_1) = \alpha_1 (t_3 - t_2) ; t_3 = 340^\circ\text{C}$$

العنصر الثاني

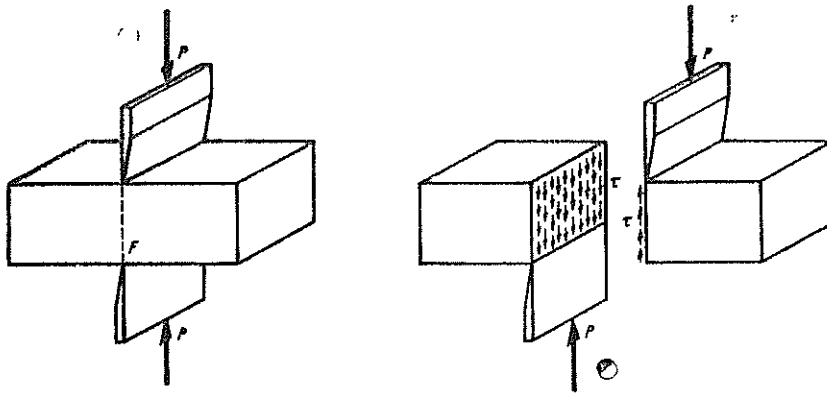
التحميل على القص

SCHUBBEANSPRUCHUNGEN

٦ - ١ الاجهادات في حالة التحميل على القص

(Spannungen bei Schubbeanspruchungen)

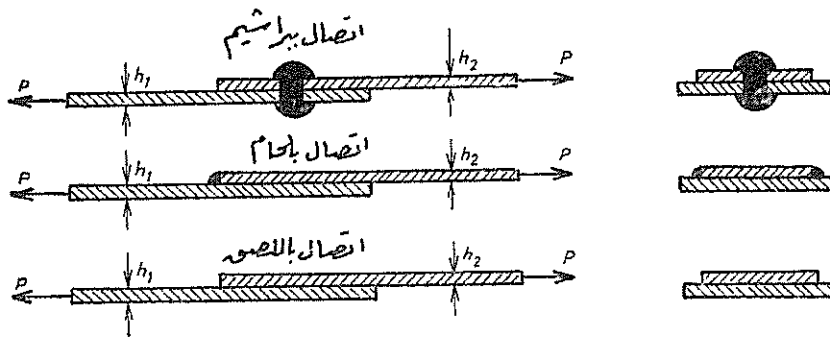
يقال عن المقطع العرضي لقضيب F أنه محملاً على القص ، عندما يؤثر عليه ، على سبيل المثال ، قاطعين (حدين) متقابلين (شكل 6-1) . في ذلك الحين تظهر (تشكّل) على مسطوح المقطع ، بشكل اساسي ، اجهادات مماسية تقوم بحصلتها بتحقيق التوازن مع القوة المؤثرة P (شكل 6-2) . لظهور اجهادات ناظرية في المقطع العرضي تنشأ في القضيب حالة اجهاد فراغية معقدة ، لكن الاجهادات الناظرية المذكورة صغيرة جداً اذا ما قورنت مع الاجهادات المماسية τ ولذلك يمكن اهمالها .



شكل 6-1

شكل 6-2

تظهر في الحياة العملية الهندسية امثال هذه الاجهادات المماسية في الوصلات (الاتصالات) بواسطة البرشمة (البراشيم) وبواسطة اللحيم وبواسطة اللاصق (شكل 6-3) . ان كل عنصر سطحي dF ، من السطح F المحمل بواسطة القوة P على القص ، يتحمل القوة τdF الواقعة فيه (شكل 6-4) ، وبذلك يأخذ شرط توازن القوى باتجاه القوة المؤثرة الشكل التالي :



شكل 6-3

$$P - \int_F \tau \, dF = 0$$

لعدم التمكن من اعطاء اية معلومات عن شكل توزيع الاجهاد المماسي τ الموجود على سطح القص F ، لذلك سوف يفترض ان الاجهادات المماسية تتوزع على السطح F بشكل منتظم وبقيمة تساوي القيمة الوسطية τ_0 وبهذا فان شرط التوازن السابق يأخذ الشكل التالي :

$$P - \tau_0 \int_F dF = 0$$



شكل 6-4

من هذه العلاقة يتم تعيين القيمة الوسطية للاجهاد المماسي :

$$\tau_0 = \frac{P}{F} \quad (6.1)$$

عندما يكون الاجهاد المماسي المسهوح τ_{zul} معلوماً فان الكشف عن الاجهاد يأخذ الشكل التالي :

$$\frac{P}{F} \leq \tau_{zul} \quad (6.2)$$

اما عندما تكون القوة الخارجية P معطاة والاجهاد المماسي المسموح معلوما فإن سطح القص اللزج (erforderliche Scherflaeche)، الذي ينبغي اثناء التصميم عدم تخليه ، يحسب بواسطة علاقة التصميم التالية :

$$\text{erf } F \geq \frac{P}{\text{zul } \tau} \quad (6-3)$$

اذا كان سطح المقطع العرضي F والاجهاد المماسي المسموح $\text{zul } \tau$ معطيين ، عندئذ يتم ، حسب العلاقة (6-2) ، الحصول على القوة المسموحة $\text{zul } p$ التي يستطيع سطح القص المعطى تحملها وهي :

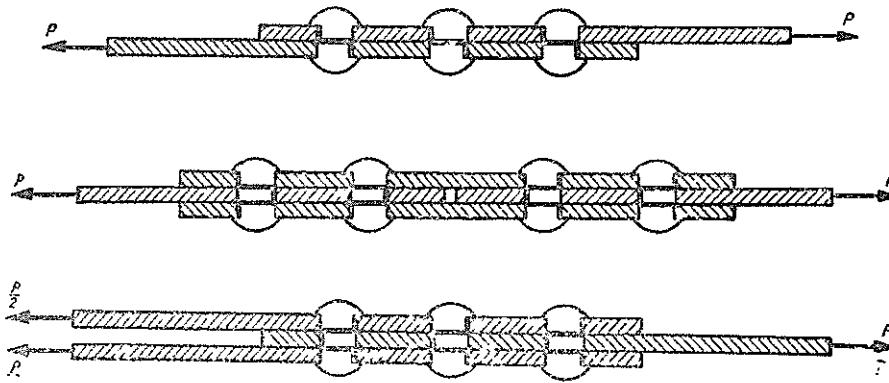
$$\text{zul } P \leq F \cdot \text{zul } \tau \quad (6-1)$$

وبذلك يتم تعيين تحمل الوصلة (Tragfaehigkeit der Verbindung) .

في حالة الوصل (الربط) بواسطة البراشيم (شكل 6-3) تتشكل على سطوح التماس بين جسم البرشيم وبين الصفائح ، علاوة على الاجهادات المماسية ، اجهادات حافة الثقب . فاذا كان d هو قطر البرشيم وكانت $\min h$ هي أصغر سماكتي الصفيحتين المترابطتين ، فإن الكشف عن اجهادات حافة الثقب يتم حسب العلاقة (5-25) . ومن اجل ذلك تصلح العلاقة التالية :

$$\frac{P}{d \cdot \min h} \leq \text{zul } \sigma_L \quad (6-5)$$

تجرى (تؤخذ) الوصلات بالبراشيم إما بقطع واحد (einschnittig) (شكل 6-5 a) أو بقطعين (zweischnittig) (شكل 6-5 b,c) أو بمدقة قطوع . ولقد تم رسم سطوح القص وسطوح حافة الثقب بخطوط غامقة (شكل 6-5) .



شكل 6-5

في الحساب تعوض مساحة القص للوصلات بالبراشيم بقطع واحد كما يلي :

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \quad (6.6)$$

أما مساحة القص للوصلات بالبراشيم بقطعين فتعوض كالتالي :

$$F = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (6.7)$$

إذا احتوت الوصلة (الاتصال) بالبراشيم على n برشيماً عندئذ يفترض ان القوة P تتوزع على البراشيم بانتظام وبذلك تبلغ مساحة سطح القص من اجل الوصلة بقطع واحد ، القيمة التالية :

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} \quad (6.8)$$

ومن اجل الوصلة بقطعين فلها تبلغ :

$$F = n \cdot 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (6.9)$$

اما من اجل الكشف عن اجهادات خافة الثقب فان السطح:

$$n d \cdot \min h$$

هو المقياس .

٦ - ٢ أمثلة

مثال 68 :

يراد اجراء ثقب قطره $d = 2,0 \text{ cm}$ في صفيحة سهاكتها $h = 0,5 \text{ cm}$ (شكل 6-6) .
المطلوب : تعيين قيمة القوة P التي ينبغي تطبيقها على المثقب وذلك عندما يبلغ

$$\tau_B = 4.0 \text{ Mp cm}^{-2}$$

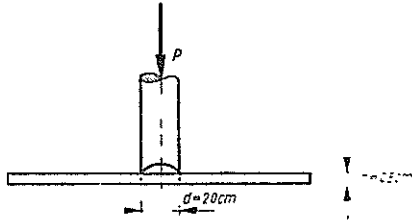
الحل :

بالاستعانة بمساحة السطح الذي ينبغي قصه :

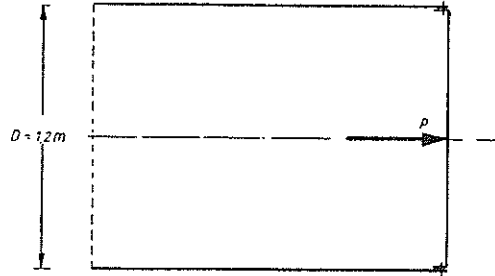
$$F = n h \pi = 2,0 \cdot 0,5 \cdot \pi = 3,14 \text{ cm}^2$$

وبواسطة اجهاد الكسر τ_B ، يتم تعيين القوة المطلوبة :

$$P \geq F \cdot \tau_B = 3,14 \cdot 4,0 = 12\,57 \text{ Mp}$$



شكل 6-6



شكل 6-7

مثال 69 :

يثبت قعر مرجل مبرشم قطره $D=1,20 \text{ m}$ بمئة برشيم ($n=100$) بقطع واحد ($d=1,6 \text{ cm}$) .
يسيطر على المرجل ضغط اضافي مقداره $q=10,0 \text{ kp/cm}^2$ (شكل 6.7) .

المطلوب : حساب الاجهادات المماسية في البراشيم وحساب اجهاد حافة الثقب الاعظمي وذلك
عندما تكون اصغر مساهكة للصفائح في المجموعة الموصولة $h=1,0 \text{ cm}$.

الحل :

تبلغ القوة المؤثرة على قعر المرجل القيمة التالية :

$$P = \frac{\pi D^2}{4} q = \pi \frac{120,0^2 \cdot 10,0}{4 \cdot 10^3} = 113,1 \text{ Mp}$$

اما مساحة السطح الذي ميتم فيه القص فتساوي :

$$F = n \frac{\pi d^2}{4} = 100 \pi \frac{1,6^2}{4} = 201,1 \text{ cm}^2$$

بواسطة العلاقة (6-1) يتم حساب الاجهاد المماسي :

$$\tau_o = \frac{113,1}{201,1} = 0,562 \text{ Mp cm}^{-2}$$

بالاستعانة بالمعادلة التالية :

$$n d \min h = 100 \cdot 1,6 \cdot 1,0 = 160,0 \text{ cm}$$

وباستخدام العلاقة (6-5) يتم تعيين اجهاد حافة الثقب :

$$\sigma_1 = \frac{113,1}{160,0} = 0,707 \text{ Mp cm}^{-2}$$

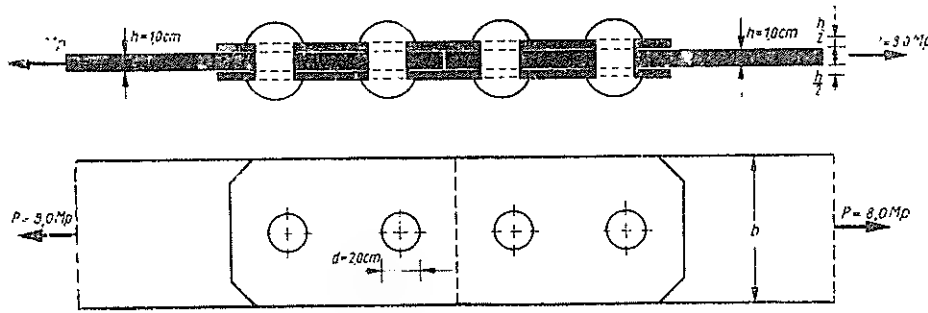
مثال 70 :

يراد ربط صفيحتين رقيقتين من الفولاذ ، سماكة كل منهما $h=1,0 \text{ cm}$ بواسطة براشيم قطر كل منها $d=2,0 \text{ cm}$ (شكل 6-8) .

المعطى :

$$\text{zul } \sigma_L = 2,0 \text{ Mp cm}^{-2} , \text{ zul } \tau_0 = 1,4 \text{ Mp cm}^{-2} , \text{ zul } \sigma = 1,4 \text{ Mp cm}^{-2}$$

المطلوب : تعيين عرض الصفيحة الفولاذية الواجب اختياره وكذلك تعيين عدد البراشيم اللازم وذلك عندما تكون القوة التي يلزم نقلها هي $P=8,0 \text{ Mp}$.



شكل 6 8

الحل :

بواسطة العلاقة (5.10) يتم تعيين مساحة المقطع العرضي للصفيحة الرقيقة المشدودة :

$$\text{erf } F \geq \frac{8,0}{1,4} = 5,71 \text{ cm}^2$$

ومنها يتم التوصل للعرض الكافي للصفائح الفولاذية :

$$\text{erf } b \geq \frac{5,71}{1,0} + 2,0 = 7,71 \text{ cm}$$

تبلغ مساحة القص للبراشيم ، التي يبلغ عددها n برشيماً بقطعين ، القيمة التالية :

$$F = n 2 \frac{\pi d^2}{4} = n \pi \frac{2 \cdot 2,0^2}{4} = n \cdot 6,28 \text{ cm}^2$$

كما تبلغ المساحة الموجودة لسطح حافة الثقوب القيمة الآتية :

$$F = n d \cdot \min h = n \cdot 2,0 \cdot 1,0 = n \cdot 2,0 \text{ cm}^2$$

بالاستعانة بالقيم السابقة يتم من التصميم على القص الحصول على النتيجة التالية :

$$\text{erf } n \geq \frac{8,0}{1,4 \cdot 6,28} = 0,91$$

ومن التصميم من اجل حافة الثقب (Lochleibung) يتم الحصول على القيمة التالية :

$$\text{erf } n \geq \frac{8,0}{2,0 \cdot 2,0} = 2,0$$

بما ان عدد البراشيم الناتج عن اجهادات حافة الثقب هو الاكبر لذلك فهو المقياس وبذلك يلزم ترتيب برشيمين على كل طرف .

الفصل التاسع

الفتل الصافي

REINE TORSION

١-٧ مقدمة

يقال عن القضيب انه يحمل على الفتل عندما يخضع لتأثير عزمين متعاكسين في الاتجاه ويقعان في مستويين متوازيين ويدوران حول محور القضيب (ينطبق شعاع كل منهما على المحور الاوسط للقضيب) .

إذا لم تؤثر على القضيب أية قوى او عزوم علاوة على العزمين المذكورين فتسمى هذه الحالة بالفتل الصافي (reine Torsion) (شكل 7.1) .

بقطع قضيب ، يحمل على الفتل الصافي ، في أي مكان منه ، فان قيمة القطع الوحيدة الموجودة هناك هي عزم الفتل M_t فقط . فالفتل الصافي هو ذلك النوع من التحميل بحيث تظهر في المقاطع العرضية للقضيب عزوم فتل فقط اما بقية قيم القطع (عزوم الانعطاف ، القسوى الناعمة والعرضية) فتساوي الصفر . وينتج عن حادثة الفتل اجهادات مماسية τ محصلتها في المقطع العرضي الواحد من القضيب تساوي عزم الفتل الذي يؤثر هناك (شكل 7.1) .

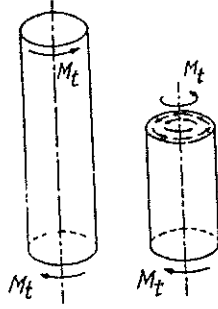
٧ - ٢ انواع الفتل :

يمكن تقسيم الفتل الى نوعين هما :

أ - الفتل الاقصري (فتل ده سانت فينانت) .

(zwangsfreie — oder ST, VENANT sche Torsion)

في هذه الحالة يتم تطبيق عزمي الفتل على نهايتي القضيب حيث لا يمنع ولا يعاق أي مقطع عرضي من القضيب من ممارسة التغير الناتج عن تأثير هذا النوع من التحميل ، وخاصة الانتقال الطولي الذي تقوم به محاور القضيب (والتي تسمى في بعض المراجع آليات القضيب) الموازية للمحور الاوسط (تسمح إذاً للمقاطع العرضية في أية نقطة من القضيب من القيام بالتشوه) . اما توزيع الاجهاد المماسي τ في كافة المقاطع العرضية للقضيب فهو نفسه كما ان الاجهادات الناعمة في كافة المقاطع العرضية معدومة (المقاطع العرضية لا تحتوي اذاً الا على



شكل 7.1

اجهاد مماسي فقط) . ان التشوه الذي يطرأ على المقاطع العرضية لا علاقة له في هذا النوع من الفتل بالاحداثي الطولي الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب (المحور x) .

ب - الفتل القسري (قتل قوة التشوه) (zwaengungs—oder Woelbkrafttorsion)

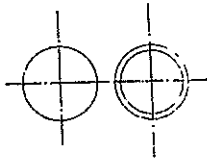
في هذا النوع من الفتل اما ان يتم تطبيق عزمي الفتل M_t على نهايتي القضيب ؛ تماما كالحالة السابقة ، باختلاف واحد وهو ان الانتقال الطولي الذي تقوم به محاور القضيب الموازية للمحور الاوسط سوف يعاق وذلك بواسطة اقراص صلبة توضع على كل من نهايتي القضيب مثلاً او سوف يمنع بواسطة تصميمات انشائية (يمنع التشوه على سبيل المثال بواسطة الوثاقة ؛ فالمقطع العرضي الموثوق غير قادر على التشوه) او ان يتم تطبيق عزمي الفتل في أية مقاطع عرضية من القضيب لا تنطبق على نهايتيه (وهنا تتم اعاقا تشوه المقاطع العرضية . تتم اعاقا تشوه المقاطع العرضية الواقعة عند نقاط تطبيق عزوم قتل وحيدة وذلك لان الانفتالات (Verwindung) على طرفي نقطة تطبيق العزم الوحيد مختلفة ونتيجة لها فان التشوهات هناك مختلفة ايضاً) . في حالة الفتل القسري يختلف توزيع الاجهاد المماسي بين المقاطع العرضية للقضيب كما تتولد فيها (في المقاطع العرضية) اجهادات ناظمية (اذاً يحتوي المقطع العرضي الواحد في نفس الوقت على اجهاد ناظمي σ واجهاد مماسي τ) كما وان تشوه المقاطع العرضية هو تابع للاحداثي x ايضاً (الاحداثي الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب) . تؤدي اعاقا او منع التشوه في المقاطع العرضية الرقيقة (رقيقة الجدران) وخاصة في المقاطع العرضية رقيقة الجدران المفتوحة الى زيادة مقاومة المقطع العرضي للفتل زيادة كبيرة .

٧ - ٣ انواع المقاطع العرضية من وجهة نظر الفتل

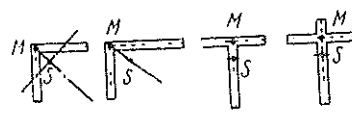
تقسم المقاطع العرضية من وجهة نظر الفتل الى نوعين وهما :

أ - المقاطع العرضية عديمة التشوه (Woelffreie Querschnitte) :
وهي المقاطع العرضية التي تبقى بعد القتل مستوية ، أي أنها تدور ككل وكقرص صلب وهي تضم مجموعة المقاطع العرضية التالية :

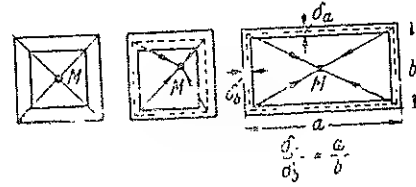
- آ - ١ الدائرة الملية والحلقة الدائرية (شكل 7.2) .
آ - ٢ المقاطع العرضية المفتوحة ، التي تتألف (تتركب) من مستطيلين رقيقين والتي تتلاقى خطوطها الوسطية في نقطة واحدة (شكل 7.3) .
آ - ٣ المقاطع العرضية المفرغة رقيقة الجدران التي تتألف (تتركب) جوانبها من مستطيلات رقيقة وذلك عندما تتلاقى المحصلات ، الناتجة عن تمثيل عرض المستطيلات كقوى ، في نقطة واحدة (شكل 7.4) .



شكل 7.2

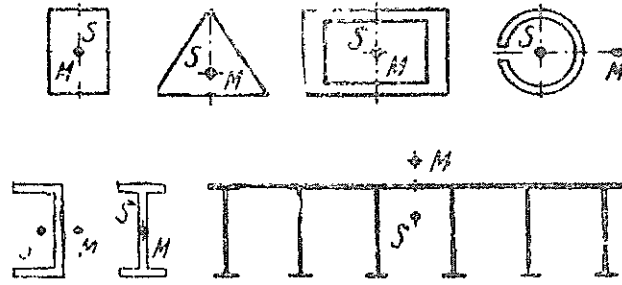


شكل 7.3



شكل 7.4

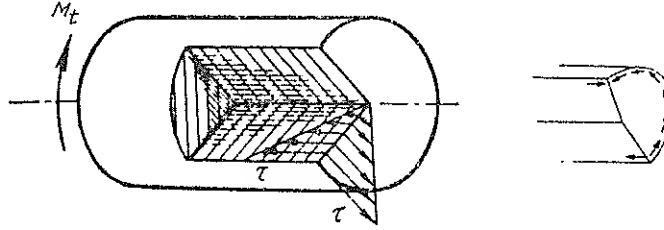
ب - المقاطع العرضية المشوهة (Nicht Woelffreie Querschnitte)
تضم هذه المجموعة كافة المقاطع العرضية التي لم يرد لها ذكر في الحالات السابقة (شكل 7.5)



شكل 7.5

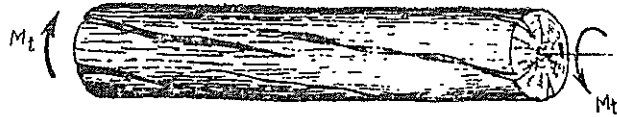
ستقتصر الدراسة في هذا الكتاب على قتل القضبان الموشورية (هذا يعني القضبان المستقيمة التي لا يتغير مقطعها العرضي على طول القضيب اما شكل المقطع العرضي فيمكن ان يكون كيفياً كأن يكون مستطيلاً او مربعاً او دائرة والخب) كما ستقتصر الدراسة على القتل اللاقشري، حيث يسمح للمقاطع العرضية بالتشوه بحرية كاملة (قتل صافي) . ينبغي ان تتألف الحموله المؤثرة على

نهايتي القضيب من عزمين متعاكسين M_t فقط . بما ان السطح المغلف (Mantelflaeche) للقضيب هو بالفرض دائماً خال من الاجهادات وبسبب ازدواج الاجهادات المماسية (على مسيل المثال $\tau_{zx} = \tau_{xz}$) لذلك ينبغي ان تكون الاجهادات المماسية الموجودة على حافة المقطع العرضي (بالقرب من المحيط) مماسية على المنحني المغلف . من شرط الازدواج ينتج ايضا ان اجهادات مماثلة تظهر في المقاطع الطولية للقضيب (شكل 7.6) .



شكل 7.6

يكشف اختبار النماذج الخشبية على الفتل عن وجود هذه الاجهادات ، وهي تصبح خطرة عندما تكون متانة الانزلاق (مقاومة الانزلاق) للمادة بالاتجاه الطولي أضعف منها بالاتجاه العرضي كما هو الحال في الخشب وهي السبب هناك في حادثة الانكسار (للمقارنة انظر حالة الاجهاد المستوية وحالة التشوه المستوية) . فكما يعلم ان للخشب من ناحية المرونة والمتانة صفات متباينة باتجاه الالياف الخشبية او عمودياً عليها . كما انه ضعيف المتانة (المقاومة) على الانزلاق باتجاه الالياف الخشبية (على طول الالياف الخشبية) لهذا فان تحطم النموذج الخشبي في حالة فتله يبدأ بتشكيل الشقوق الطولية (شكل 7.7)



شكل 7.7

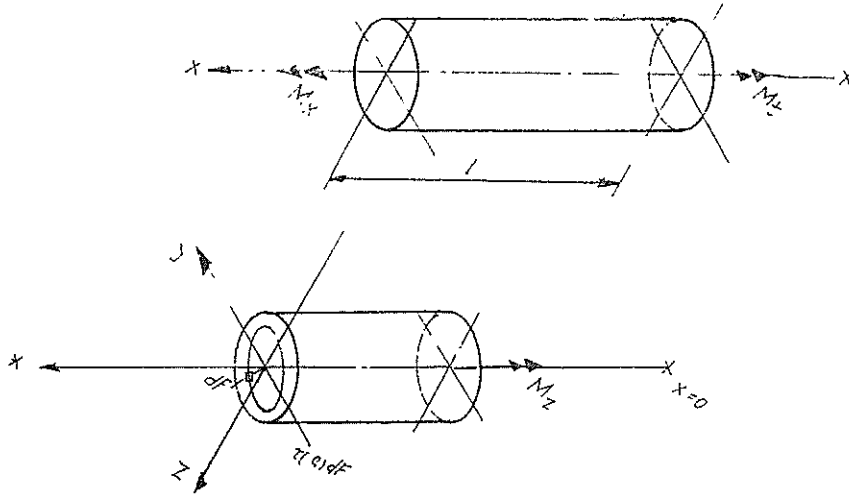
تتطلب دراسة القضيب المحمل على الفتل حل المسألتين الاساسيتين التاليتين :

- ١ - تعيين الاجهادات التي تظهر في القضيب .
- ٢ - تعيين التغيرات الزاوية .

تحل هاتان المسألتان بصورة مختلفة وذلك حسبها يكون شكل المقطع العرضي . ان ابسط حل يكون في حالة المقطع العرضي الدائري والقضبان رقيقة الجدران .

٧ - ٤ فتل القضبان الاسطوانية الدائرية (Torsion kreiszyllindrischer staebe)

ليكن المقطع العرضي للقضيب الموشوري المدروس هو دائرة او حلقة دائرية . وليكن القضيب المذكور محملاً عند نهايتيه بعزمي الفتل M_x (شكل 7.8a) . يتألف التشوه (Deformation) في امثال هذا القضيب من دوران المقاطع العرضية . $x = \text{const}$ أما إنتقال محور القضيب فهو معدوم (اي ان المقاطع العرضية تدور وكأنها قرص صلب) . ان الهدف من الدراسة التالية هو تعيين الاجهادات ودورانات المقاطع العرضية المتشككة نتيجة تأثير عزوم الفتل M_x . للقيام بدراسه سلوك القضبان في الفتل سوف يفصل القضيب عند النقطة x الى جزئين (شكل 7.8 b) . يعدل اضطراب التوازن الناتج عن القطع عندما تكون محصلة الاجهادات الموجودة في المقطع العرضي معدومة وعندما يشكل العزم المحصل الناتج عنها مع عزم الفتل M_x حالة التوازن (يتساوى العزم المحصل للاجهادات المماسية مع عزم الفتل عند نقطة القطع) .



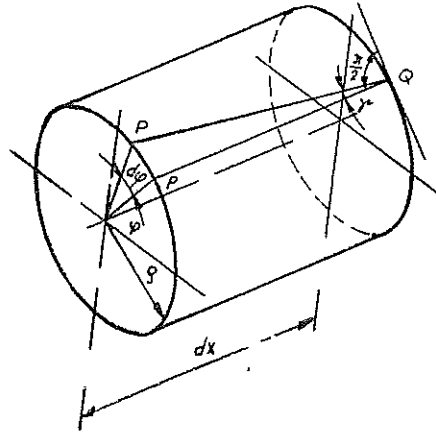
شكل 7.8 a

شكل 7.8 b

سوف يفترض بأن كل مقطع عرضي $x = \text{const}$ ، يحتوي فقط على اجهادات مماسية τ (فتل صافي) . تتعلق هذه الاجهادات فقط من البعد ρ للعنصر السطحي dF عن محور القضيب وعلاوة على ذلك فهي تتجه مماسية على الدائرة . $\rho = \text{const}$. لانعدام الاجهادات الاناظرية فان شروط توازن القوى بالاتجاهات x , y , z وكذلك شروط توازن العزوم بالنسبة للمحور (حول المحور) z , y هي محققة من البداية . اما شرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x فهو :

$$M_x - \int_F \rho \tau(\rho) dF = 0 \quad (7-1)$$

لاتكفي شروط التوازن المذكورة وحدها لتعيين توزيع الاجهاد المماسي $\tau = \tau(\rho)$ بشكل معين (eindeutig) ولذلك فان هذه المشكلة هي مشكلة غير مقررة ستاتيكيًا . للتمكن من حلها ينبغي ، كما في حالة الشد / الضغط ، اللجوء للخبرة . تؤكد التجارب بان المقطع العرضي الدائري والحلقي الدائري يبقى اثناء تحميل القضيب المستقيم على الفتل مستويا (اي انه يدور كقطعة واحدة وكأنه قرصاً صلباً) . بذلك فان كل النقاط التي كانت قبل التغير موجودة على المستقيم $\varphi = \text{const}$ ، تتواجد ، في حالة التغير على المستقيم $\varphi + d\varphi = \text{const}$ وان النقطة P من الدائرة $\rho = \text{const}$ تتحول الى النقطة P' في نفس الدائرة (شكل 7.10) . يتحول المحور QP الموجود على عنصر قضبي مقتطع طولياً من القضيب ، بعد التغير الى QP' .



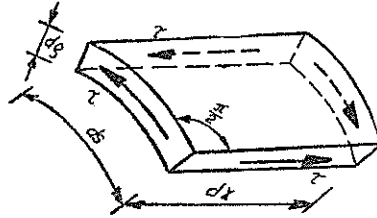
شكل 7-10

تدور المقاطع العرضية التي تبعد عن بعضها مسافة dx نسبياً بالزاوية $d\varphi$. لقد كان أول من استعمل فرضية بقاء المقاطع العرضية ، في الاسطوانات الدائرية المحملة على الفتل ، مستوية بعد الفتل هو العالم كولومب (COULOMB) . ولقد حذا العالم نافير (NAVIER) حذوه بتطبيق هذه الفرضية على قضبان ذات مقاطع عرضية كيفية . لكن التجارب والابحاث التي تمت فيما بعد أثبتت عدم صحة ذلك وأكدت ان فرضية كولومب (التي تسمى في كثير من المراجع بفرضية نافير) لاتصلح إلا من أجل المقاطع العرضية الدائرية والحلقية الدائرية (المقاطع العرضية عديدة التشوه) فقط . لهذا السبب تعتبر مشاكل الفتل في القضبان ذات المقاطع العرضي الدائري والحلقي الدائري هي ابسط دراسات الفتل . فيما بعد سوف تتم معالجة ذلك وبجته بالتفصيل .

تؤثر ، حسب الفرض ، على السطوح الجانبية للعنصر القشري غير المتغير قائم الزوايا ، ذو

الأبعاد dx , ds , $d\rho$ الاجهادات المماسية τ (شكل 7.11) . تقوم هذه الاجهادات بتشويه العنصر ، بحيث تعاني الزاوية القائمة تغيراً زاوياً مقداره γ ولصغر التغيرات يمكن الكتابة :

$$\tan \gamma \approx \gamma$$



شكل 7-11

من الشكل (7-10) يستطاع ، بعد الامتناعة بالعلاقة السابقة ، قراءة العلاقة التالية :

$$\overline{PP'} = \rho d\varphi = \gamma dx$$

التي تمثل طول القوس $\overline{PP'}$. من العلاقة السابقة يمكن التوصل للعلاقة التالية :

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (7-2)$$

حيث ان γ هي التشوه (Verzerrung) (زاوية الانزلاق أو زاوية القص) وان $d\varphi$ هي زاوية القتل (Torsionswinkel) . كما يمكن من العلاقة السابقة التوصل للعلاقة التالية :

$$d\varphi = \gamma \frac{dx}{\rho} \quad (7-3)$$

يسمى الاختصار

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} \quad (7-4)$$

بالانقتال النوعي أو زاوية القتل النسبية

(Spezifische Verdrehung, bezogener Drillwinkel)

يعطي قانون هوك للاجهادات المماسية :

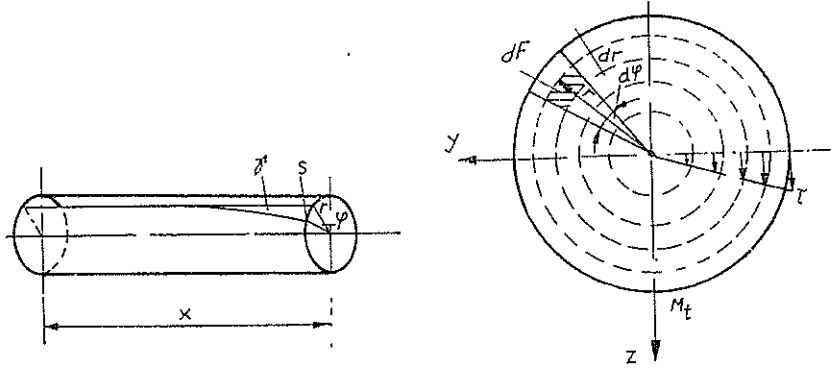
$$\tau = G \cdot \gamma \quad (7-5)$$

العلاقة التي تربط بين زاوية الانزلاق γ وبين الاجهاد المماسي τ . حيث ان G هو عامل القص أو عامل الانزلاق (Gleit—oder Schubmodul) .

بالاستعانة بالعلاقات (7.2) ، (7.4) ، (7.5) يتم الحصول على الاجهاد المماسي :

$$\tau = G \rho \frac{d\phi}{dx} = \oint G \rho \quad (7.6)$$

بما ان حاصل القسمة التفاضلي $d\phi/dx$ من اجل اي مقطع عرضي $x = \text{const}$ ، هو ثابت لذلك فان الاجهادات المماسية تتعلق (تتبع) من ρ خطياً (تتوزع الاجهادات المماسية على طول نصف القطر r خطياً) كما ان خطوط الاجهادات المماسية (Schubspannungslinien) (الخطوط التي تعطي في كل نقطة من المقطع العرضي اتجاه الاجهاد المماسي الموجود هناك) هي عبارة عن دوائر مركزية (شكل 7.12) .



شكل 7.12

بتبديل العلاقة (7.6) في شرط التوازن (7.1) يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$M_x = \int_F \rho \tau(\rho) dF = G \frac{d\phi}{dx} \int_F \rho^2 dF = G \oint \rho^2 dF \quad (7.7)$$

اما التكامل المطحي الذي يظهر في العلاقة السابقة فيمثل عزم العطالة القطبي بالنسبة للمحور المركزي (المحور المار من مركز الثقل) :

$$I_p = \int_F \rho^2 dF$$

وهو يبلغ من اجل الدائرة :

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

ومن اجل الحلقة الدائرية :

$$I_p = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}$$

وبذلك يمكن الحصول من العلاقة (7.7) على عزم القتل :

$$M_x = G I_p \frac{d\phi}{dx} = G I_p \theta \quad (7.8)$$

او ايضاً على الانفتال (Verwindung) :

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_x}{G I_p} \quad (7.9)$$

حيث ان $G I_p$ هي صلابة القتل (Torsionssteifigkeit). ينبغي التنويه الى ان صلابة القتل بشكل عام هي $G I_t$ حيث ان I_t هو عزم عطالة القتل والذي يساوي في المقاطع العرضية الدائرية والحلقة الدائرية فقط لعزم العطالة القطبي . وعلى العموم فان :

$$I_t \leq I_p \quad (7.10)$$

أما عزم عطالة القتل لمقطع عرضي فلا يمكن حسابه بالوسائل الاولى بل يتم الحصول عليه بحل المعادلة التفاضلية لتابع الاجهاد التي سيتم التنويه عنها اثناء دراسة قتل القضبان ذات المقطع العرضي الكيفي .

بكملة العلاقة (7.9) يتم تعيين زاوية الانفتال (Verdrehungswinkel) :

$$\phi(x) = \frac{M_x}{G I_p} x + c \quad (7.10b)$$

كتاب للاحداثي x . فيما بعد سوف يتم تعيين ثابت التكامل c .

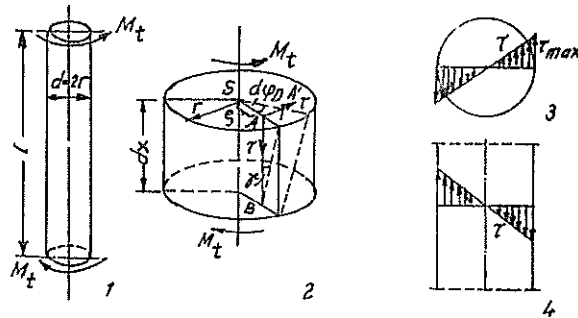
من اجل التوزيع الخطي للاجهاد المماسي الممثل في العلاقة (7.6) ، الذي كان العالم يونغ (YOUNG) هو اول من برهن عليه ، يتم الحصول ، بعد اعتبار العلاقة (7.9) على ما يلي :

$$\tau(\rho) = \frac{M_x}{I_p} \rho \quad (7.11)$$

(حيث ان $\tau(\rho)$ هو الاجهاد المماسي الموجود على بعد ρ عن محور الدوران) .

يبلغ الاجهاد المماسي قيمته العظمى عند الحافة الخارجية للمقطع العرضي $\rho=R$ (شكل 7.12 c) .
فهو يساوي في الدائرة ، بعد تبديل عزم العطالة القطبي بقيمته ، القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{M_x}{\frac{\pi R^4}{2}} R = \frac{M_x}{\frac{\pi R^3}{2}} \quad (7-12)$$

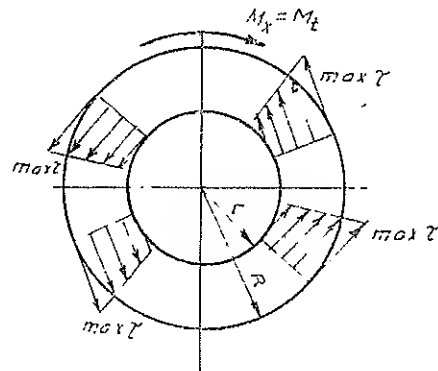


شكل 7.12 c

وفي الحلقة الدائرية فانه يأخذ ، بعد تبديل عزم العطالة بقيمته ، القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{M_x}{\frac{\pi (R^4 - r^4)}{2}} R = \frac{M_x}{\frac{\pi (R^4 - r^4)}{2 R}} \quad (7.13)$$

يوضح الشكل (7.13) توزيع الاجهاد المماسي في حلقة دائرية .



شكل 7.13

يتم الكشف عن الاجهاد (Spannungsnachweis) في الحلقة الدائرية بواسطة العلاقة الآتية :

$$\frac{M_x}{\frac{\pi (R^4 - r^4)}{2 R}} \leq \text{zul } \tau \quad (7-14)$$

وفي الدائرة ، حيث $r=0$ ، فهو يتم حسب العلاقة التالية :

$$\frac{M_x}{\frac{\pi R^3}{2}} \leq \text{zul } \tau \quad (7.15)$$

إذا كان عزم الفتل M_x والاجهاد المسموح $\text{zul } \tau$ معلومين ، عندئذ يستطاع حساب الابعاد اللازمة للمقطع العرضي . فمن أجل مقطع عرضي دائري يتم التوصل لعلاقة التصميم التالية :

$$\text{erf } R \geq \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \frac{M_x}{\text{zul } \tau}} \quad (7.16)$$

أما إذا كان المقطع العرضي والاجهاد المسموح معلومين عندئذ يستطاع تعيين عزم الفتل المسموح $\text{zul } M_x$. فمن أجل الحلقة الدائرية ينتج :

$$\text{zul } M_x \leq \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2 R} \text{zul } \tau \quad (7.17)$$

ومن أجل المقطع العرضي الدائري يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\text{zul } M_x \leq \frac{\pi R^3}{2} \text{zul } \tau$$

بهذه العلاقات يتم تعيين قدرة تحمل (قابلية تحمل Tragfaehigkeit) القضبان الاسطوانية الدائرية المحملة على الفتل .

من العلاقة (7-10b) ومن أجل قضيب يدور مقطعة العرضي الواقع عند البداية $x=a$ (Anfangsquerschnitt) بالزاوية $\varphi(a)$ (شكل 7-14) يتم تعيين الثابت c :

$$\varphi(a) = \frac{M_x}{G I_p} a + c$$

ومنها ينتج :

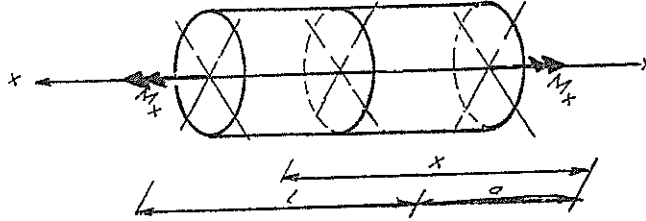
$$c = \varphi(a) - \frac{M_x}{G I_p} a$$

وبهذا يتم تعيين الدوران المتبادل (gegenseitige Verdrehung) للمقاطع العرضية عند x, a :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \frac{M_x}{G I_p} (x - a) \quad (7-17b)$$

حسب هذه العلاقة فإن المقاطع العرضية لنهايتي القضيب الذي يبلغ طوله l تقوم بالدوران المتبادل:

$$\varphi(l+a) - \varphi(a) = \Delta\varphi = \frac{M_x l}{G I_p} \quad (7-17c)$$

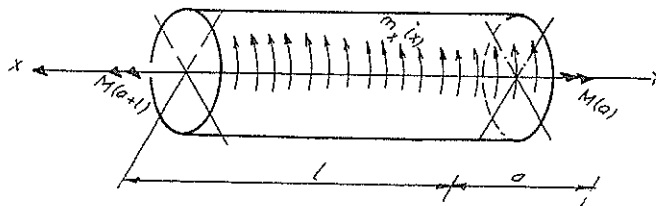


شكل 7.14

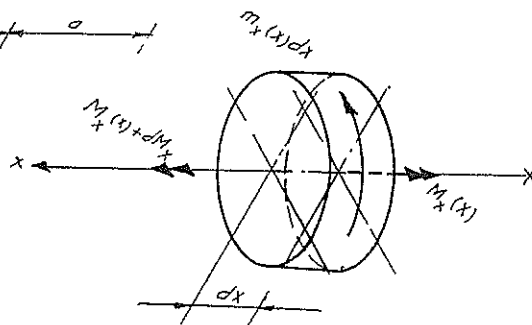
إذا أثر على طول القضيب عزم القتل $M_x(x)$ المنسوب على واحدة الطول (عزم القتل الموزع) والذي يتغير بتغير x بشكل طفيف (شكل 7.15) عندئذ تشكل في العنصر المقتطع من القضيب والذي يبلغ طوله dx وهو صغير قدر الامكان ، عزم القتل $M_x(x)$ ، $M_x(x+dx) \approx M_x(x) + dM_x(x)$ التي تحقق مع العزم الخارجي $m_x(x) dx$ حالة التوازن ، بحيث ينتج :

$$M_x(x) + dM_x(x) - M_x(x) + m_x(x) dx = 0$$

من هذه العلاقة يتم التوصل المعادلة التفاضلية :



شكل 7-15



شكل 7-16

$$\frac{dM_x(x)}{dx} = - m_x(x) \quad (7-18)$$

وبالكاملة ينتج :

$$M_x(x) = - \int m_x(x) dx + k \quad (7-19)$$

في الحالة المقررة ستاتيكيًا يستطاع ، بواسطة شروط الاطراف العائدة لعزم الفتل M_x ، تعيين ثابت التكامل k بشكل معين .

بواسطة عزم الفتل $M_x(x)$ الذي اصبح من الآن فصاعد معلوماً يتم تعيين الاجهاد المماسي تبعاً للعلاقة (7-11) وذلك بواسطة العلاقة التالية :

$$\tau(x, \rho) = \frac{M_x(x)}{I_p} \rho \quad (7-20)$$

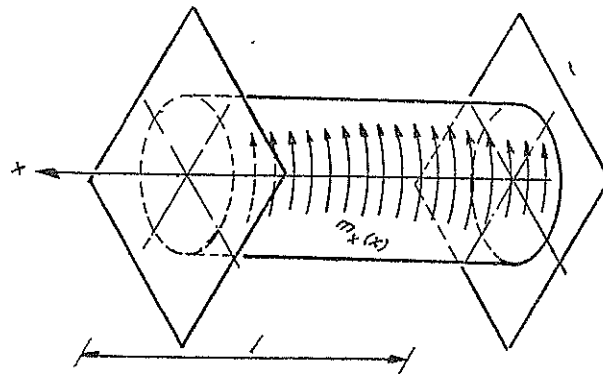
والدورانات تبعاً للعلاقة (7-9) من خلال المعادلة الآتية :

$$\varphi(x) = \int \frac{M_x(x)}{G I_p} dx + c \quad (7-21)$$

وذلك بشكل تقريبي .

لتعيين الدورانات $\varphi(x)$ في حالة الامتناد غير المقر مستاتيكيًا للقضيب (شكل 7-17) سوف يلجأ لاشتقاق العلاقة (7-9) وبذلك يتم الحصول ، في حالة كون M_x متغيراً على ما يلي :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \frac{1}{G I_p} \frac{dM_x(x)}{dx}$$



شكل 7-17

وبتبديل العلاقة (7-18) فيها يتم التوصل للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = - \frac{m_x(x)}{G I_p} \quad (7-22)$$

بالمكاملة المتكررة ينتج :

$$G I_p \frac{d\varphi(x)}{dx} = - \int m_x(x) dx + c_1 \quad (7-23)$$

$$G I_p \varphi(x) = - \int dx \int m_x(x) dx + c_1 x + c_2$$

من شروط الوثاقفة :

$$\varphi(x=0) = 0 ; \quad \varphi(x=l) = 0$$

يستطاع تعيين ثابتي التكامل c_1, c_2 . وبهذا يتم تعيين الدوران $\varphi(x)$ وكذلك أيضاً عزم الفتل :

$$M_x(x) = G I_p \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (7-24)$$

بشكل معين .

مثال 71 :

تؤثر على النهاية الحرة لقضيب اسطواناني دائري الشكل وموثوق من طرف واحد ، عبر قرص قطره a ، مزدوجة قوى (شكل 7.18) .

المطلوب : تعيين الاجهاد المماسي الاعظمي $\max \tau$ ودوران القرص $\Delta \varphi$.

الحل :

يلغ عزم الفتل الثابت القيمة التالية :

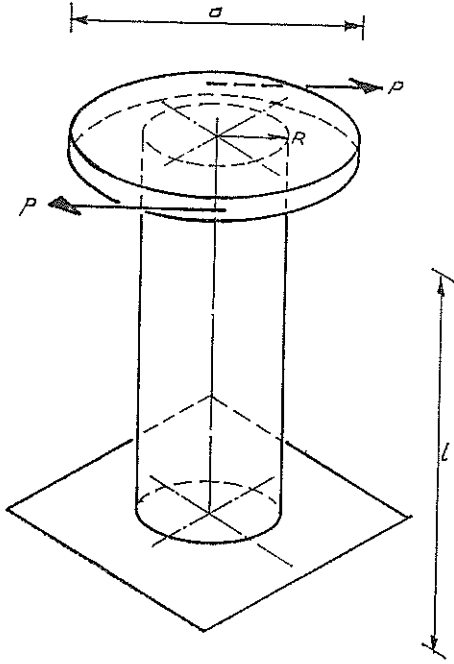
$$M_x = Pa$$

بتعويض $r=0$ يتم من العلاقة (7-12) تعيين الاجهاد المماسي الاعظمي :

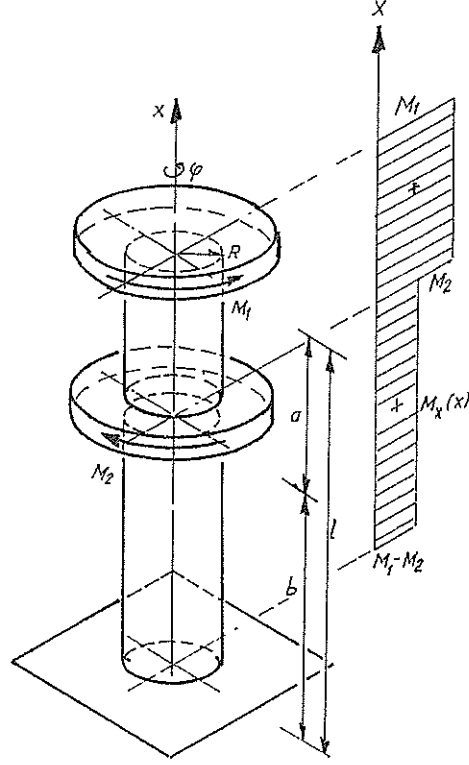
$$\max \tau = \frac{M_x}{\frac{\pi R^3}{2}} = \frac{2a}{\pi R^3} P$$

ومن العلاقة (7.17c) يتم تعيين دوران القرص :

$$\Delta\varphi = \frac{M_x l}{G I_p} = \frac{2 a l}{G \pi R^4} P$$



شكل 7.18



شكل 7.19

مثال 72 :

حمل قضيب اسطواناني دائري الشكل وموثوق من طرف واحد ، حسب الشكل (7.39) ،
بمزمين M_1 و M_2 .

المطلوب : حساب الاجهادات المماسية الاعظمية في القطوع الجزئية a و b من القضيب وكذلك دورانات الاقراص .

الحل :

لقد تم في الشكل (7.19) تمثيل توزيع عزوم القتل . بذلك يأخذ الاجهاد المماسي الاعظمي عند المقطع a القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{2 M_1}{\pi R^3}$$

وعند القطع b :

$$\max \tau = \frac{2 (M_1 - M_2)}{\pi R^3}$$

أما زوايا الدوران (زوايا الانفتال Drehwinkel) فتبلغ :

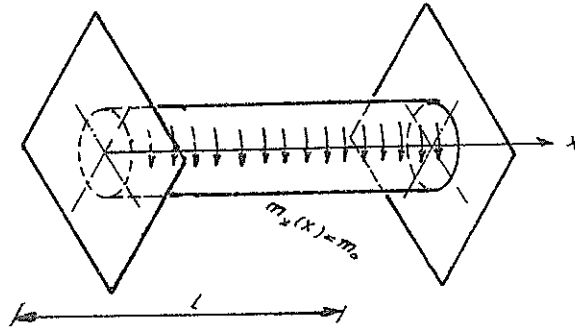
$$\varphi (l) = \frac{(M_1 - M_2) b}{G \frac{\pi R^4}{2}} + \frac{M_1 a}{G \frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2}{G \pi R^4} (M_1 l - M_2 b)$$

$$\varphi (b) = \frac{(M_1 - M_2) b}{G \frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2 b}{G \pi R^4} (M_1 - M_2)$$

مثال 73 :

حمل المحور الاسطواناني الدائري الشكل والموثوق من كلا طرفيه ، على طوله البالغ l بعزم قتل ثابت $m_x(x) = m_0$ (شكل 7.20) .

المطلوب : حساب الدوران (الانفتال) $\varphi (x)$ وعزم القتل $M_x(x)$.



شكل 7.20

الحل :

بكملة العلاقة التالية :

$$\frac{d^2 \varphi (x)}{dx^2} = - \frac{m_0}{G I_p}$$

يُنتج :

$$GI_p \frac{d\phi(x)}{dx} = -m_0 x + c_1 = M_x(x)$$

$$GI_p \phi(x) = -\frac{m_0 x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

بواسطة شروط الاطراف :

$$GI_p \phi(0) = 0 = c_2$$

$$GI_p \phi(l) = 0 = -\frac{m_0 l^2}{2} + c_1 l + c_2$$

يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$c_1 = \frac{m_0 l}{2}, \quad c_2 = 0$$

بحيث يتم ، بعد تبديلها في العلاقات السابقة ، الحصول على الدوران المطلوب :

$$\phi(x) = \frac{m_0 l^2}{2GI_p} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

و

$$M_x(x) = \frac{m_0 l}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

تبلغ عزوم الوتافة القيم التالية :

$$M_x(0) = \frac{m_0 l}{2} \quad , \quad M_x(l) = -\frac{m_0 l}{2}$$

يتشكل الدوران الاعظمي :

$$\max \phi = \frac{m_0 l}{8GI_p}$$

في منتصف القضيب .

٧ - ٥ فتل القضبان ذات المقطع العرضي الفطع ناقصي (على شكل قطع ناقص)

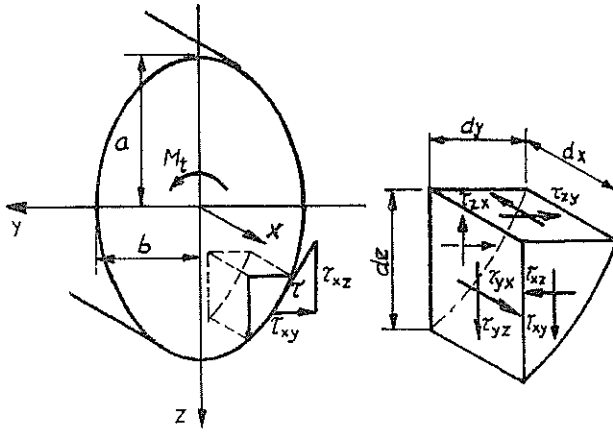
(Torsion elliptischer Querschnitte)

لقد لوحظ في الدائرة أن خطوط الاجهادات المماسية هي عبارة عن دوائر . ان محصلة الاجهاد

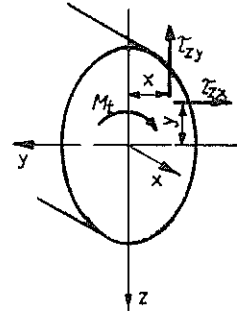
المماسي في أية نقطة من حافة القطع الناقص (محيط القطع الناقص) تأخذ اتجاه منحنى الحافة (أي أنها مماسية على منحنى الحافة) . ان الافتراض الذي يقول ان خطوط الاجهاد المماسي ليست فقط على الحافة بل كذلك داخل المقطع العرضي هي عبارة عن قطع ناقصة متمركزة (konvokale Ellipsen) هو الاقرب للواقع .

سيتمبدأ بتحقيق الاجهادات المماسية المرسومة في الشكل (7.2) لشرط توازن القوى باتجاه المحور x . تظهر في العنصر المقتطع من حافة القضيب ، اجهادات على سطوح المقطوع فقط ، اما السطح المغلف فهو خال من الاجهادات ، وبذلك ينتج :

$$\sum K_x = 0 : \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy = 0$$



شكل 7.21



شكل 7.22

او كذلك

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{yx}} = \frac{dz}{dx} \quad (7.25)$$

ان شرط توازن القوى على الحافة (على المحيط المغلف) هو في نفس الوقت شرط النهاية (شرط من شروط الاطراف) . تشير المعادلة (7.25) الى العلاقة الموجودة بين نسبة الاجهادات المماسية وبين زاوية التماس على القطع الناقص . بذلك ينبغي ان تكون محصلة الاجهاد المماسي مماسية على الحافة (اي ان تمس محصلة الاجهاد المماسي حافة المقطع العرضي) . من معادلة القطع الناقص :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (7.26)$$

يتم الحصول على زاوية التماس :

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{z} \quad (7.27)$$

بتبديل المعادلة (7.27) في شرط الطرف (7.22) ينتج :

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{yx}} = - \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{z} \quad (7-28)$$

وبذلك يستطاع ، بالاعتماد على الفرض الذي يقول ان خطوط الاجهاد المماسي هي قطوع ناقصة متمركزة ، كتابة ما يلي :

$$\tau_{zx} = Ca^2 y ; \tau_{yx} = - Cb^2 z \quad (7.29)$$

بالاستعانة بشرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x (بالنسبة لمركز ثقل المقطع العرضي) يمكن تعيين الثابت C (شكل 7.22) :

$$M_x = \iint_F (\tau_{zx} y - \tau_{yx} z) dx dy \quad (7.30)$$

بتعويض الاجهادات المماسية ، حسب العلاقة (7.29) في المعادلة (7.30) ينتج :

$$M_x = C \iint_F (a^2 y^2 + b^2 z^2) dF$$

وبالاستعانة بالتكاملات التالية :

$$I_{zz} = \int_F y^2 dF = \frac{\pi ab^3}{4} , \quad I_{yy} = \int_F z^2 dF = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

التي تمثل عزوم عطالة القطع الناقص فان العلاقات السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$M_x = C (a^2 I_{zz} + b^2 I_{yy}) \quad (7-31)$$

$$M_x = Ca^3 b^3 \frac{\pi}{2} \quad (7-32)$$

منها ينتج :

$$C = \frac{2 M_x}{\pi a^3 b^3} \quad (7.33)$$

وبذلك يتم من أجل الاجهادات المماسية ، الحصول على العلاقات التالية :

$$\tau_{zx} = \frac{2 M_x}{\pi b^3 a} y \quad , \quad \tau_{yx} = \frac{2 M_x}{\pi b a^3} z \quad (7.34)$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{2 M_x}{\pi a^3 b^3} \sqrt{b^4 z^2 + a^4 y^2}$$

تماما كما في الدائرة فان الاجهادات الاعظمية تظهر هنا ايضا على حافة القطع الناقص . يتوقع ان تظهر الاجهادات المماسية الاعظمية اما على اعرض حافة او على اضيق حافة من المقطع العرضي. للتأكد من ذلك سوف يصار لحساب الاجهادات المماسية هناك :

$$\tau (y = 0 , z = a) = \frac{2 M_x}{\pi b a^2} = \tau_1 \quad (7.35)$$

$$\tau (y = b , z = 0) = \frac{2 M_x}{\pi b^2 a} = \tau_2$$

بما ان $a > b$ فان $\tau_2 > \tau_1$ وهذا يعني ان :

$$\max \tau = \tau_2 = \frac{2 M_x}{\pi b^2 a} \quad (7.36)$$

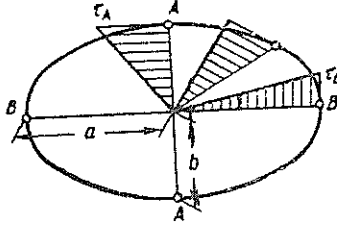
وبذلك فان الاجهاد المماسي الاعظمي يظهر في المكان ($y=b, z=0$) اي في اضيق منطقة من المقطع العرضي (شكل 7-23) . في الفقرات التالية سوف يصار لشرح هذه الحقيقة الهامة . بمقارنة العمل الخارجي (عمل القوى الخارجية) مع العمل الداخلي (عمل القوى الداخلية) الذي يقوم به العزم M_x عند تطبيقه على القضيب ببطيء ؛ يتم تعيين زاوية الدوران (زاوية الانفعال) φ .

عمل القوى الخارجية (شكل 7.24) :

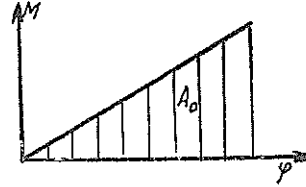
$$\Lambda_n = \frac{1}{2} M_x \cdot \varphi \quad (7.37)$$

عمل تغير الشكل النوعي (النسبي) الذي يقوم به التحميل على القص :

$$A_\tau = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (7.38)$$



شكل 7.23



شكل 7.24

بكمالة العلاقة السابقة على حجم القضيب يتم تعيين عمل تغير الشكل (Formaenderungsarbeit)

$$A_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (7.39)$$

ببديل العلاقة (7.34) في المعادلة الاخيرة يتبع :

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2G} \frac{4 M_x^2}{\pi^2 a^3 b^3} \int_V (b^4 z^2 + a^4 y^2) dV \\ &= \frac{1}{2G} \frac{4 M_x^2}{\pi^2 a^3 b^3} (b^4 I_{yy} + a^4 I_{zz}) \end{aligned} \quad (7.40)$$

لتساوي عمل القوى الخارجية (العمل الخارجي) وعمل القوى الداخلية (العمل الداخلي ، طاقة تغير الشكل) $A_i = A_e$ وبالمستعانة بالعلاقاتين (7.40) و (7.32) يتم الحصول على زاوية الدوران النوعية (زاوية الانفعال النوعية) ϑ :

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_x}{G} \quad (7.41)$$

بمقارنة هذه النتيجة مع التعريف :

$$\vartheta = \frac{M_x}{G I_t}$$

يتم تعيين عزم عطالة الفتل :

$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

وبالمناسبة فإن عزم العطالة القطبي للقطع الناقص هو :

$$I_p = \frac{\pi}{4} a b (a^2 + b^2)$$

بمقارنة العزمين يرى ان عزم العطالة القطبي اكبر من عزم عطالة الفتل . لقد تم الحصول على هذه النتيجة بعد الافتراض ان خطوط الاجهاد المماسي هي عبارة عن قطوع ناقصة متمركزة ، وهي تساوي نفس النتيجة التي يمكن الحصول عليها من نظرية سانت فينانت التي سوف يتم التنويه عنها في الفقرة التالية . وهذا يؤكد صحة الفرضيات التي تم استخدامها .

٧ - ٦ فتل القضبان ذات المقطع العرضي الكيفي

(Torsion von staeben mit beliebigem Querschnitt)

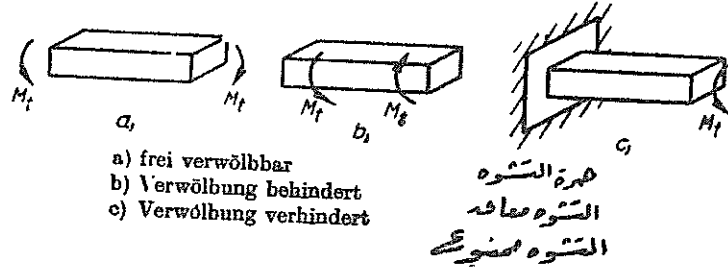
٧ - ٦ - ١ فتل سانت فينانت (سان فينان) (الفتل اللاقسري)

(SAINT VENANT sche oder Zwangsfrei Torsion)

لقد كانت اول نظرية عامة للفتل هي التي اوجدها العالم نافير (NAVIER) والتي اعتمد فيها على فرضية بقاء المقاطع العرضية مستوية ، التي إستعملت لحل مشكلة فتل القضبان ذات المقطع العرضي الدائري . لكن هذه النظرية لم تقف على قدميها طويلاً وذلك لانها تشير الى تناقض مع الحياة العملية والتجارب المخبرية . فبينما تشير تجارب الفتل إلى ان الانكسار يظهر فعلاً في أضيق منطقة من المقطع العرضي فان نظرية نافير تحتم ان تكون النقطة التي لها اكبر بعد عن مركز الثقل هي المكان الذي تظهر فيه الاجهادات المماسية الاعظمية . فعلى مسيل المثال تشير التجارب الجراة على المقطع العرضي مستطيل الشكل الى ان الانكسار يظهر مبتدأ من منتصف الاضلاع وخاصة من نقاط السطح المغلف (محيط المقطع العرضي) التي لها اقرب بعد عن محور القضيب . اما نتائج نظرية نافير فنشير الى ان الاجهادات المماسية الاعظمية تظهر ، عكس ذلك ، في النقاط التي لها اكبر بعد عن محور القضيب ، اي ان الانكسار حسب ذلك ينبغي ان يتبدأ من زوايا المستطيل وهذا غير صحيح .

لقد اكتشف العالم سانت فينانت الذي تتلمذ على يد إستاذة نافير ان السبب في هذا التناقض

يعود لاستخدام فرضية بقاء المقاطع العرضية ، ايضاً غير الدائرية والحلقية الدائرية ، مستوية بعد التغير وهذا غير صحيح . ولقد قام الاخير (سانت فينانت) بعد اكتشافه للسبب بتأسيس نظرية قتل القضبان ذات المقطع العرضي الكيفي حيث افترض فيها ان التشوه (Verwölbung) يتم بحرية كاملة (دون قسر، اي انه قتل لا قسري) (شكل 7,25) .



شكل 7-25

(a) حرية التشوه (frei verwoelbbar) .

(b) التشوه معاق (Verwoelbung behindert) .

(c) التشوه ممنوع (Verwoelbung verhindert) .

وفيما يلي سوف يتم بشكل مختصر شرح هذه النظرية .

بسبب فرضية تشكل التشوه بحرية كاملة (قتل لا قسري) فان الاجهادات المتشكلة في المقطع العرضي تقتصر على الاجهادات المماسية فقط (لا تظهر اجهادات ناظرية) . باستخدام تابع القتل (Torsionsfunktion) $\Phi = \Phi(y,z)$ يتم التوصل من شروط التوازن ومن معادلات التشوه (Deformationsgleichungen) ومن قانون هوك للمادة للمعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi = 1 \quad (7-42)$$

حيث ان

$$\tau_{yx} = -2 G \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial z} , \quad \tau_{zx} = +2 G \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (7-43)$$

تمثل العلاقة (7,42) معادلة بواسون التفاضلية (POISSONsche Differentialgleichung) . تعطي حقيقة كون الاجهادات المماسية على حافة المقطع العرضي ذات اتجاه مماسي على الحافة شرط الطرف التالي :

$$\Phi_c = \text{const.} \quad (7.44)$$

هذا يعني ان تابع الفتل Φ على حافة المقطع العرضي هو ثابت . يعاد حل مشكلة الفتل الى ايجاد الفتل Φ الذي يحقق داخل المقطع العرضي معادلة بواسون التفاضلية ومن ثم يحقق شرط كونه على الحافة ثابتاً .

٧ - ٦ - ٢ مطابقة الاغشية ومطابقة الجريان في السوائل

(Membrangleichnis und hydrostatisches Gleichnis)

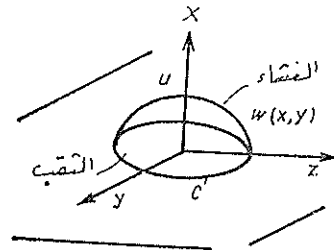
لقد لاحظ العلماء ان هناك تطابق رياضي كامل بين نظرية سانت فينانت (سان فينان) للقضبان المفتولة (القضبان المحملة على الفتل) وبين حالتين أخريتين من حالات الميكانيك أولهما الشكل الذي يأخذه الغشاء المرن والحمل تحميلاً منتظماً والذي يحتجز تحته الفراغ الناتج عن تغطيته لمنحني مستوي متلاق وثانيهما الجريان في السوائل .

مطابقة الاغشية (Membrangleichnis) أو مطابقة فقاعة الصابون (Seifenhautgleichnis) :

يحقق الغشاء المشدود (المنصوب ، الممدود ، الذي يغطي) على الفتحة ذات المنحني C (على سبيل المثال فقاعة الصابون التي تغطي الفتحة المذكورة) المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{p}{S} = \text{const.} \quad (7.45)$$

حيث أن $u(y,z)$ هو ترتيب سطح الغشاء و p هو الضغط الاضافي الذي يؤثر على الغشاء و S هي قوة الوثق الثابتة (die konstante Spannkraft) (شكل 7.26) .



شكل 7.26

ان المعادلة (7-45) هي معادلة بواسون التفاضلية . يحقق التابع $u(y,z)$ شرط الطرف التالي:

$$u(y, z) = C \quad (7.16)$$

بالاستعانة بما يلي :

$$\widehat{u} = - \frac{p}{S} \Phi \quad (7.17)$$

يتم التطابق بين مشكلة الفتل (7.42) و (7.14) وبين معادلة الاغشية (2-45) و (7.46) وذلك عندما يتطابق منحنى حافة الغشاء C مع منحنى حافة المقطع العرضي المحمل على الفتل C . عندئذ يتم الحصول من اجل الاجهادات المماسية على العلاقات التالية :

$$\tau_{yx} = \frac{2 G \Phi S}{p} \frac{\partial u}{\partial z} , \quad \tau_{zx} = \frac{2 G \Phi S}{p} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.48)$$

من هذه العلاقات يرى ان الاجهادات المماسية تتناسب مع ميل قبة الغشاء (Membranhügel) أما صلابة الفتل (Torsionssteifigkeit) فتبلغ القيمة التالية :

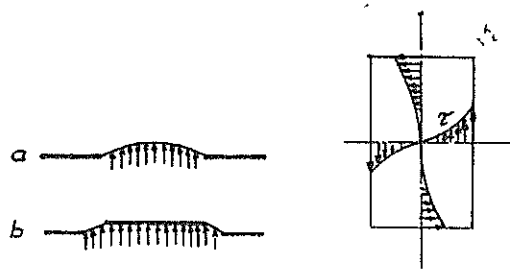
$$G I_t = \frac{4 G S}{p} V \quad (7.49)$$

حيث أن V هو الحجم المحتجز داخل القبة الغشائية .

عملياً يصنع في صفيحة مستوية ثقب له نفس شكل المقطع العرضي الفتول ثم يغطي هذا الثقب بغشاء رقيق ومرن ، على مسيل المثال بفقاغة من الصابون (شكل 7.27) بعد ذلك يشكل على احدي جهتي الصفيحة ضغطاً بسيطاً بحيث ينتفخ الغشاء أخذاً شكل قبة مسطحة (flache Membranhügel) .

بعد القيام بتلك العمليات يلاحظ ان خطوط طبقات الارتفاع (Höhenschichtlinien) للقبة الغشائية تتطابق مع خطوط الاجهادات المماسية . كما يتطابق الميل على القبة (ميل القبة) ، اي كثافة خطوط طبقات الارتفاع ، في مكان ما مع قيمة الاجهاد المماسي هناك . وأخيراً فان الحجم المحجوز بين القبة الغشائية وبين مستوي المقطع العرضي يتناسب مع مقاومة المقطع العرضي للفتل I_t . تسمح هذه المطابقة أيضاً بإيجاد توزيع الاجهاد المماسي تجريبياً . وهي تعود للعالم براندل (PRANDTL) .

من ناحية أخرى تستعمل كلا المطابقتين للحصول على بعض نقاط الارتكاز بشأن توزيع الاجهاد المماسي بصورة سريعة . وبذلك يتم دون صعوبة الحصول على المعلومات اللازمة عن شكل توزيع

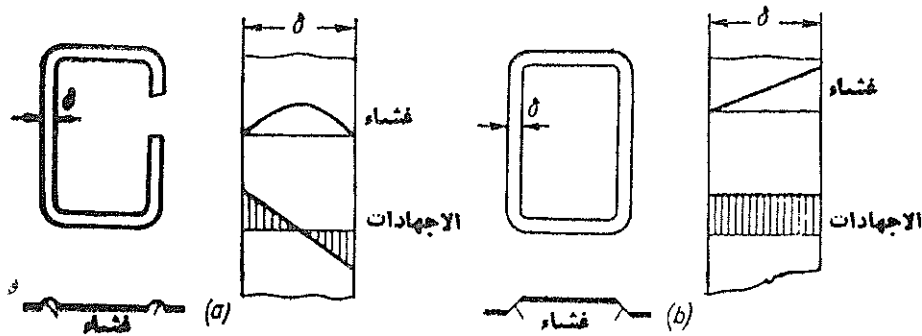


شكل 7.27

شكل 7.28

الاجهادات المماسية في المقاطع العرضية . فعلى سبيل المثال ينبغي ان يكون توزيع الاجهاد المماسي في المستطيل كما هو ممثل في الشكل (7.28) .

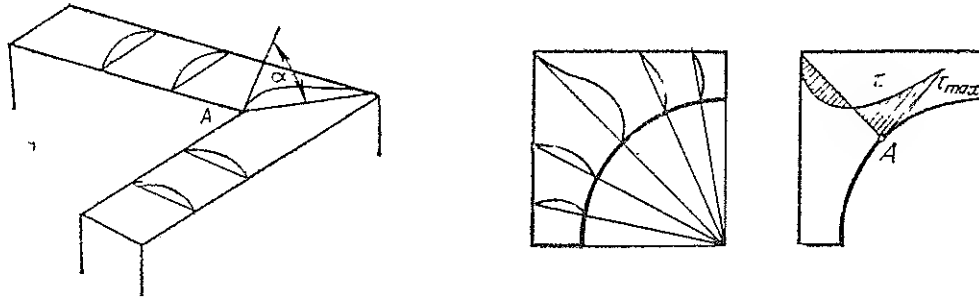
من اجل المقاطع العرضية المفرغة (Hohlquerschnitte) كما هو الحال في الانابيب والمقاطع العرضية الصندوقية ينبغي تعديل مطابقة الاغشية قليلاً وذلك بأن يجعل الجزء الذي يمثل الثقب في الصفيحة اعلى بقليل من الحافة الخارجية للمقطع العرضي (شكل 7.27 b) . يتبين في المقاطع العرضية المفتوحة ان الميل الاعظمي للقبة الغشائية يتشكل عند حافتي المقطع العرضي الداخلية والخارجية (شكل 7.29 a) . يغير ميل القبة الغشائية اتجاهه (وبالاحرى اشارته) عند منتصف سماكة الجدار . وبدرجة متناهية في الدقة يمكن الافتراض ان توزيع الاجهاد المماسي على سماكة الجدار هو خطي (وبمعنى آخر ان تغير ميل المماس على القبة هو خطي) (شكل 7.29 a) .



شكل 7.29

اما في المقاطع العرضية المغلقة فان ميل القبة (ميل المماس على القبة الغشائية) على سماكة الجدار لا يغير اتجاهه (الميل ثابت) وهذا يعني ان توزيع الاجهاد المماسي على سماكة الجدار

ثابتاً (شكل 7.29 b). تشير الاشكال (7.30a,b,c) الى شكل الغشاء والى توزيع الاجهاد المماسي لبعض المقاطع العرضية .



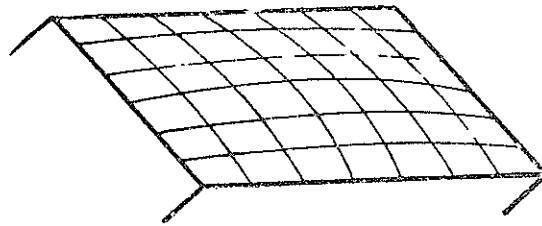
شكل 7.30

مطابقة الجريان في السوائل (Hydrodynamische Gleichnis) :

للتطابق الموجود بين مشكلة القتل وبين جريان السوائل ايضاً فلقد تم تأسيس مايسمى بمطابقة جريان السوائل . تشير هذه المطابقة الى ان خطوط الاجهادات المماسية (Schubspannungslinien) تتطابق مع خطوط الجريان (Stromlinien) في السوائل المستقرة (الموضعية) (stationaeren Flüssigkeitsstroemung) ذات الكمية الثابتة التي تدور في اناء له شكل المقطع العرضي للقضيب المفتول .

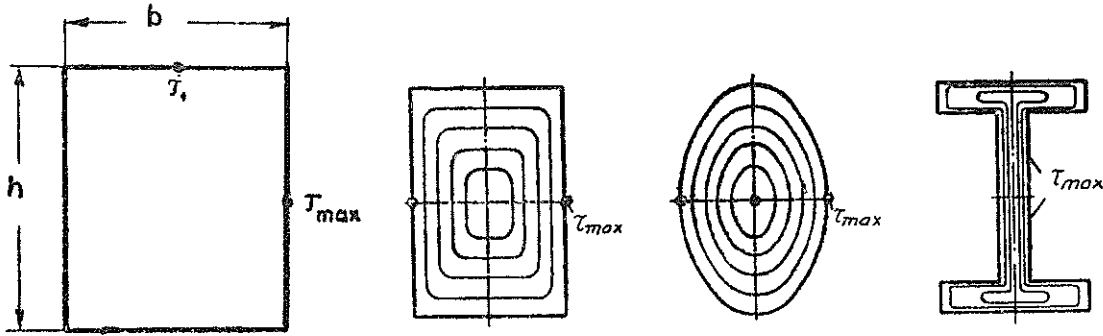
لتعيين مكان تشكل الاجهادات المماسية الاعظمية يستطاع اللجوء لاحدى المطابقتين المذكورتين ويتم ايضاح ذلك بكل سهولة :

ان الحافة الموجودة في أضيق مكان من المقطع العرضي هي مكان الاجهادات المماسية الاعظمية . فحسب مطابقة الاغشية ينبغي ان يكون ميل قبة الغشاء (ميل المماس على القبة الغشائية) عند ضلع المستطيل الضيق (عرض المستطيل) اكبر من الميل عند الضلع العريض (طول المستطيل) (شكل 7.31) .



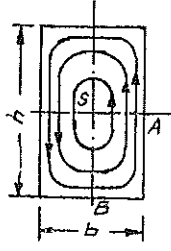
شكل 7.31

وحسب مطابقة جريان السوائل (المطابقة الحركية للسوائل) فان سرعة الجريان (سرعة السائل) عند الاضلاع الطولية اكبر منها عند الاضلاع العرضية وذلك لان المقطع العرضي الذي يجري فيه السائل عند الاضلاع الطولية اصغر من المقطع العرضي عند الاضلاع العرضية (732) .

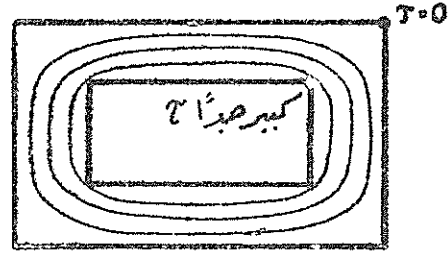
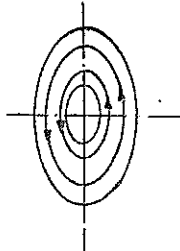


شكل 7.32

فرسعة السائل الكبيرة يقابلها اجهاد مماسي كبير . يظهر الشكل (7.32) مواضع الاجهادات المماسية الاعظمية . تقابل الخطوط المرسومة فيه خطوط الارتفاع للغشاء (مطابقة الاغشية) او كذلك خطوط الجريان للسوائل (مطابقة الجريان) وهي تتناسب مع خطوط الاجهاد المماسي . فكلما كان البعد بين هذه الخطوط صغيراً كلما كان الاجهاد المماسي كبيراً . عملياً يسمح لسائل عديم الاحتكاك وغير قابل للانضغاط (inkompressible) وذو دوامة ثابتة (konstanten Wirbel) بالدوران في أناء اسطواني له نفس شكل المقطع العرضي للقضيب المحمل على الفتل . عندئذ يلاحظ ، بشكل جلي ، التطابق بين خطوط الجريان وبين خطوط الاجهادات المماسية في المقطع العرضي للقضيب المقتول كما يلاحظ أيضاً ان سرعة الجريان في مكان ما تتناسب مع الاجهادات المماسية في نفس المكان من المقطع العرضي للقضيب المقتول . يشير الشكل (7.33) الى خطوط الاجهادات المماسية في مقاطع عرضية مختلفة مستعانة بمطابقة الجريان. بما ان الجريان (Stroemung) مستقر (موضعي) (stationaer) لذلك يجب ان تكون صورة الجريان العامة (stroemungsbild) غير متغيرة زمنياً . وبما أن السائل هو عديم الانضغاط لذلك ينبغي أن يكون تدفق السائل (كمية السائل أو حجم السائل في واحدة الزمن) في أي مقطع عرضي من مقاطع جريان السائل ثابتاً (غير متغير) . من ذلك ينتج ، على سبيل المثال في المستطيل ، ان سرعة الجريان الوسطية في المقطع الاصغر SA هي أكبر منها في المقطع الاكبر SB . ونتيجة لذلك ينبغي أن تكون الاجهادات المماسية



شكل 7.33



شكل 7-34

الفعلية على طول ضلع المستطيل الطويل أكبر منها على طول ضلع المستطيل القصير. وبمنفس الفكرة يتم ايضاح صورة الاجهادات المماسية في المقطع العرضي المقطع ناقصي³³ (على شكل قطع ناقص) (شكل 7.33).

تشير هذه المطابقة أيضاً الى ان الاجهادات المماسية في الزوايا البارزة (على سبيل المثال زوايا المستطيل) تساوي الصفر وفي الزوايا الداخلة لانهاية (عملياً كبيرة جداً ولكنها تقتصر على مجال صغير) (شكل 7-34) لذلك ينبغي على المصمم تدوير امثال هذه الزوايا بشكل جيد.

٧ - ٧ - قتل القضبان ذات المقطع العرضي مستطيل الشكل

تحتسب الاجهادات المماسية بصورة عملية في القضبان ذات المقطع العرضي مستطيل الشكل في حالة التحميل على القتل بواسطة العلاقات التقريبية التي سيتم ذكرها فيما يلي :

ليكن b هو أقصر بعد في المستطيل (عرض المستطيل) وليكن d هو أطول بعد في المستطيل (طول المستطيل) بذلك فإن الاجهاد المماسي الاعظمي $\max \tau$ يظهر ، كما قد تم ذكره سابقاً ، في منتصف أطول بعد للمستطيل وتعطى قيمة ، اذا كان M_t هو عزم القتل في المقطع العرضي بواسطة العلاقة التالية :

$$\tau_{\max} = \max \tau = \frac{M_t}{\alpha b^2 d} = \frac{M_t}{W_t} \quad (7-50)$$

حيث أن α هو عامل يتعلق بنسبة الضلعين d/b وقيمته موجودة في الجدول (7.1). لحساب زاوية الدوران النوعية (زاوية القتل النوعية) تستخدم العلاقة التالية :

$$\vartheta = \frac{\phi}{l} = \frac{M_t}{G \beta b^3 d} = \frac{M_t}{G I_t} \quad (7-51)$$

حيث أن G هو عامل القص (Schubmodul) و β هو أيضاً عامل يتعلق بنسبة الضلعين d/b وقيمته موجودة في الجدول (7-1).

من العلاقات (7-50) و (7-51) يرى ان عزم مقاومة الفتل W_t وعزم عطالة الفتل I_t في المستطيل هما كالتالي :

$$\begin{aligned} W_t &= \alpha b^2 d \\ I_t &= \beta b^3 d \end{aligned} \quad (7-52)$$

جدول 7.1

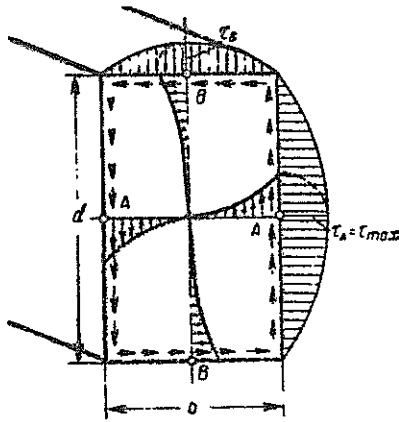
d/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

حيث ان b هو عرض المستطيل و d هو طول المستطيل . اما الاجهاد المماسي في منتصف الصلع الاصغر (في منتصف عرض المستطيل) فيتم حسابه بواسطة العلاقة التالية :

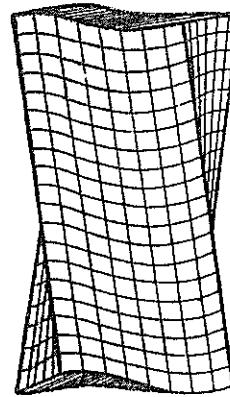
$$\tau_B = \eta \max \tau = \eta \tau_A \quad (7-53)$$

لقد تم في الشكل (7-35) تمثيل توزيع الاجهادات المماسية في المستطيل .

يمثل الشكل (7-36) قضيباً موشورياً مقطعه العرضي مستطيل الشكل ويحمل على الفتل وفيه يظهر بوضوح عدم بقاء المقطع العرضي مستوياً ، كما يشير للتغيرات الناتجة عن الفتل .



شكل 7-35

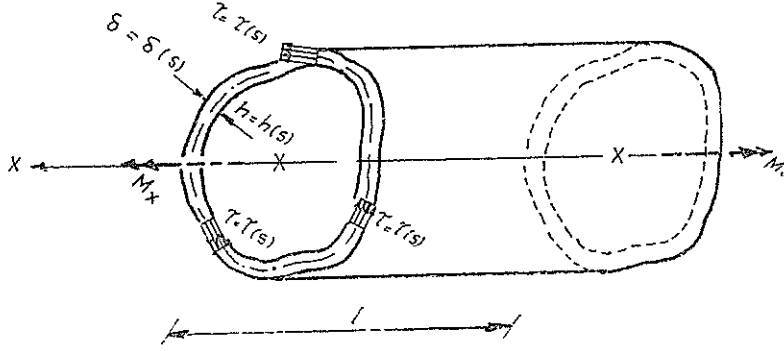


شكل 7.36

٧ - ٨ فتل القضبان رقيقة الجدران ذات المقاطع العرضية المغلقة

(Torsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Querschnitt)

فيما يلي سوف تتم دراسة القضبان المحملة على الفتل ذات المقاطع العرضية المفرغة المغلقة رقيقة الجدران . سوف يرمز لقوس من الخط الاوسط للمقطع العرضي الذي يبدأ بنقطة ثابتة ، بالحرف s (وهو الاحداثي المنحني الذي ينطبق على الخط الاوسط للمقطع العرضي) . لتكن سماكة جدار المقطع العرضي $\delta(s)$ صغيرة وتتغير بالنسبة للاحداثي المنحني s بشكل طفيف (خفيف) (شكل 7-37) ولتكن نهايتي القضيب المدروس حرتين ، وبذلك فليس له شروط هندسية . ليفترض أن الاجهادات المماسية τ المتشكلة في المقاطع العرضية تتوزع على سماكة الجدار $\delta(s)$ بانتظام وانها توازي الخط الاوسط (مماسية على الخط الاوسط) . يزداد تحقيق هذا الفرض كلما إزداد جدار المقطع العرضي رقة .



شكل 7-37

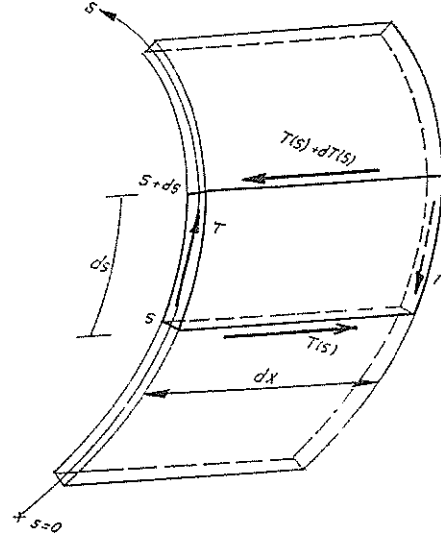
للتوصل إلى توزيع الاجهاد المماسي بالاتجاه s سوف تتم دراسة عنصر قضبي أبعاده هي ds , dx (شكل 7.38) .

تبلغ قيمة القوى الخطية التي تعتبر محصلات للاجهادات المماسية والتي تؤثر على سطوح القطوع $s+ds=const$, $s=const$ مايلي :

$$T(s) = \tau(s) \delta(s)$$

و

$$T(s+ds) = T(s) + dT(s) = \tau(s) \delta(s) + d(\tau(s) \delta(s))$$



شكل 7.38

يعطي تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x ، العلاقة التالية :

$$-T(s) + T(s) + dT(s) = 0$$

ومنها يتم التوصل للعلاقة التفاضلية الآتية :

$$dT(s) = 0 \quad (7-54)$$

وبمكاملتها يتم التوصل لما يلي :

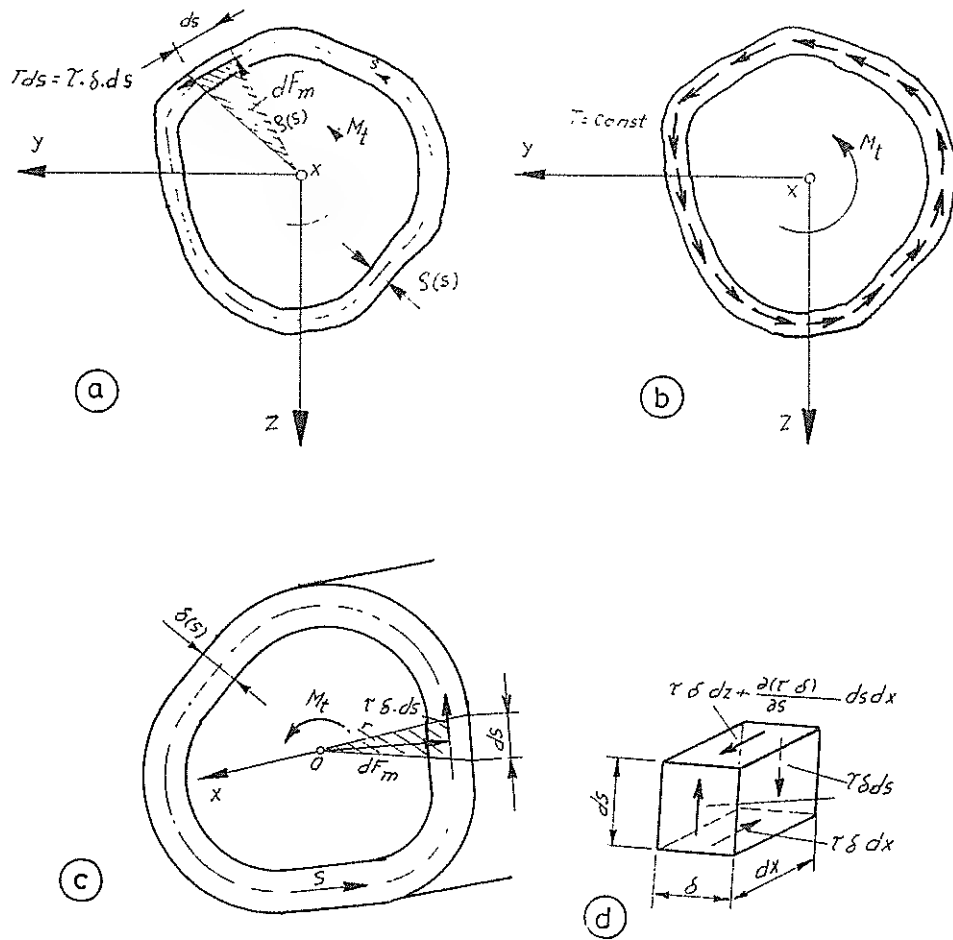
$$T = \tau(s) \delta(s) = \text{const.} \quad (7-55)$$

تسمى القوة الخطية :

$$T = \tau(s) \delta(s)$$

التي هي محصلة للاجهادات المماسية على سماكة الجدار $\delta(s)$ بسمالة القص (Schubfluß) وهي حسب العلاقة (7.55) مستقلة عن الاحداثي s (شكل 7.39 a) . بواسطة العلاقات (7.38) و (7.39) يتحقق شرطي توازن القوى بالاتجاهين z, y بشكل دائم (حسب الشكل 7.37) .

يعطي تطبيق شرط توازن العزوم بالنسبة للمحور x (المحور الطولي) (شكل 7.39 b) العلاقة التالية :



شكل 7.39

$$M_x = \left(\int \right) T \rho(s) ds$$

بالاستعانة بمساحة العنصر السطحي :

$$dF = \frac{\rho ds}{2}$$

العائدة لسطح F_m المحدد بواسطة الخط الأوسط للمقطع العرضي فإن علاقة العزم M_x تأخذ الشكل التالي :

$$M_x = 2 T \int_{F_m} dF = 2 T F_m \quad (7.56)$$

منها يتم الحصول ، من أجل سيالة القص ، على العلاقة التالية :

$$T = \frac{M_x}{2 F_m}$$

التي تسمى **بعلاقة بردت الاولى** (1. BR E!)Tsche Formel) . ومن أجل توزيع الاجهاد المماسي على طول الخط الاوسط يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\tau(s) = \frac{T}{\delta(s)} = \frac{M_x}{2 F_m \delta(s)} \quad (7.57)$$

حيث ان F_m هي المساحة التي تغلقها سيالة القص داخلها (أو كذلك المساحة التي يغلقها الخط الاوسط للمقطع العرضي) والتي رسمت في الشكل (7.39 c,d) مباشرة .

و δ هي سماكة الجدار في النقطة التي يطالب حساب الاجهاد المماسي فيها .

تظهر الاجهادات المماسية الاعظمية ، حسب هذه العلاقة ، في المواضع الضيقة من المقطع العرضي . فاذا كانت δ ثابتة في المقطع العرضي الواحد فان τ تكون ايضاً ثابتة .

تظهر اثناء قتل القضبان رقيقة الجدران ذات المقطع العرضي المفرغ ، كما تشير التجارب ، علاوة على الدوران الصلب $\varphi(x)$ الذي تقوم به المقاطع العرضية عند النقاط $x = \text{const}$ ، الانتقالات V_1 باتجاه المحور الاوسط للقضيب ، لذلك فان المقاطع العرضية لا تبقى مستوية وإنما تشوه (verwoelbt) . من أجل حالة الفتل الالافي ، المدروس في هذا الفصل ، فان الانتقالات (على عكس قتل قوة التشوه (Woelbkraftorsion) هي توابع للمتغير s ، أي :

$$V_1 = V_1(s)$$

إذا فهي ليست متغيرة على طول المحور الاوسط للقضيب . للتمكن من حساب الدوران المتبادل $\Delta\varphi$ (gegenseitige Verdrehung) الذي يقوم به المقطعان العرضيان الموجودان في نهايتي القضيب سوف يعين عمل تغير الشكل A للقضيب المفتول وذلك بدراسة عنصر قصفي طوله ds وسماكته $\delta(s)$ (شكل 7-42) وتؤثر على سطوحه الجانبية $h(s) ds$ و $h(s) dx$ القوى $T ds$ و $T dx$. ان التشوه (Deformation) γ الذي ينتج عن ذلك يؤدي للتشوه (Verwoelbung) $dV_1(s)/ds$ والانتقال المماسي $(\gamma(s) - dV_1(s)/ds)$ (شكل 7-43) لهذا السبب ينبغي اخذ العمل الذي تقوم به القوى $T dx$, $T ds$ وهو التالي :

$$dA = \frac{Tds(\gamma - \frac{dV_t}{ds}) dx + Tdx \frac{dV_t}{ds} dx}{2} = \frac{T ds \gamma dx}{2}$$

بمعين الاعتبار . وبالمكاملة على كامل المقطع العرضي وطول القضيب l ينتج :

$$A = \left(\int_s \right) ds \int_0^l \frac{T\gamma}{2} dx$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$T = \frac{M_x}{2F_m}$$

والعلاقة الآتية :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{G\delta(s)} = \frac{M_x}{2GF_m\delta(s)}$$

يتم منها الحصول على عمل تغير الشكل للقضبان رقيقة الجدران :

$$A = \left(\int_s \right) ds \int_0^l \frac{M_x^2}{8GF_m^2\delta(s)} ds = \left(\int_s \right) \frac{M_x^2 l}{8GF_m^2\delta(s)} ds \quad (7.58)$$

$$= \frac{M_x^2 l}{8GF_m^2} \left(\int \frac{ds}{\delta(s)} \right) = \frac{M_x^2 l}{2GI_t}$$

حيث ان :

$$I_T = \frac{4 F_m^2}{\left(\int_s \right) \frac{ds}{\delta(s)}}$$

هو عزم عطالة القتل . واخيراً وبمقارنة العمل الذي تقوم به العزوم الخارجية M_x :

$$A_a = \frac{M_x \Delta \varphi}{2}$$

مع العلاقة (7-58) (مبدأ تساوي عمل القوى الخارجية A_a وعمل القوى الداخلية A_i)
يتم الحصول على المعادلة الآتية :

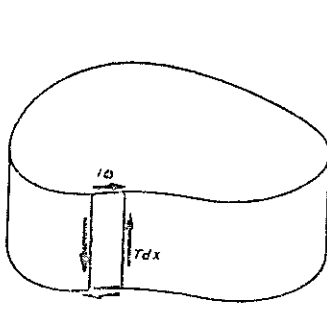
$$\Delta \varphi = \vartheta \Rightarrow \frac{M_x l}{GI_T} , I_T = \frac{4 F_m^2}{\left(\int \right) \frac{ds}{\delta(s)}} \quad (7.59)$$

والتي تسمى بعلاقة بردت الثانية (2. BREDT sche Formel) .

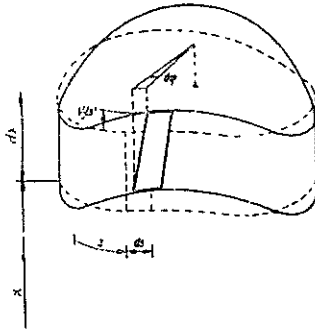
حالة خاصة :

إذا كانت سماكة جدار المقطع العرضي δ ثابتة عندئذ يتم التوصل ، بالاستعانة بمحيط المقطع العرضي :

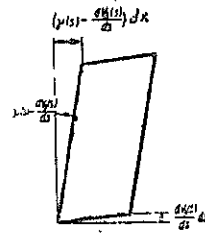
$$U = \left(\int_s \right) ds$$



شكل 7.42



شكل 7.43



إلى الدوران المتبادل ممثلاً بالشكل التالي :

$$\Delta\varphi = \vartheta l = \frac{M_x l}{G I_T} \quad ; \quad I_T = \frac{4 F_m^2 \delta}{U} \quad (7-60)$$

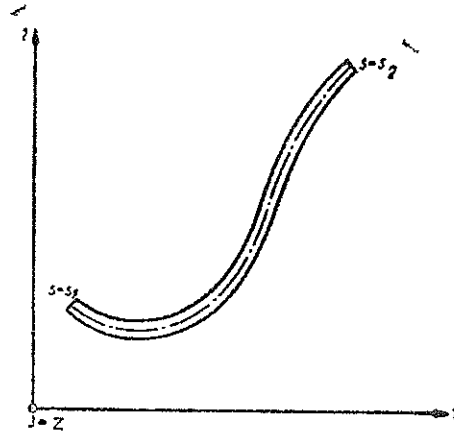
من أجل أنبوب رقيق الجدار قطره D وسماكة جداره δ ثابتة ، تنتج العلاقات التالية :

$$\tau = \frac{2 M_x}{\pi D^2 \delta} \quad ; \quad \Delta\varphi = \vartheta l = \frac{M_x l}{G I_T} \quad , \quad I_T = \frac{\pi D^3 h}{3} \quad (7-61)$$

ان العلاقات المشتقة في هذه الفقرة تصلح فقط من أجل المقاطع العرضية الرقيقة ذات الاغلاق الوحيد (بخلية واحدة) اي انها لا تصلح من أجل المقاطع العرضية متعددة الاغلاق (بعدة خلايا) (شكل 7.44) . فمن أجل هذه المقاطع تنتج معادلات مترابطة (gekoppelte Gleichungen) بالنسبة لسيالات القص في كل خلية (انابيب القتل (Torsionsroehren) وميغندر في هذا الكتاب عن معالجتها .



شكل 7.44



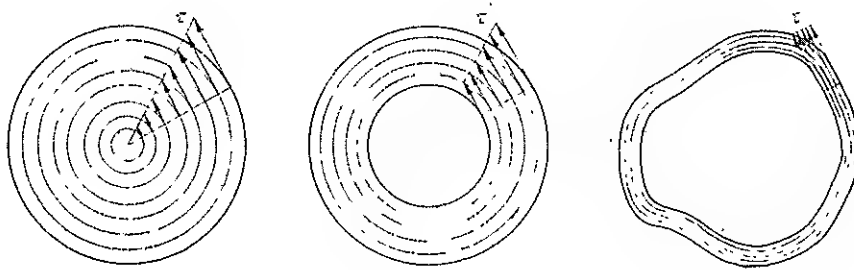
شكل 7.45

٧ - ٩ قتل القضبان رقيقة الجدار ذات المقطع العرضي المفتوح

(Torsion duennwandiger staebe mit offenem Querschnitt)

قبل أن يصار لحساب الاجهادات المماسية والانفتال (الدوران) المتبادل لمقطعين عرضيين من قضيب رقيق الجدار وذو مقطع عرضي مفتوح (شكل 7.45) سوف يلجأ لايضاح بعض الملاحظات الهامة .

لقد تم في الشكل (7.46) رسم مسارات الاجهادات المماسية (Schubspannungstrajektorien) او ما تسمى بخطوط الاجهادات المماسية (Schubspannungslinien) من اجل مقطع عرضي دائري ومقطع عرضي آخر حلقي دائري الشكل ومقطع عرضي ثالث مغلق ورقيق الجدار . من خلال هذه الصورة للاجهادات يعطى القارئ فكرة واضحة عن توزيع الاجهاد المماسي في المقطع العرضي المغلق ، كما يتضح منها أن الاجهادات المماسية التي تؤثر باتجاه كل من خطوط الاجهادات المماسية المغلقة تؤدي لنصيب معين من عزم القتل .



شكل 7.46

في حالة دراسة قتل القضبان ذات المقاطع العرضية المثلثة في الشكل (7.47) فان الاجهادات المماسية التي تنطبق على اتجاه خطوط الاجهادات المماسية تعطي أيضاً نصيباً معيناً من عزم القتل .

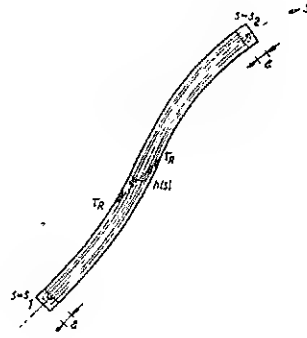
في المقاطع العرضية رقيقة الجدار (شكل 7.48) يقتصر التفاضل خطوط الاجهادات المماسية في الاضلاع الضيقة على مجال صغير قد اشير له في الشكل المذكور بواسطة ϵ حيث يمكن في الحسابات المقبلة اعتبار ذلك مساوياً للصفر . تشير التجارب والدراسات النظرية الى ان توزيع الاجهادات المماسية على السماكة $\delta(s)$ هي عملياً خطية وبذلك يصلح :

$$\tau(s, x) = 2 \tau_n(s) x \quad , \quad -\frac{1}{2} \leq x = \frac{\xi}{\delta} \leq \frac{1}{2} \quad (7.62)$$

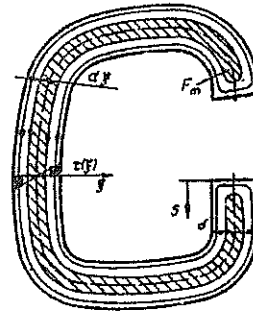
(للتأكد من هذه النتيجة يرجع الى مطابقة جريان السوائل . فبتصور سائل يدور دوراناً ثابتاً في المقطع العرضي المدروس (شكل 7.49) يستنتج انه يجري تقريباً في كل المقطع العرضي بموازاة الحافة وهذا يشير ايضاً الى ان خطوط الاجهادات المماسية في كل المقطع العرضي تقريباً تسير بموازاة الحافة وبذلك يمكن الافتراض ان توزيع الاجهادات المماسية هو خطي) .



شكل 7.47



شكل 7.48



شكل 7.49

يعطي تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x على عنصر طوله ds وتحدده خطوط الاجهادات المماسية $x \delta(s)$ و $(x + dx) \delta(s)$ (شكل 7.58) العلاقة التالية :

$$\tau(s + ds) \delta(s + ds) x - \tau(s) \delta(s) dx = 0$$

باهمال الحدود من المرتبة الثانية والحدود من الرتب الاعلى في المعادلة التالية :

$$[\tau(s, x) + d\tau(s, x)][\delta(s) + d\delta(s)]dx - \tau(s, x)\delta(s)dx = 0$$

يتضح من العلاقة الآتية :

$$\frac{d}{ds} (\tau(s, x)\delta(s)dx) = 0 \quad (7-63)$$

ثبات مسالة القص :

$$dT(x) = \tau(s, x)\delta(s)dx = 2\tau_R(s)\delta(s)x dx = \text{const.}$$

على طول حلقة مغلقة يحدها خطان من خطوط الاجهادات المماسية . لتعيين عزم القتل الجزئي dM_x سوف يستعان بالمعادلة (757) وبذلك ينتج :

$$dT(x) = 2\tau_R(s)\delta(s)x dx = \frac{dM_x}{2F_m(x)} \quad (7-64)$$

بما أن المناطق (الحدود) الطرفية ذات الطول ϵ صغيره ويمكن إهمالها فبالامكان الافتراض ان الاجهادات المماسية الموازية للاضلاع الضيقة التي تؤثر داخلها تتوزع ايضاً خطياً . بذلك يأخذ البعد الطرفي ، القيمة التالية : $\epsilon(1-2x)$ (شكل 758) .

اما مساحة السطح الذي يغلقه خط الاجهاد المماسي $\delta(s)x$ داخله فتبلغ القيمة التالية :

$$F_m = 2 \left[\int_{s1}^{s2} \delta(s)x ds - 2 \int_0^{\epsilon(1-2x)} \delta(s)x ds \right]$$

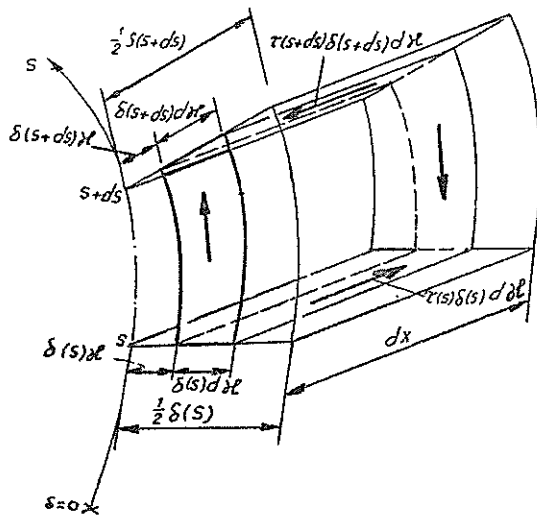
بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F = \int_{s1}^{s2} \delta(s) ds$$

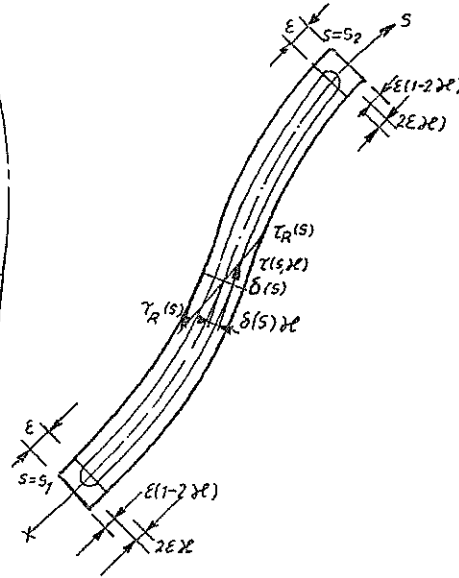
ينتج :

$$F_m = 2x \left[F - 2 \int_0^{\epsilon(1-2x)} \delta(s) ds \right]$$

من العلاقة (7.64) يتم ، في البداية ، الحصول على تفاضل عزم القتل (عزم القتل الجزئي) :



شكل 7-57



شكل 7-58

$$dM_x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 8 \tau_R(s) \delta(s) x^2 \left[F - 2 \int_0^{\epsilon(1-2x)} \delta(s) ds \right] dx$$

وبعد اخذ القيمة الحدية (العبور الحدي Grenzubergang) ينتج :

$$dM_x = 8 \tau_R(s) \delta(s) F x^2 dx$$

تعطي مكاملتها العلاقة التالية :

$$M_x = 8 \tau_R(s) \delta(s) F \int_0^{1/2} x^2 dx = \tau_R'(s) \frac{\delta(s) F}{3} \quad (7-65)$$

من هذه العلاقة وفي حالة كون عزم الفتل M_x معلوماً يتم الحصول على الاجهادات الطرفية :

$$\tau_R(s) = \frac{M_x}{\frac{\delta(s) F}{3}} \quad (7.66)$$

إذا تألف المقطع العرضي ، كما هو الحال في الحياة العملية الهندسية ، من n سطح جزئي اطوالها S_v . حيث ان $v=1,2,\dots,n$ وسماكة كل منها ثابتة δ_v ($v=1,2,\dots,n$) عندئذ يتم التوصل ، بالاستعانة بالعلاقة التالية :

$$F = \sum_v \varepsilon_v \delta_v$$

لعلاقة الاجهاد :

$$\tau_{rv} = \frac{M_x}{\delta_v \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} \delta_{\mu}} : \mu, v = 1, 2, \dots, n \quad (7.67)$$

تتحول هذه العلاقة عندما تكون مساحة المقاطع العرضية الجزئية ثابتة :

$$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \dots$$

وبعد الاستعانة بالاختصار :

$$s = \sum_{\mu} s_{\mu}$$

الى العلاقة التالية :

$$\tau_R = \frac{M_x}{\frac{s \delta^2}{3}} \quad (7.68)$$

للتمكن من حساب زاوية الدوران لمقطعين عرضيين يقعان على بعد l ، سوف يدرس العنصر ذو الابعاد dx, ds, dx (شكل 7-59) . تؤثر على السطوح الجانبية $\delta(s) dx ds$ القوى $dT(x) ds$. يؤدي التغير الزاوي γ الناتج عن التحميل القصي الى الانتقال $\gamma(s) dx$. ليتم تشكل ذلك ينبغي ان تقوم القوى :

$$dT(x) ds = \tau(s, x) \delta(s) dx ds$$

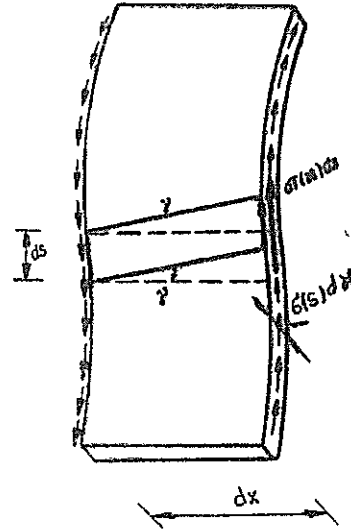
بالعمل

$$\frac{\tau(s, x) \delta(s) dx ds \gamma(s) dx}{2}$$

بالكاملة على كامل المقطع العرضي وعلى طول القضيب l يتم تعيين العمل الكلي :

$$A_i = \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^l \frac{\tau(s, x) \delta(s) \gamma(s)}{2} dx ds dx$$

من هذه المعادلة وحسب العلاقة (7.63) وبواسطة :



شكل 7.93

$$\gamma(s, x) = \frac{\tau(s, x)}{G}$$

و

$$\frac{d}{ds} (\tau(s, x) \delta(s)) = 0$$

يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$A_i = \frac{\delta^2(s)}{2G} \int_{-1/2}^{+1/2} [\tau(s, x)]^2 dx \int_{s1}^{s2} \frac{ds}{\delta(s)} \int_0^l dx$$

وبالاستعانة بالمعادلة :

$$\tau(s, x) = 2 \tau_R(s) x$$

والعلاقة (7.66) ينتج أخيراً :

$$A_i = \frac{[\tau_R(s)]^2 [\delta'(s)]^2 l}{6G} \int_{s1}^{s2} \frac{ds}{\delta(s)} = \frac{3 M_x^2 l}{2 G F^2} \int_{s1}^{s2} \frac{ds}{\delta(s)}$$

يلف العمل الذي تنجزه عزوم الفتل الخارجية (عمل القوى الخارجية) القيمة التالية :

$$A_s = \frac{M_s \Delta \varphi}{2}$$

بمقارنة كلا العاملين (شرط تساوي عمل القوى الداخلية وعمل القوى الخارجية) يتم التوصل لزاوية الدوران :

$$\Delta \varphi = \frac{M_s l}{G I_\tau} , I_\tau = \frac{F^2}{3 \int_{s1}^{s2} \frac{ds}{\delta(s)}} \quad (7.69)$$

حالات خاصة :

١ - من اجل مقطع عرضي سماكة جداره متغيرة خطياً (شكل 7-60) يتبع :

$$\Delta \varphi = \vartheta l = \frac{M_s l}{G I_\tau} , F = \frac{H+h}{2} b , I_\tau = \frac{b}{3} \left(\frac{H+h}{2} \right)^2 \frac{H-h}{\ln(H/h)} \quad (7.70)$$

بالامكان ، من اجل التابع $\ln(H/h)$ ، استعمال المشورة التالية :

$$\ln \frac{H}{h} = 2 \frac{\frac{H}{h} - 1}{\frac{H}{h} + 1} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{H}{h} - 1}{\frac{H}{h} + 1} \right)^2 + \dots \right]$$

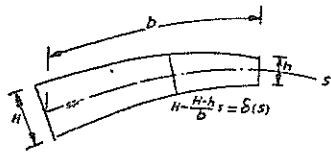
حيث يكفي ، بسبب كون الحد $H-h$ صغيراً ، اعتبار الحدين الاولين فقط . عندئذ تأخذ العلاقات السابقة الشكل التالي :

$$\Delta \varphi = \vartheta l = \frac{M_s l}{G I_\tau} , I_\tau = \frac{b [(H+h)/2]^2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{H-h}{H+h} \right)^2} \quad (7.71)$$

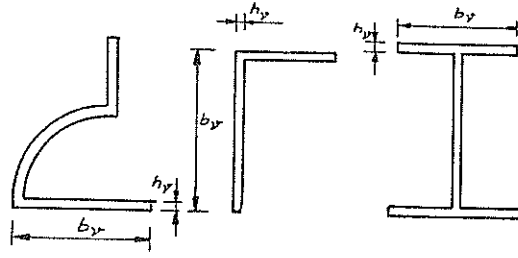
٢ - من اجل مقطع عرضي سماكة جداره ثابتة $\delta = H = h$ فان العلاقات السابقة تصبح كما يلي :

$$\Delta \varphi = \vartheta l = \frac{M_s l}{G I_\tau} , I_\tau = \frac{b \delta^3}{3} \quad (7.72)$$

٣ - سيتم الآن معالجة المقاطع العرضية الهامة هندسياً والتي تتكون من اجزاء رقيقة ذات سماكة ثابتة δ_v حيث ان $v = 1, 2, \dots, n$ (الاطول $v = 1, 2, \dots, n$) (شكل 7 61) .



شكل 7.60



شكل 7.61

من اجل عزم عطالة الفتل حسب العلاقة (7.60) يتم الحصول بالاستعانة بـ $F_v = b_v \cdot \delta_v$ على النتيجة التالية :

$$I_T = \frac{1}{3} \frac{(\sum F_v)^2}{\sum \frac{S_v}{\delta_v}} \quad (7.73)$$

لقد اعطيت في المراجع الهندسية عزوم عطالة الفتل من اجل المقاطع العرضية الممثلة في الشكل (7 61) بشكل آخر ، هو التالي :

$$I_T = \frac{1}{3} \sum b_v \delta_v^3 \quad (7.74)$$

لتحليل ذلك الفارق سوف تتم ، على سبيل المثال ، دراسة مقطع عرضي يتألف من جزئين . يبلغ عزم عطالة فتل المقطع العرضي المذكور ، القيمة التالية:

$$I_T = \frac{1}{3} \frac{(F_1 + F_2)^2}{\frac{b_1}{\delta_1} + \frac{b_2}{\delta_2}}$$

ويمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$I_T = \frac{b_1 \delta_1^3}{3} + \frac{b_2 \delta_2^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 - 2}{\frac{1}{F_2 \delta_1^2} + \frac{1}{F_1 \delta_2^2}}$$

ان الحد الاضافي الذي يظهر زيادة عن حدود العلاقة (7.74) هو ، من اجل المقاطع رقيقة الجدار ، صغيراً بحيث يمكن اهماله .

مقارنة بين الاجهادات المماسية في كل من المقاطع العرضية المغلقة والمقاطع العرضية المفتوحة :

تشير العلاقة (7.68) الى ان الاجهادات المماسية الاعظمية الناتجة عن عزم القتل M_x هي في المقاطع العرضية المفتوحة اكبر بكثير منها في المقاطع العرضية المغلقة . فمثلاً تبلغ الاجهادات المماسية الاعظمية τ_1 في حلقة دائرية مغلقة والاجهادات المماسية الاعظمية τ_2 في حلقة دائرية مفتوحة ، القيم التالية :

$$\tau_1 = \frac{M_x}{2\pi r^2 \delta} \quad : \quad \tau_2 = \frac{3 M_x}{2\pi r \delta^2}$$

بالافتراض ، على مسيل المثال ان $r=10 \delta$ ، فان نسبة تلك الاجهادات تبلغ ما يلي :

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{3 r}{\delta} = 30$$

تظهر هذه النتيجة ضرورة حمل عزوم القتل بواسطة مقاطع عرضية مغلقة فقط .

٧ - ١٠ أمثلة

مشال 74 :

حمل جائز صندوقي (شكل 7.62) بعزم القتل M_t .

المعطى : M_t ، b ، d ، δ_1 ، δ_2 ، δ_3 ، δ_4 ؛ $\delta \ll b$ ، d وعامل القص (عامل الانزلاق) G .

المطلوب : إيجاد

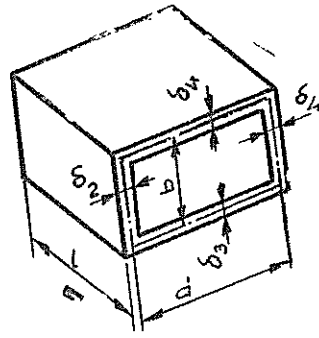
١ - توزيع الاجهاد المماسي .

٢ - زاوية القتل النوعية θ .

الحل :

يتم تعيين مسيالة القص بواسطة علاقة بردت الاولى (العلاقة b 7.56) :

$$T = \tau \delta = \frac{M_t}{2 F_m}$$



شكل 7.62

تبلغ المساحة التي يغلقها الخط الاوسط ، القيمة التالية :

$$F_m = b \cdot d$$

بالاستعانة بكلا العلاقتين يتم التوصل لقيم الاجهادات المماسية التالية :

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2 b d} \frac{1}{\delta_1}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2 b d} \frac{1}{\delta_2}$$

$$\tau_3 = \frac{M_t}{2 b d} \frac{1}{\delta_3}$$

$$\tau_4 = \frac{M_t}{2 b d} \frac{1}{\delta_4}$$

يحسب الانفعال (زاوية القتل النوعية) θ بواسطة علاقة بردت الثانية (العلاقة 7.59) :

$$\theta = \frac{M_t}{4 G F_m^2} \left(\int \right) \frac{ds}{\delta}$$

ان السماكة δ هي في كل مجال ثابتة وبذلك يأخذ التكامل الذي تتضمنه العلاقة السابقة القيمة التالية :

$$\left(\int \right) \frac{ds}{\delta} = \frac{b}{\delta_1} + \frac{d}{\delta_2} + \frac{b}{\delta_3} + \frac{d}{\delta_4} = b \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + d \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right)$$

وبذلك تأخذ زاوية القتل النوعية (النسبية) القيمة الآتية :

$$\theta = \frac{M_t}{4 G b^2 d^2} \left[b \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + d \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right) \right]$$

لقد كان بالإمكان التوصل لنفس النتيجة وذلك باستخدام الجدول 7.2 مباشرة وذلك كما يلي :

$$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

$$I_t = \frac{4 b d}{\frac{1}{d \delta_1} + \frac{1}{b \delta_2} + \frac{1}{d \delta_3} + \frac{1}{b \delta_4}} = \frac{4 b d}{\frac{1}{d} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right)}$$

بالتبديل في العلاقة السابقة يتم التوصل ، بعد توحيد الخارج لنفس العلاقة السابقة وهي :

$$\theta = \frac{M_t}{4 G b^2 d^2} \left[b \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_3} \right) + d \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_4} \right) \right]$$

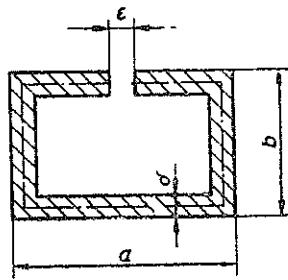
مثال 75 :

حمل جائز صندوقي مفتوح (شكل 7.63) وسماكة جداره $\delta = \text{const}$ بعزم القتل M_t .

المعطى : $\epsilon < a, \delta < a, b; G, \epsilon, \delta, b, a, M_t$.

المطلوب :

- ١ - تعيين الاجهاد المماسي τ .
- ٢ - تعيين زاوية القتل النوعية θ .
- ٣ - مقارنة النتيجة مع قيم المثال 74 .



شكل 7.63

الحل :

ان علاقات حساب الاجهادات المماسية (7.62 , 7.68) من اجل المقاطع العرضية المفتوحة هي :

$$\tau = \frac{3 M_t}{S \delta^2} \frac{\xi}{\delta/2} , \quad \max \tau = \frac{3 M_t}{S \delta^2}$$

يبلغ طول المحور الاوسط للمقطع العرضي S (عندما يصل عرض الفتحة ε) القيمة التالية :

$$S = 2 (a + b)$$

وبذلك يأخذ الاجهاد المماسي الاعظمي القيمة التالية :

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{M_t}{(a + b) \delta^2}$$

أما عزم عطالة الفتل فيبلغ (العلاقة 7.72 والجدول 7.2 أيضاً) :

$$I_t = \frac{S \delta^3}{3} = \frac{2}{3} (a + b) \delta^3$$

بالاستعانة به يتم تعيين الانتقال (زاوية الفتل النوعية) :

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{3}{2} \frac{M_t}{G} \frac{1}{(a+b)\delta^3}$$

من المثال 74 يتم الحصول من اجل الجائز الصندوقي المغلق وعندما تبدل $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ على الاجهاد المماسي التالي :

$$\tau = \frac{M_t}{2ab\delta}$$

وعلى الانتقال الآتي :

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{M_t}{G} \frac{a+b}{a^2 b^2 \delta}$$

مثال 76 :

يثبت على كل من نهايتي محور ، طوله l ، دولاب (طارة) (Rimenscheibe) (شكل 7.64) .
ويحمل المحور الموجود بين الدولابين بعزم الفتل $M_s = M_t$.

المعطى :

$$M_t = 10\,000 \text{ kp cm} , l = 20 \text{ m} , \frac{d}{D} = 0,9$$

$$\text{zul } \tau = 250 \text{ kp / cm}^2 , G = 0,81 \cdot 10^4 \text{ kp / cm}^2$$

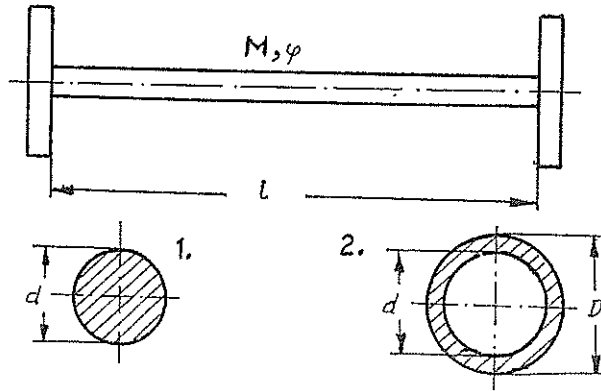
المطلوب :

١ - تصميم المحور من أجل $\text{zul } \tau = 250 \text{ kp/cm}^2$

ب - حساب زاوية الفتل.

١ - وذلك عندما يكون المقطع العرضي دائرة مملئة .

٢ - وذلك عندما يكون المقطع العرضي حاقة دائرية تبلغ فيها $d/D = 0,9$.



شكل 7,74

الحل :

١ - تصميم المقطع العرضي للمحور باعتباره دائرة مملئة .

$$\max \tau = \frac{M_t}{I_t} \max \rho = \frac{M_t}{W_t} \leq \text{zul } \tau$$

$$W_t = W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$\max \tau = \frac{16M_t}{\pi d^3} \leq \text{zul } \tau$$

بحل المعادلة الاخيرة يتم تعيين قطر الدائرة :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \cdot \text{zul } \tau}}$$

يبلغ قطر الدائرة عددياً القيمة التالية :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10\,000}{\pi \cdot 250}} = 5,88 \text{ cm}$$

فعلياً سوف يختار محور قطره $d = 6 \text{ cm}$. من اجل هذه الحالة فان الكشف عن الاجساد يصبح كما يلي :

$$\max \tau = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 10000}{\pi \cdot 6^3} = 236 \text{ kp/cm}^2 < 250 \text{ kp/cm}^2$$

هذا يعني ان المحور قد صمم بشكل كافي .

آ - ٢ تصميم المقطع العرضي للمحور باعتباره حلقة دائرية :
عزم المقاومة (ويؤخذ من الجدول 7.2):

$$W_t = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$$

شرط التصميم :

$$\begin{aligned} \max \tau &= \frac{M_t}{W_t} = \frac{16 D M_t}{\pi (D^4 - d^4)} \leq \text{zul } \tau \\ &= \frac{16 M_t}{\pi D^3} \frac{1}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4} \leq \text{zul } \tau \end{aligned}$$

بحل هذه العلاقة بالنسبة للقيمة D ينتج:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \cdot \text{zul } \tau [1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4]}}$$

اما القيمة العددية فتبلغ :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10\,000}{\pi \cdot 250 (1 - 0,9^4)}} = 8,39 \text{ cm} \approx 8,4 \text{ cm}$$

في الحقيقة ينبغي اختيار انبوب تكون مقاييسه موجودة في السوق التجارية . اما الكشف عن الاجهاد فيجري بعد اختيار ابعاد المقطع العرضي .

ب - ١ زاوية فتل المحور (Verdreh - oder Torsionswinkel) باعتباره دائرة مليئة .

سوف يفترض ان قطر المحور الاصغري هو $d=5,88\text{cm}$ وبذلك تبلغ زاوية الدوران :

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t}$$

يبلغ عزم عطالة الفتل في الدائرة ما يلي :

$$I_t = I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l \cdot 32}{\pi \cdot d^4 \cdot G} = \frac{10\,000 \cdot 2000 \cdot 32}{\pi \cdot 5,88^4 \cdot 0,81 \cdot 10^6} = 0,210$$

إن الزاوية التي تم الحصول عليها هي بمقياس الاقواس (بالراديان) ويعطي تحويلها الى الدرجات القيمة التالية :

$$\varphi = 12,13^\circ$$

ب - ٢ زاوية فتل المحور باعتبار مقطعه العرضي حلقة دائرية :

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_t}$$

يبلغ عزم عطالة الفتل في الحلقة الدائرية ما يلي :

$$I_t = I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot D^4} \cdot \frac{1}{1 - (d/D)^4}$$

$$\varphi = \frac{10\,000 \cdot 2000 \cdot 32}{0,81 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 8,39^4 \cdot (1 - 0,9^4)} = 0,148$$

$$\varphi = 8,48^\circ$$

مسألة 77 :

يُنرم تصميم نوابض دورانية (Drehfedern) طولها l بحيث يستطيع عزم قتل معين M_t تدوير المقاطع العرضية الموجودة عند النهايتين بزاوية قتل معينة مقدارها φ .

المعطى : $M_t = 4000 \text{ kp cm}$, $\varphi = 15^\circ$

$l = 80 \text{ cm}$, $G = 0,81 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$

$\frac{d}{D} = 0,8$, $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$

المطلوب :

١ - حساب ابعاد المقطع العرضي من اجل الحالات التالية :

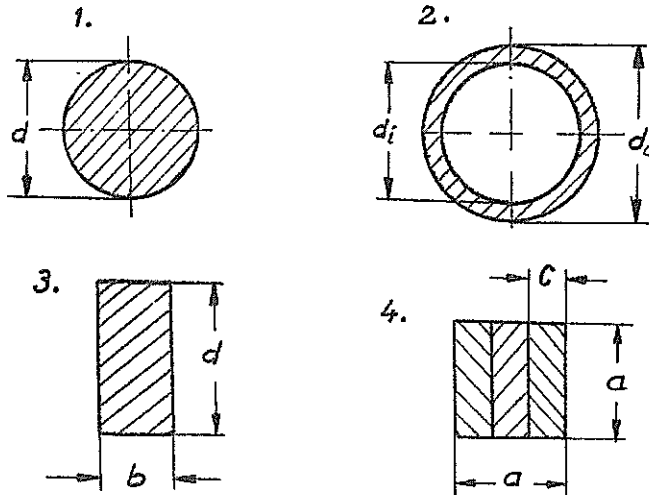
١ - دائرة مملئة .

٢ - حلقة دائرية .

٣ - مستطيل .

٤ - ثلاثة نوابض وحيدة ، مقطع كل منها مستطيل الشكل (شكل 7.65) .

ب - تعيين مادة النابض وذلك بتحديد الاجهاد المماسي المسموح من اجل الحالات الاربعة السابقة .



شكل 7.65

الحل :

١ - المقطع العرضي دائرة مليمثة :

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_t}$$

عزم عطالة الفتل للدائرة المليمثة (الجدول 7.2) :

$$I_t = I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{32 M_t l}{G \pi d^4}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير d ينتج :

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_t l}{G \pi \varphi}}$$

اما الناتج فهو قطر النابض الدوراني اللازم ببناءه حتى يستطاع بعزم الفتل M_t التوصل لزاوية الفتل φ . ينبغي في العلاقة السابقة تبديل φ بالراديان (بـقياس الاقواس) :

$$\varphi = \frac{15^\circ \pi}{180^\circ} = 0,262$$

بالتعويض في العلاقة الاخيرة ، يتم تعيين قطر المقطع العرضي :

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 4000 \cdot 80}{\pi \cdot 0,81 \cdot 10^6 \cdot 0,262}} = 1,98 \text{ cm}$$

آ - ٢ المقطع العرضي حلقة دائرية :

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_t}$$

من الجدول 7.2 يتم الحصول على عزم عطالة الفتل :

$$I_t = I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

بالتعويض في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{32 M_t l}{G \pi D^4 [1 - (d/D)^4]}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير D يتم التوصل لما يلي :

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 M_t l}{\pi G \varphi [1 - (d/D)^4]}}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 4000 \cdot 80}{\pi \cdot 0,81 \cdot 10^6 \cdot 0,262 [1 - 0,8^4]}} = 2,26 \text{ cm}$$

$$d = 0,8 D = 1,81 \text{ cm}$$

آ - ٣ المقطع العرضي مستطيل الشكل :

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_t}$$

يؤخذ عزم عطالة الفتل للمستطيل من الجدول 7.2 :

$$I_t = \beta b^3 d$$

بالتبديل في العلاقة الأخيرة ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t l}{G \beta b^3 d} = \frac{M_t l (b/d)}{G \beta b^4}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير b ينتج :

$$b = \sqrt[4]{\frac{M_t l (b/d)}{G \cdot \beta \cdot \varphi}}$$

من الجدول 7-2 ومن أجل $d/b = 2$ يتم تعيين العامل β :

$$\beta = 0,229$$

بتبديل هذه القيمة وبقيّة القيم العددية في العلاقة الأخيرة ينتج :

$$b = \sqrt[4]{\frac{4000 \cdot 80 \cdot (1/2)}{0,81 \cdot 10^6 \cdot 0,229 \cdot 0,262}} = 1,35 \text{ cm}$$

$$d = 2 b = 2,70 \text{ cm}$$

آ - ٤ يتألف نابض الفتل (Torsionsfeder) من ثلاثة نوابض افردية ، المقطع العرضي لكل منها هو مستطيل الشكل :

إن زاوية الفتل φ هي بالنسبة للنوابض الثلاثة نفسها وبذلك يتحمل كل من النوابض 1/3 عزم الفتل M_t :

$$\varphi = \frac{\frac{M_t}{3} l}{G I_t}$$

من الجدول 7.2 يتم الحصول على عزم عطالة الفتل للمستطيل الواحد :

$$I_t = \beta c^3 a$$

بالتبديل في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{M_t l}{3G \beta c^3 a}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير c يتم التوصل للمطلوب :

$$c = \sqrt[4]{\frac{M_t (c/a) l}{3G \beta \varphi}}$$

عندما تكون $a/c = 3$ عندئذ يبلغ العامل β حسب الجدول 7.2 القيمة التالية :

$$\beta = 0,263$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية في العلاقة السابقة ينتج :

$$c = \sqrt[4]{\frac{4000 \cdot 80 \cdot (1/3)}{3 \cdot 0,263 \cdot 0,81 \cdot 10^6 \cdot 0,262}} = 0,89 \text{ cm}$$

$$a = 3 c = 2,68 \text{ cm}$$

ب - ١ الاجهاد المماسي المسموح من أجل مادة النابض الدوراني (نابض الفتل) عندما يكون المقطع العرضي هو دائرة مليئة :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \text{zul } \tau$$

من الجدول 7.2 تتم قراءة العزم المقاوم للفتل للدائرة المثلثة :

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية في العلاقة السابقة ينتج :

$$\max \tau = \frac{4000 \cdot 16}{\pi \cdot 1,98^3} = 2624 \text{ kp/cm}^2 \leq \text{zul } \tau$$

ب - ٢ عندما يكون المقطع العرضي هو حلقة دائرية :

$$\begin{aligned} \max \tau &= \frac{M_t}{W_t} = \frac{16M_t}{\pi D^4} \cdot \frac{1}{[1 - (d/D)^4]} \leq \text{zul } \tau \\ &= \frac{16 \cdot 4000}{\pi \cdot 2,26^3} \cdot \frac{1}{1 - 0,8^4} = 2989 \text{ kp/cm}^2 \leq \text{zul } \tau \end{aligned}$$

ب - ٣ عندما يكون المقطع العرضي هو مستطيل :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\alpha b^2 d} = \frac{M_t}{\alpha b^3 \frac{d}{b}} \leq \text{zul } \tau$$

من الجدول 7-2 يتم تعيين العامل α من أجل $d/b = 2$.

$$\max \tau = \frac{4000}{0,246 \cdot 1,35^3 \cdot 2} = 3304 \text{ kp/cm}^2 \leq \text{zul } \tau$$

ب - ٤ عندما يكون النابض الدوراني من ثلاثة فوابض، بحيث يتحمل كل منها 1/3 عزم الفتل M_t :

$$\max \tau = \frac{M_t / 3}{W_t} = \frac{M_t}{3 \alpha c^2 a} = \frac{M_t}{3 \alpha c^3 \frac{a}{c}}$$

من أجل $a/c = 3$ فإن العامل α ، حسب الجدول 7.2 ، يبلغ :

$$\alpha = 0,267$$

بتبديل هذه القيمة العددية وبقية القيم الاخرى في العلاقة السابقة يتم التوصل المطلوب :

$$\max \tau = \frac{4000}{3 \cdot 0,267 \cdot 0,89^3 \cdot 3} = 2361 \text{ kp/cm}^2$$

مثال 78 :

حمل قضيب موشوري طوله l ومقطعه العرضي مربع مفرغ رقيق الجدار (صندوق) بعزم القتل M_l (شكل 7-66) .

المعطى :

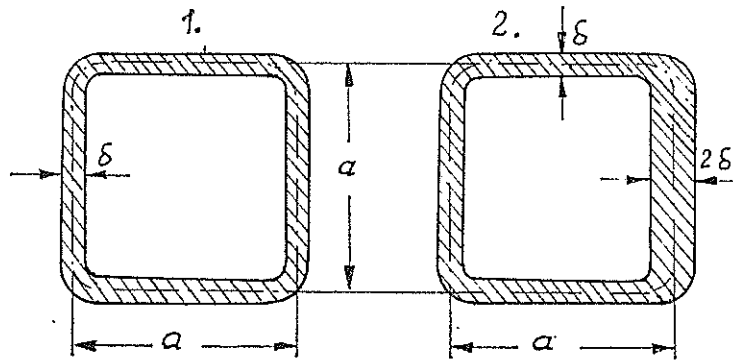
$$M_l = 373 \ 000 \text{ kp cm} , \quad \text{zul } \tau = 700 \text{ kp/cm}^2$$

$$l = 500 \text{ cm} , \quad G = 0,81 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\frac{\delta}{a} = 1/15$$

المطلوب : تصميم المقطع العرضي من أجل الحالات التالية :

- ١ - عندما تكون سماكة الجدران في كافة اضلاع المقطع العرضي متساوية وتبلغ δ .
 - ٢ - عندما تكون سماكة جدران الاضلاع الثلاثة هي δ وسماكة الجدار الرابع هي 2δ .
- كما ينبغي حساب زاوية القتل لكلا الحالتين .



شكل 7 66

الحل :

آ - ١ و ٢ يتساوى الاجهاد الماسي الأعظمي في كلا الحالتين وهو يظهر في الحالة الأولى

في كل الأضلاع أما في الحالة الثانية فيظهر في الضلع ذو السماكة δ (الضلع ذو السماكة الأصغر) ويحسب بواسطة العلاقة العامة التالية :

$$\max \tau = \frac{M_t}{W_t}$$

من الجدول 7-2 يتم تعيين عزم مقاومة الفتل للمقطع العرضي الصندوقي :

$$W_t = 2 F_m \cdot \min \delta$$

أما المساحة التي يغلّفها الخط الاوسط المقطع العرضي داخله فهي في كلا الحالتين متساوية وتبلغ :

$$F_m = a \cdot a$$

$$\min \delta = \frac{a}{15}$$

بالتبديل في علاقة الاجهاد المماسي ، وبعد استخدام شرط التصميم ، ينتج :

$$\max \tau = \frac{M_t}{2 a^2 (a/15)} = \frac{15 M_t}{2 a^3} \leq \text{zul } \tau$$

بحل هذه المتراجحة بالنسبة للمتغير a ينتج :

$$a \geq 3 \sqrt{\frac{15 M_t}{2 \cdot \text{zul } \tau}} = 3 \sqrt{\frac{15 \cdot 373000}{2 \cdot 700}} = 15,87 \text{ cm}$$

هذه القيمة تتبع كلا الحالتين وهي تشير إلى أن تقوية جدار واحد من الصندوق لا تزيد من تحمله بالنسبة للفتل .

ب - ١ زاوية الفتل من أجل القضيب ذو المقطع العرضي بسماكات ثابتة :

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_t}$$

من الجدول 7-2 يتم التوصل لعزم عطالة الفتل :

$$I_t = \frac{4 F_m^2 \delta}{U} , F_m = a^2 , U = 4a$$

$$I_1 = \frac{4a^4 (a/15)}{4a} = \frac{a^4}{15}$$

بتبديل هذه القيمة وبقية القيم العددية ، في العلاقة السابقة ينتج :

$$\varphi = \frac{15 M_l /}{G a^4} = \frac{15 \cdot 373000 \cdot 500}{0,81 \cdot 10^6 \cdot 14,15^4} = 0,0862$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} 0,0862 = 4,94^\circ$$

ب - ٢ زاوية الفتل من أجل القضيب ذو المقطع العرضي بها كات مختلفة :

عندما تكون $\delta \neq \text{const}$ عندئذ ينبغي حساب عزم عطالة الفتل من العلاقة التالية :

$$I_1 = \frac{4F_m^2}{\left(\int \frac{ds}{\delta}\right)}$$

حيث أن :

$$F_m = a \cdot a = a^2$$

$$\delta = a/15$$

$$\left(\int \frac{ds}{\delta}\right) = \frac{a}{\delta} + \frac{a}{\delta} + \frac{a}{\delta} + \frac{a}{2\delta} = \frac{7a}{2\delta}$$

بالتبديل في علاقة عزم عطالة الفتل ينتج :

$$I_1 = \frac{4a^4}{7a/2\delta} = \frac{8}{7} a^3 \delta = \frac{8}{105} a^4$$

بتبديل هذه النتيجة في علاقة حساب زاوية الفتل التالية :

$$\varphi = \frac{M_l /}{G I_1}$$

ينتج :

$$\varphi = \frac{M_l \cdot l \cdot 105}{G \cdot 8 \cdot a^4} = \frac{373000 \cdot 500 \cdot 105}{0,81 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 14,15^4} = 0,0754$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,0754 = 4,32^\circ$$

تشير هذه النتيجة إلى أن زاوية الفتل تصغر بتقوية جدار أحد جوانب المقطع العرضي .

جدول 7.2

جدول عزوم عطالة الفتل I_t وعزوم مقاومة الفتل W_t لبعض المقاطع العرضية الهامة
العلاقات العامة :

البرصهار المحاسن $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}$. زاوية الفتل المزدوجة $\varphi = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{\tau}{\varphi}$ زاوية الفتل .
 M_t عزوم الفتل . I_t عزوم عطالة الفتل . W_t عزوم مقاومة الفتل . G عاصر الفتل .
 τ طبرن الفتل . G عاصر الفتل . • مكان شكل البرصهار المحاسن الدغشي .

مقاطع ملغ (صماء)

المقطع العرضي

I_t عزوم عطالة الفتل

W_t عزوم مقاومة الفتل

ملاحظات

دائرة

$$\frac{\pi d^4}{32}$$

$$\frac{\pi d^3}{16}$$

حلقة دائرية

$$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

$$\frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D}$$

قطع ناقص

$$\frac{\pi}{16} \frac{A^3 \cdot B^3}{A^2 + B^2}$$

$$\pi \frac{A \cdot B^2}{16}$$

يتم في حالة المقاطع العرضية غير المتكعبة استخدام المقادير التالية لتقدير العزوم المختلفة كعزوم عزوم بدئية

سدس منظم

$$0,133 d^4$$

$$0,188 d^3$$

ثمان منظم

$$0,130 d^4$$

$$0,185 d^3$$

مستطيل

$$\beta b^3 d$$

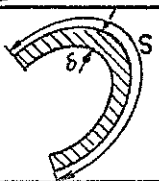
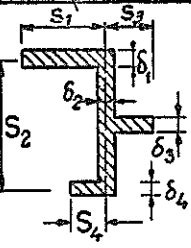
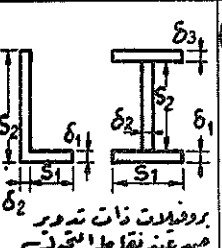
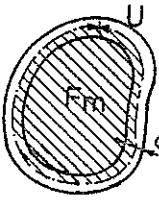
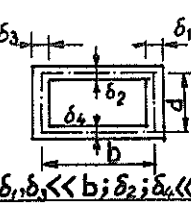
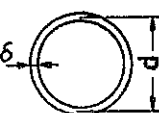
$$\alpha b^2 d$$

d/b	1,00	1,25	1,50	2,00	3,00	4,00	6,00	10,00	∞
α	0,208	0,221	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
β	0,140	0,171	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333

مثلث متساوي الأضلاع

$$\frac{\sqrt{3}}{80} a^4$$

$$\frac{a^3}{20}$$

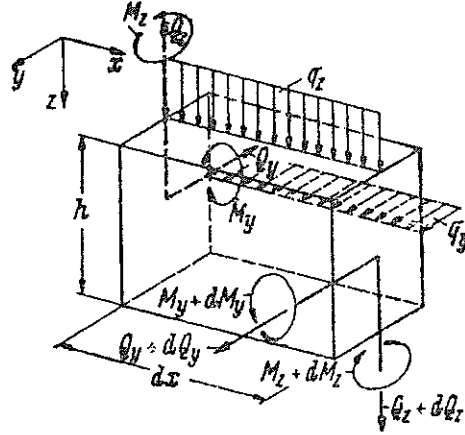
ملاحظات		العزم المقاوم للفتك W_t	عزم عطالة الفتك I_t	المقطع العرضي
مقاطع عرضية رقيقة الجدار	مقطع كروي مفلطح	$\frac{1}{3} \delta^2 S$	$\frac{1}{3} \delta^3 S$	
	مقطع كروي مركب مستطيلات	$\frac{I_t}{\max \delta}$ *)	$\sim \frac{1}{3} \sum_i \delta_i^3 S_i$ الشكل المرسوم جانباً: $\frac{1}{3} (\delta_1^3 S_1 + \delta_2^3 S_2 + \delta_3^3 S_3 + \delta_4^3 S_4)$	
	قبر δ لبيعتين بروفيلون	$\frac{I_t}{\max \delta}$	علاقة تقريبية حسب فوربل (FÖPPEL) $\frac{4}{3} \sum_i \delta_i^3 S_i$ مع عامل التصحيح ويتم الحصول عليه من قارب الفتك	
	*)	$2F_m \min \delta$	$\frac{4 F_m^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$ $\oint = \int_U$ $\delta = \text{const.}$ شبه أميد $\frac{4 F_m^2 \delta}{U}$ **)	
	مقطع كروي صندوق	$2bd \min \delta$	$\frac{4 b d}{\frac{1}{b\delta_1} + \frac{1}{d\delta_2} + \frac{1}{b\delta_3} + \frac{1}{d\delta_4}}$ $\delta_1, \delta_3 \ll b; \delta_2, \delta_4 \ll d$	
	أنبوب (حلقة دائرية رقيقة)	$\frac{\pi}{2} d^2 \delta$	$\frac{\pi}{4} d^3 \delta$	

اسس (مبادئ) نظرية الانعطاف التقنية

GRUNDLAGEN DER TECHNISCHEN BIEGELEHRE

٨ - ١ مقدمة

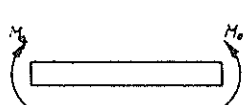
يطلب من القضبان المدروسة أن تكون ابعاد مقاطعها العرضية اصغر بكثير من طولها . تحمل هذه القضبان بعزوم تتعامد أشعتها مع المحور المركزي أو بقوى عمودية على المحور الاوسط للقضيب (بقوى او مزدوجات قوى تقع في مستوي واحد ، يسمى مستوي التحميل ، وير من المحور الاوسط للقضيب) (شكل 8-1a) . ينبغي ان لا تتخطى الاجهادات المتشكلة حد التناسب بحيث تتحقق فيها صلاحية قانون هوك . يمكن ادخال تأثير القوة الناعظمية (القوة الطولية) على الاجهادات بخطوات لاحقة وبلاستفادة من قانون جمع الافعال (قانون التضايد) .



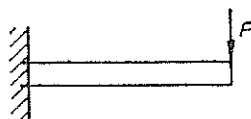
شكل 8-1a

عندما يحمل القضيب بعزم انعطاف ثابت M_0 فقط (شكل 8-1) عندئذ تشكل فيه حالة الانعطاف الصافي (الانطاف الجرد) وفي هذه الحالة تنعدم القوى العرضية . أثناء التغير لا تتشوه المقاطع العرضية بل تبقى مستوية .

اذا كان توزيع عزم الانعطاف على طول المحور للقضيب متغيراً (شكل 8-2) عندئذ تظهر في المقاطع العرضية قوى عرضية ($Q = dM/dx \neq 0$) ايضاً . تسمى هذه الحالة بانعطاف القوة



شكل 8-1



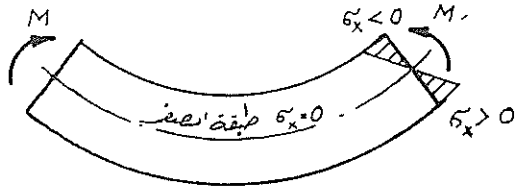
شكل 8-2

الهرضية . فملاوة على الاجهادات الناعمية الناتجة عن عزم الانعطاف تتشكل ايضاً في مستوي المقطع العرضي اجهادات مماسية ناتجة عن القوى العرضية . يدرس كل من هذين الحدين ، في مقاومة المواد التآنييه ، منفصلاً (على حدة) . أما الخطأ الذي ينجم عن الدراسة المنفصلة لحدي الاجهاد فهو ضئيل وذلك لأن الاجهاد المماسي في القضبان الناعفة (الناعلة ، الميفاء) صغير بالنسبة للاجهاد الناعمي (يأخذ الاجهاد المماسي أهميه كبيرة في القضبان القصيرة وفي المقاطع البروفيليه الرقيقة فقط) ولذلك تستخدم في حالة انعطاف القوة العرضية نفس العلاقات التي تستخدم من اجل الانعطاف الصافي (الانعطاف المجرد) . وتسمى نظرية الانعطاف التي تسمح بذلك بنظرية الانعطاف التآنييه . سوف ياجأ أثناء معالجة الانعطاف للاستعانة بفرضية برنولي (BERNOULLI's Hypothesis) في بقاء المقاطع العرضية مستوية بعد التغير والتي تنص بالتفصيل على ما يلي :

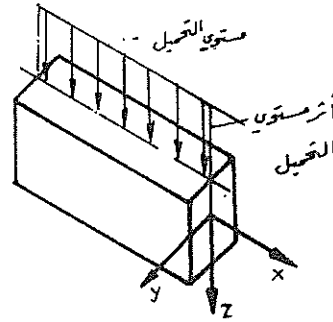
تبقى المقاطع العرضية الناعمية (العمودية) على المحور الاوسط للقضيب التي كانت مستوية قبل التغير ، مستوية أثناء الانعطاف كما انها تبقى بعد التغير ناعمية على المحور الاوسط للقضيب المنعطف . تبعد هذه الفرضية تأثير الاجهادات المماسية على المقطع العرضي وتحقق بشكل دقيق في الانعطاف الصافي .

تنطبق نتيجة تطبيق فرضية برنولي على القضبان المستقيمة مع نتيجة فرضية التوزيع الخطي للاجهادات (فرضية نافير) . يؤدي تطبيق فرضية برنولي على القضبان ذات الانحناء الكبير الى توزيع لخطي الاجهاد .

تبدا لاتجاه عزم الانعطاف الذي يؤثر على المقطع العرضي فان بعض مناطق المقطع العرضي (بعض المحاور ، بعض الألياف) تكون مضغوطة ($\sigma < 0$) وبعض المناطق الاخرى تكون مشدودة $\sigma > 0$. يسمى السطح الذي ينعدم فيه الاجهاد الناعمي والذي لا يتغير طوله والذي يقع بين مجال الشد وبين مجال الضغط (شكل 8-3) بطبقة الصفر او الطبقة المحايدة (الحياضية) كما يسمى الخط الناتج عن تقاطع هذا المستوي مع المقطع العرضي بالمحور الحياضي او خط الصفر . يسمى الخط الذي يرسمه مستوي التحميل على المقطع العرضي بأثر مستوي التحميل (أوباختصار أثر التحميل) (شكل 8-4) .



شكل 8-3



شكل 8-4

علاوة على تقسيم الانعطاف الى انعطاف صافي وانعطاف قوة عرضية وكذلك الى انعطاف القضبان المستقيمة وانعطاف القضبان ذات الانحناء الكبير هناك تقسيم آخر للانعطاف هو الانعطاف المستقيم والانعطاف المنحرف .

يقال عن الانعطاف انه انعطاف مستقيم اذا قطع أثر مستوي التحميل (أثر التحميل) ، المقطع العرضي في محور عطالة رئيسي (أي اذا انطبق أثر مستوي التحميل على أحد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي) (شكل 8-4) وبذلك ينطبق المحور الحيادي (محور الصفر) على أحد المحاور الرئيسية للمقطع العرضي كما ويتعامل مع مستوي التحميل .

ويقال عن الانعطاف انه انعطاف منحرف اذا لم يقطع أثر مستوي التحميل (أثر التحميل) المقطع العرضي في محور عطالة رئيسي .

ان الهدف من هذا الفصل هو إيجاد علاقات تربط بين الاجهادات الداخلية وبين القوى الخارجية المطبقة على الجمل الانشائية .

٨ - ٢ انعطاف القضبان الموشورية (Biegung prismatischer stäbe)

القضبان الموشورية هي قضبان مستقيمة لا يتغير مقطعها العرضي على طول القضيب .

٨ - ٢ - ١ توزيع الاجهادات في الانعطاف المستقيم (الانعطاف وحيد المحور)

يقال عن المقطع العرضي انه في حالة انعطاف مستقيم عندما ينطبق شعاع عزم الانعطاف على احد محاور عطالته الرئيسية ويسمى الانعطاف مستقيماً لان المحور الحيادي ينطبق على احد المحاور الرئيسية للعطالة .

تتكون احداثيات المقطع العرضي المدروس y, z هي محاور عطالة رئيسية مركزية له . وليكن تحميل القضيب مؤلفاً من عزم الانعطاف M_y فقط (شكل 8-6) .

أن قيم القطع M_z, M_y, N_x هي محصلات الاجهاد الناظمي σ_x (أو σ_{xx}) وسيفترض انها توابع معروفة معينة بدلالة القوى الخارجية وردود الافعال .

لمعالجة مشكلة تعيين الاجهاد في أية نقطة من المقطع العرضي للجائز يلزم تطبيق قوانين علم السكون (الستاتيک) للاجسام الصلبة وذلك للحصول على علاقة تربط بين القوى الخارجية وبين الاجهادات الداخلية . أما شروط التوازن العامة المستخدمة في علم السكون فهي :

$$\sum_i K_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0$$

$$\sum_i M_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{zi} = 0$$

بما أن الاجهادات الناظمية في مستوي القطع تشير باتجاه المحور x فان شروط التوازن التالية :

$$\sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{xi} = 0$$

تتحقق من البداية . أما تطبيق ما تبقى من شروط التوازن على سطح القطع $x = \text{const.}$ فيعطي العلاقات التالية :

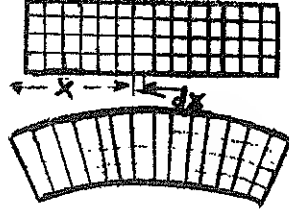
$$\sum K_{xi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_{xx} dF = 0$$

$$\sum M_{zi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x y dF = 0 \quad (8-1)$$

$$\sum M_{yi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x z dF = M_y$$

لكن المعادلات الشرطية هذه (العلاقة 8-1) الناتجة عن شروط التوازن لا تكفي وحدها لتحديد توزيع الاجهادات الناظمية بشكل معين . ولذلك فان مشاكل الانعطاف تعتبر مشاكل غير مقررة ستاتيكيًا . وحتى يستطاع حلها ينبغي اللجوء لدراسة شروط التغير . لقد ثبت للباحثين على مرور الزمن من خلال نتائج التجارب الجراة على قضبان الانعطاف بأن كل النقاط التي تقع قبل التغير على مستوي عمودي على المحور الاوسط للقضيب ، تقع ايضاً بعد التغير على مستوي واحد وهو عمودي على المحور الاوسط للقضيب المتغير (المنعطف) (شكل 85)

ولقد كان أول من توصل لهذه الحقيقة التجريبية هو العالم برنولي (BERNOULLI) ونسبة له تسمى فرضية بقاء المقاطع العرضية مستوية بفرضية برنولي وتسمى نتيجة هذه الفرضية بشرط التوافق .



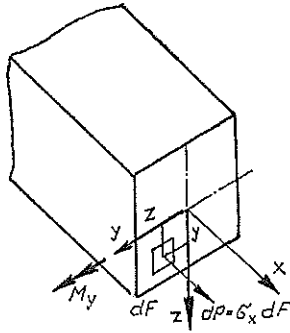
شكل 8-5

حسب فرضية برنولي يمكن إعتبار جميع طبقات المحاور (طبقات الألياف) كدوائر مركزية تتمركز حول نقطة مركز الانحناء K (شكل 8-7) . انطلاقاً من الطبقة غير المتغيرة في الطول (غير المتمددة) يتم الحصول ، بالاستعانة بنصف قطر الانحناء $\rho = \rho(x)$ ، على التغير النسبي الطولي لطبقة الألياف تبعد z عنها :

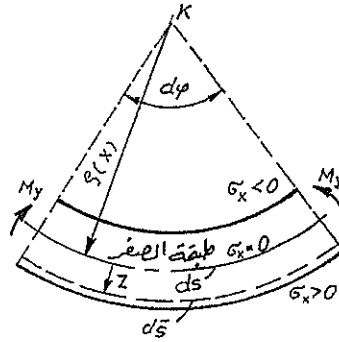
$$\epsilon = \frac{d\bar{s} - ds}{ds} = \frac{(\rho + z)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{z}{\rho(x)} \quad (8-2)$$

وبذلك يأخذ قانون هوك للاجهادات الناعمية الشكل التالي :

$$\sigma_x = \epsilon_x E = E \frac{z}{\rho(x)} \quad (8-3)$$



شكل 8-6



شكل 8-7

بالاعتماد على العلاقة (8-3) فإن شروط التوازن (8-1) تأخذ الشكل التالي :

$$\int_F \sigma_x dF = \frac{E}{\rho(x)} \int_F z dF = 0$$

لانعدام العزم الستاتيكي بالنسبة للمحاور المركزية ينبغي اذاً أن يمر محور الصفير (المحور الحيادي) في حالة الانعطاف الصافي (الانعطاف المجرد) من مركز ثقل المقطع العرضي . وبذلك ينطبق المحور x على المحور الاوسط للقضيب .

$$\int_F \sigma_x y dF = \frac{E}{\rho(x)} \int_F y z dF = \frac{E}{\rho(x)} I_{yz} = 0$$

يتحقق تطابق هذه المعادلة من أجل محاور العطالة الرئيسية ($I_{yz} = 0$) .

$$\int_F \sigma_x z dF = \frac{E}{\rho(x)} \int_F z^2 dF = M_y$$

استناداً الى العلاقة (1-1) فإن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{E}{\rho(x)} = \frac{M_y}{I_{yy}}$$

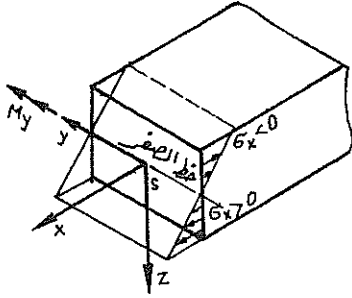
وبمقارنة هذه النتيجة مع العلاقة (8-3) يتم الحصول على علاقة توزيع الاجهاد الناطمي في حالة الانعطاف البسيط (الانعطاف وحيد المحور ، الانعطاف المستقيم) :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z \quad (8-4)$$

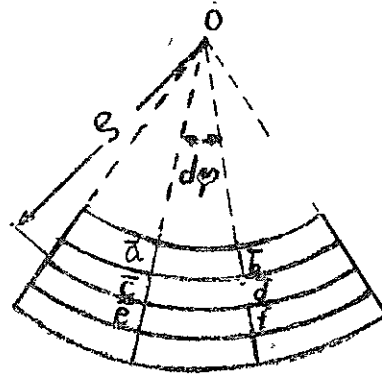
يتحدد خط الصفير (المحور الحيادي) بواسطة المستقيم $z = 0$. تتشكل الاجهادات الناطمية الاعظمية على حواف المقطع العرضي (شكل 8-8) .

بالامكان التوصل لنفس النتيجة السابقة (العلاقة 8-4) وذلك كما يلي :

ليقتطع من الجائز غير المحمل (من الجائز قبل التحميل) عنصراً تفاضلياً طوله dx بعد التحميل ينمطف الجائز (يغير شكله) فيصبح طول العنصر $d\bar{x}$ (ان الشكل a b c d هو شكل العنصر قبل التحميل أما الشكل $\bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{d}$ فهو شكل العنصر بعد التحميل) (شكل 8-9) .



شكل 8-8



شكل 8-9

نتيجة للتحميل تدور المقاطع العرضية للعنصر بالنسبة لبعضها بالزاوية $d\phi$.
علاقة التغير النسبي (التمدد) :

$$\epsilon_x = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{\Delta}{dx} \quad (8-5)$$

فرضية برنولي (شرط التوافق) :

$$\epsilon_x = \bar{a} + b\bar{y} + \bar{c}z \quad (8-6)$$

حيث أن \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} هي ثوابت المعادلة (أمثال المعادلة) .

قانون هوك للاجهادات الناعمة (وهو يربط بين شروط التوازن وبين شرط التوافق) :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (8-7)$$

بتبديل العلاقة (8-6) في (8-7) يتم الحصول على قانون هوك كتابع للاحداثيات z, y (احداثيات المقطع العرضي) :

$$\sigma_x = E\bar{a} + E\bar{b}y + E\bar{c}z$$

بمستبدال الثوابت السابقة المضروبة بعوامل المرونة ، بثوابت جديدة ينتج :

$$\sigma_x = a + by + cz \quad (8-8)$$

بتبديل هذه العلاقة في المعادلات (8-1) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\int_F a \, dF + \int_F b \, y \, dF + \int_F c \, z \, dF = 0 \quad (8.9)$$

$$\int_F a \, y \, dF + \int_F b \, y^2 \, dF + \int_F c \, y \, z \, dF = 0 \quad (8-10)$$

$$\int_F a \, z \, dF + \int_F b \, y \, z \, dF + \int_F c \, z^2 \, dF = M_y \quad (8-11)$$

بسبب كون المحاور z, y محاور مركزية ، فإن العزوم الستاتيكية تساوي الصفر :

$$\int_F y \, dF = 0 \quad ; \quad \int_F z \, dF = 0$$

وبسبب كون المحاور أيضاً محاور عطالة رئيسية ينعدم جداء العطالة :

$$\int_F y \, z \, dF = 0$$

بإدخال عزوم العطالة :

$$I_{yy} = \int_F z^2 \, dF \quad ; \quad I_{zz} = \int_F y^2 \, dF$$

في المعادلات 8-9 حتى 8-11 بعين الاعتبار ، ينتج :

$$a \, F = 0 \quad ; \quad b \, I_{zz} = 0 \quad ; \quad c \, I_{yy} = M_y$$

بسبب كون $F \neq 0$ و $I_{yy} \neq 0$ فإن حل المعادلات السابقة يعطي قيم الثوابت :

$$a = 0 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = \frac{M_y}{I_{yy}} \quad (8-12)$$

بتبديل هذه النتيجة في المعادلة (8-8) يتم الحصول على علاقة الاجهاد الناطمي العطالوبة :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} \, z \quad (8-13)$$

بواسطة هذه العلاقة يمكن تعيين الاجهاد الناطمي في نقطة ما من المقطع العرضي للجائز . ومنها

يتم التوصل الى ان الاجهاد الناظمي يتوزع خطياً بالنسبة للاحداثي z (الاحداثي الذي يشير باتجاه ارتفاع المقطع العرضي) كما ولا علاقة للاجهاد الناظمي بالاحداثي y (الاحداثي الذي يشير الى عرض المقطع العرضي) .

ينعدم الاجهاد الناظمي في جميع نقاط المقطع العرضي التي تقع على المستقيم $z=0$ ويسمى المستقيم المذكور بالمحور الحيادي (خط الصفر) .

يتعامد المحور الحيادي المذكور ، في حالة الانعطاف البسيط (وعندما ينطبق أحد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي على أثر مستوي التحميل أو بكلام مماثل عندما ينطبق شعاع العزم على أحد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي) ، دائماً مع أثر مستوي التحميل .

ليراعى الانتباه الى ان عزم العطالة في المعادلة (8.13) يؤخذ بالنسبة للمحور الحيادي .

٨ - ٢ - ٢ تصميم (تحديد أبعاد) المقاطع العرضية في حالة الانعطاف البسيط

بالاعتماد على العلاقة 8,13 يتم حساب الاجهادات الناظرية الاعظمية بالشكل التالي :

$$\max \sigma_z = \frac{M_y}{I_{yy}} \max z = \frac{M_y}{W_y}$$

يجب أن يتم تصميم (تحديد ابعاد) قضيب يحمل على الانعطاف انطلاقاً من فكرة عدم تخطي الاجهادات الفعلية الموجودة في المقطع العرضي للاجهاد المسموح للمادة (الذي يتعلق بالمادة وبنوع الحمولة) . بما ان الاجهاد الناظمي الأعظمي في المقطع العرضي يتم في المكان الذي يشكل فيه عزم الانعطاف الأعظمي ، اذاً ينبغي ان تحقق الاجهادات الأعظمية العلاقة التالية :

$$| \max \sigma_z | = \frac{| \max M_y |}{W_y} \leq \text{zul } \sigma \quad (8-14)$$

من هذه العلاقة يتم الحصول على العزم المقاوم اللازم والذي يتبع حالة تحميل واجهاد مسموح معلومين ، بالشكل التالي :

$$\text{erf } W_y = \frac{| \max M_y |}{\text{zul } \sigma} \quad (8-15)$$

٨ - ٤ - ٣ توزيع الاجهادات في الانعطاف المنحرف

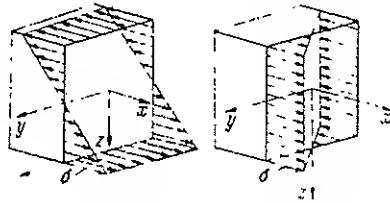
يقال عن المقطع العرضي انه في حالة الانعطاف المنحرف عندما لا ينطبق شعاع عزم الانعطاف على أحد محاوره الرئيسية بل يأخذ اتجاهاً ما في مستوي المقطع العرضي (او بكلام آخر مماثل عندما لا ينطبق اثر مستوي التحميل على احد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي) .

آ - استخراج العلاقات بالاعتماد على علاقات الانعطاف البسيط وتطبيق قانون التينغند

آ - α المحاور z, y هي محاور عطالة رئيسية

يمكن اعادة هذه الحالة الى مجموع حالتي انعطاف مستقيم (بسيط) . بتحليل شعاع العزم (المؤثر) الى مركبتين باتجاه محاور العطالة الرئيسية (شكل 8-10) ينتج :

$$M_y = M \cos \alpha \quad ; \quad M_z = M \sin \alpha \quad (8-16)$$



شكل 8-9 c

بجمع حدود الاجهاد الناتجة عن كل من M_z, M_y (شكل 8-09c) يتم الحصول على اجهاد الانعطاف (الاجهاد الناطمي الناتج عن عزم الانعطاف) التالي :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y \quad (8-17)$$

او

$$\sigma_x = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_{zz}} z - \frac{\sin \alpha}{I_{zz}} y \right) \quad (8-18)$$

يرسم التوزيع الخطي للاجهاد الناطمي مستو مائل . بتبديل $\sigma_x = 0$ في العلاقة (8-18) يتم الحصول على معادلة خط الصفر (المحور الحيادي) التالية :

$$z = y \tan \alpha$$

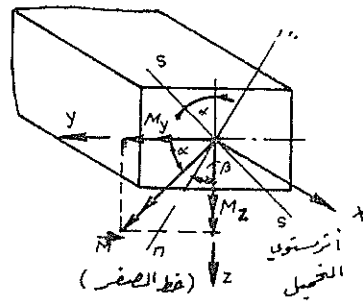
(8-19)

من هذه العلاقة يتبين أن المحور الحيادي في حالة الانعطاف المنحرف هو مستقيم يمر من مركز الثقل ويشكل مع المحور z الزاوية β التي تتعين بالعلاقة التالية :

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \cot \alpha$$

(8-20)

تشكل الاجهادات الناعمية الاعظمية في نقاط القطاع العرضي التي لها أكبر بعد عن محور الصفر (المحور الحيادي ، المحور السليم) .

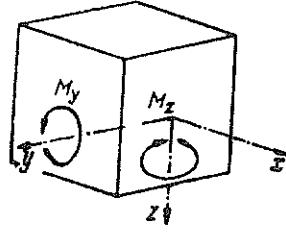


شكل 8-10

ب - استخراج العلاقات بواسطة الاشتقاق

ب - α المحاور z, y هي محاور رئيسية

أن z, y, x هي مجموعة محاور احداثية مركزية متعامدة ينطبق منها المحور x على المحور الاوسط للقصيب أما المحاور z, y فتطبق على محاور العطالة الرئيسية للقطاع العرضي .
تندم القوة العرضية Q والقوة الناعمية (الطولية) N (في الحالات التي لاتندم فيها القوة العرضية يهمل تأثيرها على الانعطاف . اما تأثير القوة الناعمية فيدرس ، في خطوات لاحقة ، في بحث الانعطاف المركب). يتعامد شعاع عزم الانعطاف M مع مستوي التحميل . يرمز لمركبة العزم التي ينطبق شعاعها على المحور y بالرمز M_y كما يرمز لمركبة العزم التي يشير شعاعها الى اتجاه المحور z بالرمز M_z (شكل 8-10 c) .



شكل 8.10c

شروط التوازن :

لمعالجة مشكلة تعيين الاجهاد الذي يتشكل في نقطة ما من المقطع العرضي للجائز ينبغي تطبيق شروط التوازن التالية (وذلك للحصول على علاقات تربط بين قيم القطع M_z, M_y وبين الاجهاد الناظمي $(\sigma_x(y,z))$:

$$\begin{aligned}\sum K_{xi} = 0 : \int_F \sigma_x dF &= 0 \\ \sum M_{yi} = 0 : \int_F \sigma_x z dF &= + M_y \\ \sum M_{zi} = 0 : \int_F \sigma_x y dF &= - M_z ,\end{aligned}\quad (8-21)$$

حيث ان :

$$M_y = M \cos \alpha \quad ; \quad M_z = M \sin \alpha \quad (8-22)$$

اما شروط التوازن المتبقية $\sum M_{xi} = 0$, $\sum K_{zi}$, $\sum K_{yi} = 0$ فهي محققة من البداية. لانكفي المعادلات الناتجة عن شروط التوازن وحدها لمعرفة توزيع الاجهاد في الانعطاف المنحرف ، مما يجعل ايجاده مشكلة غير مقررة متناهيًا ، وهذا يلزم التفتيش عن معادلات اخرى تشتق من شروط التغير للجملية .

شروط التوافق :

بالاستعانة بفرضية برنولي ينتج :

$$\epsilon_x = \bar{a} + \bar{b} y + \bar{c} z \quad (8-23)$$

قانون هوك (للاجهادات الناعمية) :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (8.24)$$

بتبديل شرط التوافق (8.23) في قانون هوك (8.24) فإن علاقة الاجهاد تأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_x = E \bar{a} + E \bar{b} y + E \bar{c} z \quad (8.25)$$

بالاستعاضة عن الثوابت $E \bar{c}, E \bar{b}, E \bar{a}$ بثوابت جديدة ينتج :

$$\sigma_x = a + by + cz \quad (8.26)$$

تشير هذه العلاقة إلى توزيع خطي للاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف للقضبان المستقيمة وهي تمثل معادلة مستوي الاجهاد . بتبديل علاقة الاجهاد (8.26) في معادلات التوازن (8.21) ينتج :

$$\begin{aligned} \int_F a \, dF + \int_F by \, dF + \int_F cz \, dF &= a \int_F dF + b \int_F y \, dF + c \int_F z \, dF \\ &= a F + b S_z + c S_y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_F a z \, dF + \int_F b y z \, dF + \int_F cz^2 \, dF &= a \int_F z \, dF + b \int_F yz \, dF + c \int_F z^2 \, dF \quad (8.22) \\ &= a S_y + b I_{yz} + c I_{yy} = M_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_F a y \, dF + \int_F b y^2 \, dF + \int_F c y z \, dF &= a \int_F y \, dF + b \int_F y^2 \, dF + c \int_F yz \, dF \\ &= a S_z + b I_{zz} + c I_{yz} = - M_z \end{aligned}$$

بسبب كون المحاور z, y محاور مركزية فإن العزوم الستاتيكية بالنسبة لها تساوي الصفر :

$$S_y = S_z = 0 \quad (8.23)$$

وبسبب كون المحاور z, y محاور عطالة رئيسية للقطع العرضي F فإن جداء العطالة بالنسبة لها يساوي الصفر :

$$I_{yz} = I_{zy} = 0 \quad (8-24)$$

بأخذ ما ذكر من الصفات (العلاقات (8-24) و (8-23)) في العلاقة (8.22) بين الاعتبار
ينتج :

$$a F = 0$$

$$c I_{yy} = M_y \quad (8-25)$$

$$b I_{zz} = -M_z$$

بحل مجموعة المعادلات (8-25) يتم الحصول على قيم الثوابت (حيث ان $I_{zz} \neq 0$, $I_{yy} \neq 0$, $F \neq 0$):

$$a = 0 \quad , \quad b = -\frac{M_z}{I_{zz}} \quad , \quad c = \frac{M_y}{I_{yy}}$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة (8-26) يتم الحصول على علاقة توزيع الاجهاد التالية :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y \quad (8-26)$$

أو

$$\sigma_x = M \left(\frac{\cos \alpha}{I_{yy}} z - \frac{\sin \alpha}{I_{zz}} y \right) \quad (8.27)$$

بواسطة هاتين العلاقتين يتم تعيين توزيع الاجهاد الناطمي في حالة الانعطاف المنحرف . تبديل الزاوية α ، المتشكلة بين شعاع العزم ومحور y الموجب ، بإشارة موجبة حسب المفهوم الموجب الرياضي .

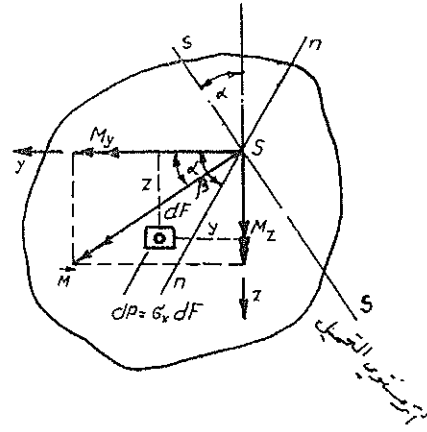
ب - β المحاور z, y هي أية محاور مركزية (ليست محاور عطالة رئيسية)
تمثل هذه الحالة ، الحالة العامة للانعطاف المنحرف للقضبان الموشورية وهي تحتوي على كل الحالات الخاصة السابقة (شكل 8-11) .

يعطي تطبيق شروط التوازن ، العلاقات التالية :

$$\sum K_{xi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x dF = 0$$

$$\sum M_{yi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x z dF = M_y \quad (8.28)$$

$$\sum M_{zi} = 0 \quad : \quad \int_F \sigma_x y dF = -M_z$$



شكل 8-11

حيث أن :

$$M_y = M \cos \alpha ; M_z = M \sin \alpha \quad (8-29)$$

أما شروط التوازن المتبقية $\sum M_{x_i} = 0 ; \sum K_{z_i} = 0 ; \sum K_{y_i} = 0$ فهي محققة من البداية . بسبب التوزيع الخطي للاجهادات الناعمية في حالة انعطاف القضبان المستقيمة يمكن الامتعاضة عن σ_x بمعادلة المستوي التالية :

$$\sigma_x = a + b y + c z \quad (8-30)$$

يتم الحصول على هذه العلاقة بتبديل علاقة التغير النسبي (التمدد) ϵ_x التي يتم الحصول عليها إستناداً على فرضية برنولي في قانون هوك للاجهادات الناعمية . بتبديل العلاقة (8-30) في علاقات شروط التوازن (8-28) يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$aF + b \int_F y dF + c \int_F z dF = 0$$

$$a \int_F z dF + b \int_F y z dF + c \int_F z^2 dF = M_y \quad (8-31)$$

$$a \int_F y dF + b \int_F y^2 dF + c \int_F y z dF = -M_z$$

بحل هذه المعادلات ، يتم تعيين الثوابت a, b, c :

$$a = 0 ; b = \frac{-M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} ; c = \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (8-32)$$

وتبديلها في العلاقة (8-31) يتم الحصول على توزيع الاجهاد الناطمي ممثلاً بالشكل الآتي :

$$\sigma_x = \frac{-M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (8-33)$$

أو ، بعد تبديل العلاقة (8-29) في العلاقة (8-28) ، ممثلاً بالشكل الآتي :

$$\sigma_x = [(-I_{yz} \cos \alpha - I_{yy} \sin \alpha) y + (I_{zz} \cos \alpha + I_{yz} \sin \alpha) z] \frac{M}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} \quad (8-34)$$

بواسطة $\sigma_x = 0$ يتم الحصول ، من العلاقة 8-34 ، على معادلة خط الصفر (المحور الحيادي) التالية :

$$z = \frac{I_{yy} \tan \alpha + I_{yz}}{I_{zz} + I_{yz} \tan \alpha} y = \tan \beta \cdot y \quad (8-35)$$

من المعادلات (8-33) ، (8-34) يمكن الحصول على جميع الحالات الخاصة للانعطاف الصافي (الانعطاف الجرد) .

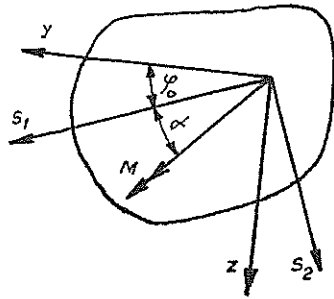
هناك طريق آخر لتعيين توزيع الاجهادات الناطمية في حالة الانعطاف المنحرف ، غير الطريق السابق ، يمكن اتباعه الا وهو إيجاد محاور العطالة الرئيسية (s_1, s_2) وعزوم العطالة الرئيسية (I_1, I_2) المقطع العرضي المدروس (شكل 8-12) . بعد ذلك تحليل عزم الانعطاف M لمركبات بالاتجاهين s_1, s_2 . أما توزيع الاجهاد الناطمي فيتم الحصول عليه عندئذ من العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{M \cos \alpha}{I_1} s_2 - \frac{M \sin \alpha}{I_2} s_1$$

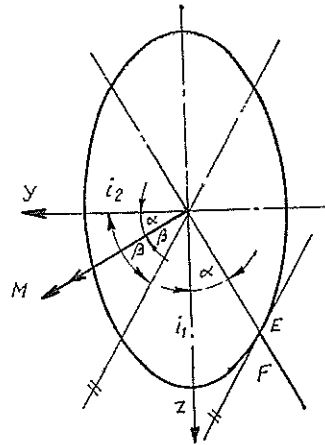
وهذا الحل لا بأس به ولكن يعنيه أمران :

أولهما : التعثر الذي قد يحدث في تحديد المحورين الرئيسين وقيمة عزوم العطالة الرئيسية بالنسبة لكل منها .

وثانيهما : ضرورة إيجاد عزوم الانعطاف بالنسبة لهذين المحورين وما قد يرافق هذا من مشقة وحاجة الى إيجاد الأبعاد من الرسم واحتمال عدم دقة هذا الرسم الى الحد المطلوب .



شكل 8-12



شكل 8-13

كل هذا دفع الى التفكير في طريقة اخرى والى البحث عن وسيلة مناسبة بدرجة اكبر تؤدي للحصول على معادلة عامة لتوزيع الاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف ، تصلح لكل اوضاع المحاور المركزية z, y .

ج - الطرائق التخطيطية لتعيين المحور الحيادي في حالة الانعطاف المنحرف
لتعيين موضع المحور الحيادي بسرعة يمكن أيضاً علاوة على الطريق التحليلي اتباع الطرائق التخطيطية التالية :

ج - ١ تعيين المحور الحيادي تخطيطياً بالاستعانة بقطع ناقص العطالة
يحدد اتجاه المحور الحيادي عندما يكون قطع ناقص العطالة معلوماً برسم مماس على القطع يمر من نقطة تقاطع القطع مع أثر مستوي التحميل (شكل 8.13) .

تكتب معادلة قطع ناقص العطالة بالشكل التالي (انظر العلاقة b 1-59) :

$$y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} = \text{const.}$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$y_E I_{yy} + z_E \cdot z' I_{zz} = 0$$

يتم تحديد اتجاه المماس :

$$z' = - \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \cdot \frac{y_E}{z_E}$$

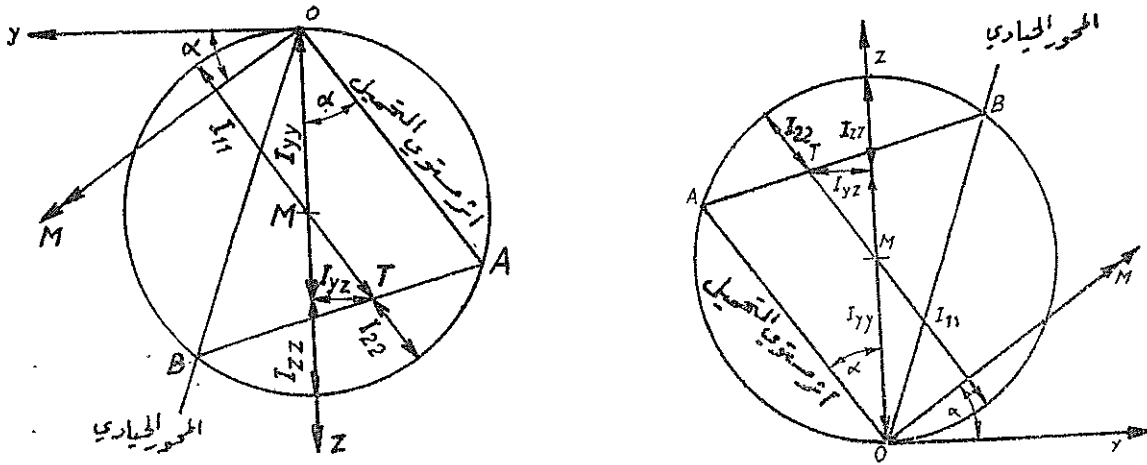
بالاستعانة بالعلاقة :

$$-\frac{y_E}{z_E} = \operatorname{tg} \alpha$$

يتم الحصول على معادلة المحور الحيادي التالية :

$$z = \frac{I_{yy}}{I_{zz}} y \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \beta$$

ج - ٢ تعيين المحور الحيادي تخطيطياً بالاستعانة بدائرة عطالة مور - لاند
بالامكان تحديد موضع المحور الحيادي تخطيطياً بالاستعانة بدائرة عطالة مور - لاند
(شكل 8-14).



شكل 8.14

يرسم شعاع العزم M حسب اتجاهه ابتداء من مبدأ مجموعة الاحداثيات . ير مستوى التحميل الذي يتعامد مع شعاع العزم من المستقيم OA . يرسم مستقيم يصل بين النقطة A والنقطة الرئيسية للعطالة T والذي يقطع الدائرة في B يتحدد الاتجاه OB الذي يمثل موضع المحور الحيادي . سيتم فيما يلي البرهان على صحة التصميم من خلال حالتين خاصتين .

α - لتكن المحاور z, y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي (شكل 8-15) .

لقد تم تحليلها الحصول على معادلة خط الصفر (المحور الحيادي) التالية :

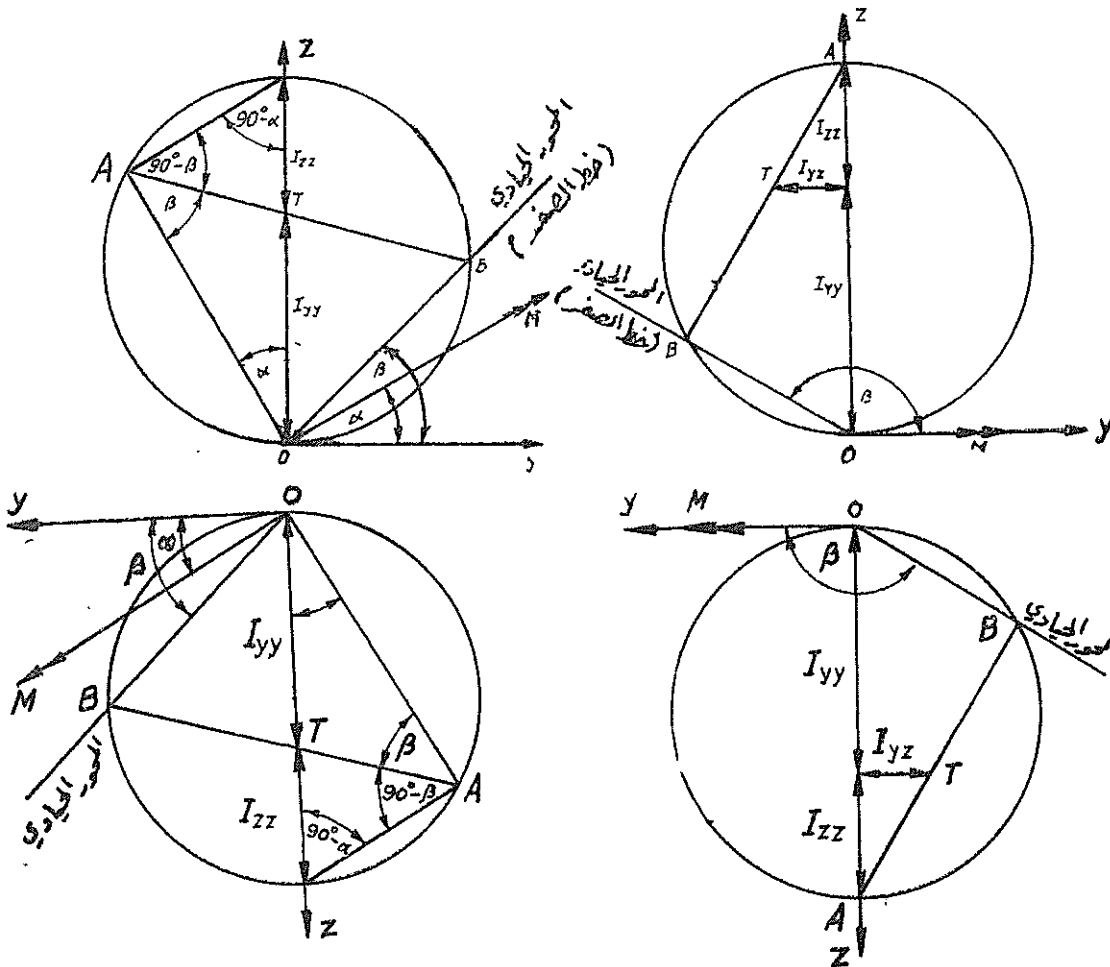
$$z = \frac{I_{yy}}{I_{zz}} y \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \beta$$

من الشكل (8-15) يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{\overline{TA}}{I_{zz}} = \frac{\sin (90^\circ - \alpha)}{\sin (90^\circ - \beta)} ; \frac{\overline{TA}}{I_{yy}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

من هذه العلاقة ينتج :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \operatorname{tg} \alpha$$



شكل 8-15

شكل 8-16

$\beta = 0$ (شكل 8-16) المحاور z, y ليست محاور رئيسية

لقد تم تحليلياً الحصول على العلاقة التالية :

$$z = + \frac{I_{yz}}{I_{zz}} \lambda$$

من الاشكال يتم فوراً قراءة هذه العلاقة .

تلخيص طريقة انشاء المحور الحيادي تخطيطياً بواسطة دائرة عطالة مور - لاند

α - المحاور z, y محاور عطالة رئيسية .

المعلوم : $I_{yy} = I_1$, $I_{zz} = I_2$, $I_{yz} = 0$ وكذلك إما شعاع العزم او أثر مستوي التحميل (شعاع العزم دائماً عمودي على اثر مستوي التحميل) .

المطلوب : تعيين موضع المحور الحيادي (محور الصفر) .

الحل :

بعد اختيار مقياس مناسب للرسم :

١ - ترسم الاحداثيات z, y في مركز ثقل المقطع العرضي s .

٢ - ترسم عزوم العطالة I_{yy} , I_{zz} ابتداء من s وعلى المحور z .

٣ - يرسم أثر مستوي التحميل (عندما يكون شعاع العزم هو المعلوم يقام عليه عموداً يمر من مبدأ مجموعة الاحداثيات ، الذي يمثل في نفس الوقت مركز ثقل المقطع العرضي . هكذا العمود يمثل أثر مستوي التحميل) .

٤ - تنصف المسافة $I_{yy} + I_{zz}$ في النقطة m .

٥ - ترسم دائرة مركزها m ونصف قطرها $(I_{yy} + I_{zz})/2$. فتقطع اثر مستوي التحميل في النقطة A .

٦ - توصل النقطة A والنقطة T بمستقيم فيقطع الدائرة في النقطة B . ان النقطة B هي نقطة من المحور الحيادي .

٧ - المحور الحيادي يمر من مركز الثقل . اذاً يوصل s, B يتم الحصول على المحور الحيادي.

β - المحاور zy ليست رئيسية للعطالة .

المعطى: I_{yz} , I_{zz} , I_{yy} وشعاع العزم او اثر مستوي التحميل (شعاع العزم دائماً عمودي على اثر مستوي التحميل) .
المطلوب : تحديد موضع المحور الحيادي .

الحل :

بعد اختيار مقياس مناسب للرسم :

- ١ - ترسم الاحداثيات z, y في مركز ثقل المقطع العرضي s .
- ٢ - ترسم عزوم العطالة I_{yy} , I_{zz} ابتداء من s وعلى المحور z . أما جـداء العطالة I_{yz} فيرسم عمودياً على المحور z ابتداء من نهاية I_{yy} . ($I_{yz} > 0$ يرسم باتجاه المحور y , $I_{yz} < 0$ يرسم بعكس اتجاه المحور y) .
- ٣ - يرسم أثر مستوي التحميل (شعاع العزم M يتعامد على اثر مستوي التحميل) .
- ٤ - تنصف المسافة $I_{yy} + I_{zz}$ في النقطة m .
- ٥ - ترسم دائرة مركزها m ونصف قطرها $(I_{yy} + I_{zz})/2$. تقطع هذه الدائرة اثر مستوي التحميل في النقطة A .
- ٦ - توصل النقطة A والنقطة T بمستقيم فيقطع الدائرة في النقطة B . هذه النقطة هي نقطة من المحور الحيادي .
- ٧ - ير المحور الحيادي في الانعطاف المنحرف من مركز الثقل s . إذاً بوصل s, B يتم الحصول على المحور الحيادي .

٨ - ٢ - ٤ انعطاف مع قوة ناظرية (الانعطاف المركب)

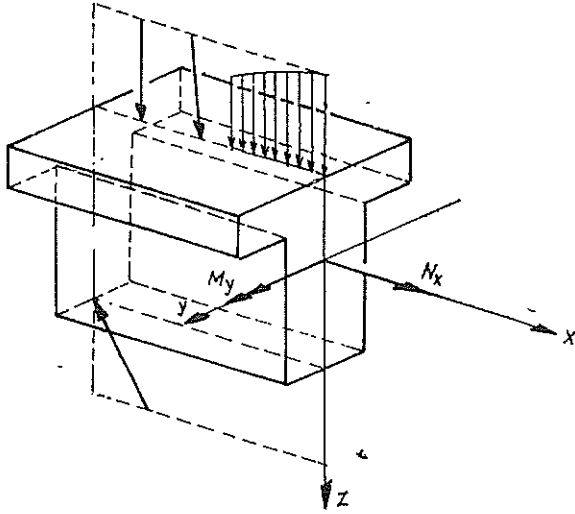
يقال عن المقطع العرضي انه موجود في حالة انعطاف مركب عندما يقع تحت تأثير عزم انعطاف وقوه ناظرية .

آ - توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط مع القوة الناظرية

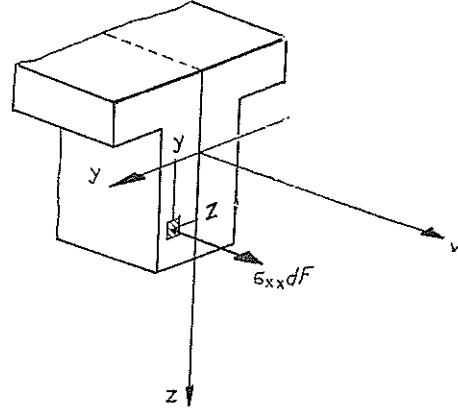
فيما يلي سوف تتم دراسة قضيب مستقيم مرّن يحتوي مقطعه العرضي $x = \text{const.}$ على قيم القطع المؤلفة من عزم الانعطاف M_y والقوة الناظرية N_x (شكل 8-17) . أما القوة العرضية فلان وجدت فسوف يفض النظر عنها بشكل مبديء .

آ - ١ إيجاد توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط والقوة الناظرية بالاشتقاق.
الفرضيات :

تقع المحولات المؤثرة ؛ في المستوي z, x (مستوي التحميل) فقط .



شكل 8-17



شكل 8-18

المحاور y, z هي محاور عطالة رئيسية ($I_{yz} = 0$) للمقطع العرضي .
فرضية برنولي :

تبقى المقاطع العرضية المستوية العمودية على المحور الاوسط للقضيب قبل التغير ، بعد التغير أيضاً مستوية وعمودية على المحور الاوسط للقضيب المتغير . لانعدام القوة العرضية (أو اعتبارها بشكل مبدئي غير موجودة) فإن كل عنصر dF من المقطع العرضي يحتوي على الاجهاد الناطمي $\sigma_{xx}(y,z)$ (شكل 8-18) .

لمعالجة مشكلة تحديد الاجهاد الناطمي $\sigma_{xx}(y,z)$ (يمكن كتابته $\sigma_x(y,z)$) في نقطة ما من مقطع عرضي لجائر ينبغي تطبيق شروط التوازن التالية :

$$\sum_i K_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0$$

$$\sum_i M_{xi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{zi} = 0$$

بما ان الاجهادات المتشكلة في مستوي المقطع العرضي هي اجهادات ناظمية باتجاه المحور x فقط فان شروط التوازن :

$$\sum_i K_{yi} = 0 \quad ; \quad \sum_i K_{zi} = 0 \quad ; \quad \sum_i M_{xi} = 0$$

تتحقق من البداية ؛ أما بقية شروط التوازن فلها تعطي المعادلات التالية :

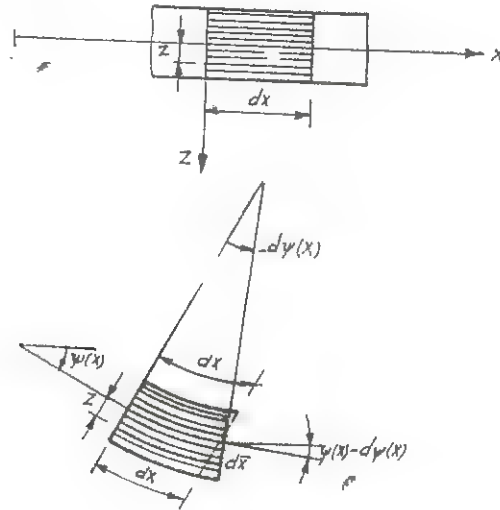
$$\sum_i K_{x,i} = 0 : \int_F \sigma_{xx} dF = N_x$$

$$\sum M_{y,i} = 0 : \int_F \sigma_{xx} \cdot z dF = M_y \quad (8.36)$$

$$\sum M_{z,i} = 0 : \int_F \sigma_{xx} \cdot y dF = 0$$

لكن شروط التوازن الممثلة بالمعادلات الثلاثة السابقة لا تكفي وحدها لتعيين توزيع الاجهاد الناطمي وبذلك فان مشكلة ايجاد توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط المركب هي مشكلة غير مقررة ستاتيكيًا ، لذلك ينبغي التفتيش عن تغيرات الجائز الممكنة هندسيًا .

لقد كانت نتيجة تلك البحوث والدراسات هي التوصل لما يسمى بشروط التوافق . تشير فرضية برنولي في حالة الانعطاف المستقيم مع القوة الناطمية (الانعطاف المستقيم المركب) إلى دوران المقطعين العرضيين اللامتناهيين في القرب بالزاوية $d\phi$ الواقعة في المستوي zx (شكل 8-19).



شكل 18-9

إن استطالة محاور القصيب (آلياف القصيب) $d\bar{x} - dx$ وكذلك تمدها (تغيرها النسبي الخطي) :

$$\epsilon_{xx} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx}$$

هي توابع خطية للاحداثي z وبذلك يمكن التعبير عن فرضية برنولي بالعلاقة التالية :

$$\varepsilon_{xx} = \bar{a} + \bar{b} z \quad (8.37)$$

تسمى هذه المعادلة بشرط التوافق (إن الشكل العام هو $\varepsilon_{xx} = a + bz + cy$. بتابعة الحساب يثبت ان $c = 0$) . والآن ينبغي بواسطة قانون هوك إيجاد ترابط بين معادلات التوازن (8-36) وبين شرط التوافق (8-37) . بضرب العلاقة (8-37) بمعامل المرونة (الطولي) E وبأخذ قانون هوك بعين الاعتبار يتم الحصول على العلاقة الخطية للاجهاد الناضجي التالية :

$$E \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} = a + bz \quad (8.38)$$

تمثل هذه العلاقة ، التي تربط بين فرضية برنولي المثلة بشرط التوافق وبين قانون هوك ، العلاقة الخطية لتوزيع الاجهاد الناضجي بالنسبة لارتفاع المقطع العرضي z (بالنسبة لمحور z) . بتبديل العلاقة (8-38) في العلاقات (8-36) وبالإستعانة بالعزوم الستاتيكية وعزوم العطالة بالنسبة للمحاور المركزية الرئيسية التالية :

$$S_y = \int_F z \, dF = 0 \quad ; \quad S_z = \int_F y \, dF = 0$$

$$I_{yy} = \int_F z^2 \, dF \quad ; \quad I_{zz} = \int_F y^2 \, dF \quad ; \quad I_{yz} = \int_F y z \, dF = 0$$

تم الحصول على ما يلي من العلاقات :

$$\int_F (a + bz) \, dF = a \int_F dF + b \int_F z \, dF = a F + b S_y = a F = N_x$$

$$\int_F z (a + bz) \, dF = a \int_F z \, dF + b \int_F z^2 \, dF = a S_y + b I_{yy} = b I_{yy} = M_y$$

$$\int_F y (a + bz) \, dF = a \int_F y \, dF + b \int_F y z \, dF = a S_z + b I_{yz} = 0$$

من العلاقات الاوليتين ينتج :

$$a = \frac{N_x}{F} \quad , \quad b = \frac{M_y}{I_{yy}}$$

أما العلاقة الثالثة فمحققة بالتطابق . وبذلك يتم الحصول من العلاقة (8-38) بعد تبديل المتوابع على توزيع الاجهاد الناظمي لقضيب موشوري يحمل على الانعطاف وبقوة ناظمية ، الممثل بالعلاقة التالية :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \quad (8.37 \text{ b})$$

حالات خاصة :

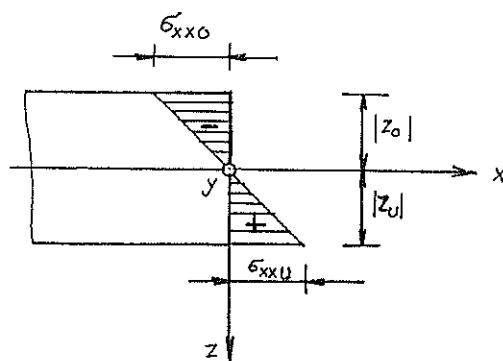
إذا احتوى المقطع العرضي للجائز على قوة ناظمية فقط ، أي $N \neq 0$, $M_y = 0$ عندئذ يتشكل في المقطع العرضي إجهاد ناظمي ثابت (التوزيع) :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F}$$

لقد تم التأكد من هذه الحقيقة أثناء دراسة القضيب المشدود/المضغوط . أما إذا احتوى المقطع العرضي للجائز على عزم إنعطاف فقط عندئذ يقال عنه انه موجود في حالة انعطاف صافي (انعطاف مجرد) أي $N = 0$, $M_y \neq 0$ ، وفي هذه الحالة فان توزيع الاجهاد الناظمي يأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

لقد تم في الشكل (8.20) تمثيل هذه المعادلة من أجل $M_y > 0$.

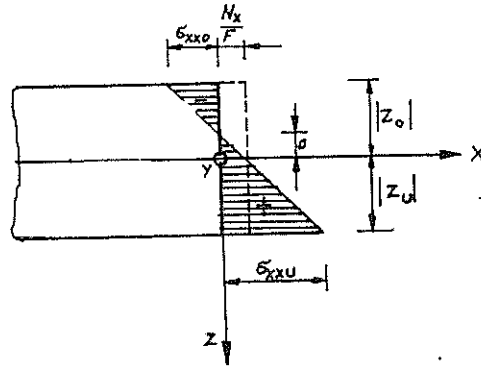


شكل 8.20

ينعدم الاجهاد الناطمي (في حالة الانعطاف البسيط) في نقاط المقطع العرضي التي تقع على المستقيم $z=0$ ويسمى هذا الخط كما سماه العالم نافيير بالمحور الحيادي أو خط الصفر .
في حالة كون $N_x \neq 0$, $M_y \neq 0$ فان توزيع الاجهاد الناطمي يأخذ ، حسب العلاقة (8.37) ، الشكل التالي :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \quad (8.38b)$$

لقد تم في الشكل (8.21) تمثيل الاجهاد الناطمي في حالة كون $M_y > 0$, $N_x > 0$.



شكل 8.21

تبلغ الاجهادات الناطمية على حواف المقطع العرضي القيم التالية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xxu} &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} |z_u| = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yyu}} \\ \sigma_{xx0} &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} |z_0| = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yy0}} \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

تعدم الاجهادات الناطمية في النقاط التي تقع على مستقيم يوازي المحور y ويبعد عنه بالمسافة :

$$z_0 = - \frac{N_x}{M_y} \frac{I_{yy}}{F} = - \frac{N_x}{M_y} i_y^2 \quad (8.40)$$

إذاً المستقيم $z=z_0$ هو المحور الحيادي في حالة الانعطاف البسيط مع القوة الناطمية . اذا

كانت قيم إجهادات الشد المسموحة $zul \sigma_z$ واجهادات الضغط المسموحة $zul \sigma_D$ معلومة فإن علاقة الاجهاد الناظمي من أجل الانعطاف المستقيم مع القوة الناظمية هي التالية :

$$zul \sigma_D \leq \frac{N_v}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \leq zul \sigma_z \quad (8.40b)$$

من هذه العلاقة يتم الحصول على علاقات الكشف عن الاجهادات الناظمية التالية :

$$zul \sigma_D \leq \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{I_{yy}} z \leq zul \sigma_z \quad (8.40 c)$$

$$zul \sigma_D \leq \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \leq zul \sigma_z$$

في حالة الانعطاف الصافي البسيط فإن علاقات الكشف عن الاجهادات تأخذ الشكل الآتي :

$$zul \sigma_D \leq -\frac{M_y}{W_{yy0}} \leq zul \sigma_z$$

$$zul \sigma_D \leq \frac{M_y}{W_{yyu}} \leq zul \sigma_z$$

تأخذ هذه العلاقات شكلاً مبسطاً ، عندما تؤخذ القيمة المطلقة $|M_y|$ للعزم M_y ويؤخذ العزم الاصفري $\min W_{yy}$ وهو التالي :

$$\frac{|M_y|}{\min W_{yy}} \leq |zul \sigma| \quad (8.41)$$

ينبغي في هذه العلاقة أخذ إما $|zul \sigma_D|$ أو $|zul \sigma_z|$ واعتباره كـ $|zul \sigma|$ وذلك حسبها تكون الاجهادات الموجودة هي اجهادات شد أو اجهادات ضغط . لتصميم المقطع العرضي للجائز وفي حالة كون عزم الانعطاف والاجهاد المسموح معلومين ، يمكن استخدام العلاقة (8.41) وتعيين العزم المقاوم الاصفري التالي :

$$\text{erf } W_y \geq \frac{|M_y|}{|zul \sigma|} \quad (8.42)$$

في حالة كون العزم المقاوم الاصفري والاجهاد المسموح معلومين عندئذ يمكن إيجاد القيمة المطلقة لعزم الانعطاف المسموح الذي يستطيع المقطع العرضي تحمله ، بواسطة العلاقة التالية :

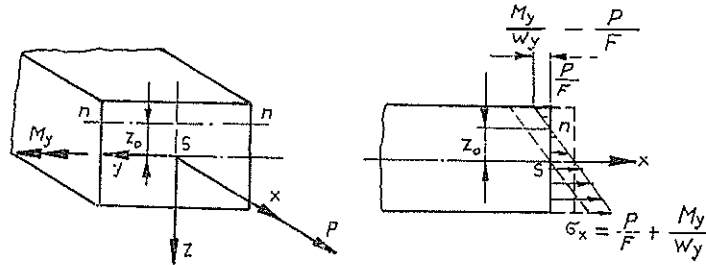
$$| \text{zul } M | \leq \min W_y | \text{zul } \sigma | \quad (8.42 \text{ b})$$

٢ - إيجاد توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف البسيط والقوة الناعمية باستخدام قانون التنضد اذا احتوى المقطع العرضي $x=\text{const}$ على عزم انعطاف M_y وقوة ناعمية تمر من مركز ثقله N_x (تعتبر $N_x > 0$ عندما تكون قوة شد و $N_x < 0$ عندما تكون قوة ضغط . المحاور z, y هي محاور عطالة رئيسية) عندئذ يتم الحصول على توزيع الاجهاد الناعمي بواسطة جمع (تنضد) الاجهاد الناتج عن M_y مع الاجهاد الناتج عن N_x (شكل 8,22) كما تشير العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \sigma_x N + \sigma_x M = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z \quad (8.43)$$

من هذه العلاقة يتبين أن خط الصفر (المحور الحيادي ، المحور السليم) يوازي المحور y ويبعد عنه مسافة :

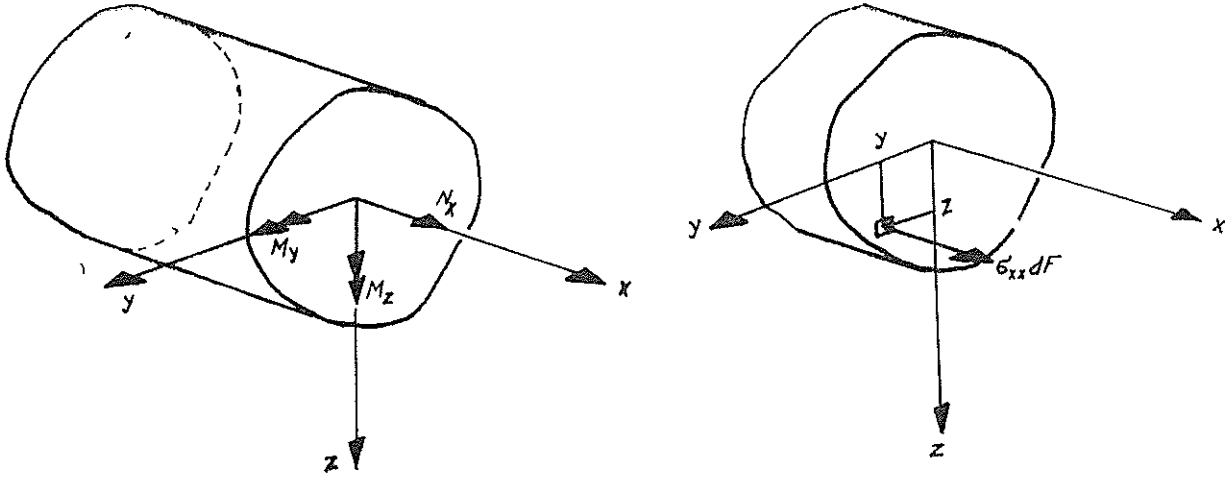
$$z_0 = - \frac{N_x}{M_y} \frac{I_{yy}}{F} = - \frac{N_x}{M_y} i_y^2 \quad (8.44)$$



شكل 8.22

ب - توزيع الاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف مع القوة الناعمية

يقال عن المقطع العرضي انه موجود في حالة انعطاف منحرف مع قوة ناعمية (انعطاف منحرف مركب) عندما يقع تحت تأثير عزوم الانعطاف M_z, M_y والقوة الناعمية N في آن واحد (شكل 8-22b). للتمكن من دراسة توزيع الاجهاد الناعمي تحتار مجموعة المحاور الاحداثية المتعامدة x, y, z ويثبت منها الاحداثي x في محور القضيب بحيث ينطبق عليه كما يثبت مبدأ الاحداثيات z, y في مركز ثقل المقطع العرضي (z, y هي اذلاً محاور مركزية) .



شكل 8-22b

ب - ١ اشتقاق العلاقات بالاستعانة بقانون التنبؤ

α - المحاور z, y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي

بجمع الاجهاد الناطمي الناتج عن كل من N_x وعن M_y, M_z :

$$\sigma_{xN} = \frac{N_x}{F}$$

$$\sigma_{xMy} = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma_{xMz} = - \frac{M_z}{I_z} y$$

يتم الحصول على علاقة الاجهاد التي تصلح من أجل الانعطاف المنحرف المركب في حالة كون z, y محاور عطالة رئيسية :

$$\sigma_x = \sigma_{xN_x} + \sigma_{xM_y} + \sigma_{xM_z} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (8-45)$$

β - المحاور z, y ليست محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي

بجمع الاجهاد الناطمي الناتج عن القوة الناطمية σ_{xN_x} مع الاجهاد الناطمي الناتج عن حالة الانعطاف المنحرف الصافي (المجرد) :

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{F}$$

$$\sigma_{xy} = - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{zy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{zy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z$$

يتم الحصول على علاقة الاجهاد التي تصلح من اجل الانعطاف المنحرف المركب في حالة كون z, y أية محاور مركزية للمقطع العرضي (ليست محاور رئيسية) :

$$\sigma_x = \sigma_{xx} + \sigma_{xy} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{zy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{zy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (8-46)$$

ب - ٢ اشتقاق العلاقات بالاستخراج

α - المحاور z, y ليست محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي

ان اول ما يتبادر الى الذهن لتعيين توزيع الاجهادات الناعمية في حالة الانعطاف المنحرف المركب هو تحديد وضع المحورين الرئيسيين s_1, s_2 وكذلك تعيين عزوم العطالة الرئيسية I_1, I_2 للمقطع العرضي المدروس وذلك كما ورد في الفقرة السابقة . بعد ذلك تحليل عزم الانعطاف M الى مركبتين باتجاه المحاور الرئيسية M_1, M_2 ومن ثم استعمال معادلة ايجاد توزيع الاجهاد الناعمي الخاصة بالمحاور الرئيسية . وهذا الحل لا بأس به ولكن يعيبه امران .

أولهما : التعثر الذي قد يحدث في تحديد المحورين الرئيسيين وفي قيمة عزوم العطالة الرئيسية بالنسبة لكل منها .

ثانيهما : ضرورة ايجاد عزوم الانعطاف بالنسبة لهذين المحورين وما قد يرافق هذا من مشقة وحاجة الى ايجاد الابعاد من الرسم واحتمال عدم دقة هذا الرسم الى الحد المطلوب .

كل هذا يدفع الى التفكير في طريقة اخرى والى البحث عن وسيلة مناسبة بدرجة اكثر تؤدي للحصول على معادلة عامة لتوزيع الاجهاد في حالة الانعطاف المنحرف المركب وتصلح لكل اوضاع المحاور المركزية z, y .

تتطلب دراسة مشكلة تعيين توزيع الاجهاد الناعمي في مقطع عرضي من جائز الى تطبيق شروط التوازن وذلك للحصول على علاقات تربط بين القوى الخارجية وبين الاجهادات الداخلية (التي تعتبر قيم القطع محصلات لها) .

شروط التوازن : (ويقصد فيها هنا بشكل دقيق مساواة محصلة الاجهادات الناعمية في المقطع العرضي بقيم القطع N_x, M_y, M_z) .

لقد تم في علم السكون إيجاد علاقات تربط بين قيم القطع (والتي سيكتفى منها في هذا الفصل فقط بالقوة الناعمية N_x وعزم الانعطاف M الذي يمكن تحليله إلى مركبتين M_x, M_y) في العنصر الانشائي المدروس وبين القوى الخارجية المؤثرة على الجملة الانشائية وذلك بتطبيق شروط التوازن بعد اجراء القطع اللازم . لذلك سيفترض هنا بأن قيم القطع M_x, M_y, N_x التي تعتبر محصلات للاجهاد الناعمي σ_x ، هي توابع معروفة معينة بدلالة القوى الخارجية . وسيكتفى بإيجاد العلاقات التي تربط بين الاجهادات الناعمية σ_x وبين قيم القطع M_x, M_y, N_x وذلك انطلاقاً من فكرة التكافى الستاتيكي الموجود بين قيم القطع وبين محصلات الاجهادات الناعمية المؤثرة في أي مقطع عرضي من القضيب . بتطبيق شروط التوازن (أو بكلام أدق المساواة بين قيم القطع وبين محصلات الاجهاد الناعمي في المقطع العرضي) يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}\sum_i K_{xi} &= 0 : \int_F \sigma_x dF = N_x \\ \sum_i M_{yi} &= 0 : \int_F \sigma_x z dF = M_y \\ \sum_i M_{zi} &= 0 : \int_F \sigma_x y dF = -M_z\end{aligned}\quad (8.47)$$

أما بقية شروط التوازن :

$$\sum_i K_{yi} = 0 ; \sum_i K_{zi} = 0 ; \sum_i M_{xi} = 0$$

فمحققة من البداية ، لكن شروط التوازن وحدها لا تكفي لتعيين توزيع الاجهاد الناعمي في حالة الانعطاف المنحرف المركب لذلك يلجأ الى شروط التغير التي تستخلص من تغيرات الجسم الممكنة هندسياً والتي تسمى هنا بشرط التوافق .

شرط التوافق :

إستناداً الى فرضية برنولي فان معادلة التمدد (التغير النسبي الخطي) في أي نقطة من مستوي المقطع العرضي تحقق معادلة المستوي التالية :

$$\epsilon_x = \bar{a} + \bar{b} y + \bar{c} z \quad (8.48)$$

حيث أن z, y هي أية محاور مركزية في المقطع العرضي وأن $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ هي ثوابت عددية .
قانون هوك للاجهادات الناعمة :

بواسطة قانون هوك يمكن الربط بين شروط التوازن وبين شرط التوافق :

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (8-49)$$

بتبديل العلاقة (8.48) في العلاقة (8.49) يتم الحصول على المعادلة التالية :

$$\sigma_x = E\bar{a} + E\bar{b}y + E\bar{c}z$$

وبالاستعاضة عن الثوابت $E\bar{a}, E\bar{b}, E\bar{c}$ بثوابت جديدة ينتج :

$$\sigma_x = a + by + cz \quad (8-50)$$

وكل ما يلزم الآن هو تحديد قيمة كل من الثوابت a, b, c . وهذه المناسبة فلت توزيع الاجهادات الناعمة الممثل بهذه العلاقة يطلق عليه اسم التوزيع المستوي للاجهادات . بتبديل العلاقة (8.50) في العلاقة (8.47) وبعد الرجوع لتعاريف عزوم السطوح للدرجة الاولى والثانية (العزم الستاتيكي وعزوم العطالة وجداء العطالة) :

$$I_{yy} = \int_F z^2 dF \quad ; \quad I_{zz} = \int_F y^2 dF \quad ; \quad I_{yz} = \int_F yz dF$$

$$S_y = \int_F z dF \quad ; \quad S_z = \int_F y dF$$

يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$\begin{aligned} N_x &= \int_F (a + by + cz) dF = a \int_F dF + b \int_F y dF + c \int_F z dF \\ &= aF + bS_z + cS_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_F (a + by + cz) z dF = a \int_F z dF + b \int_F yz dF + c \int_F z^2 dF \\ &= aS_y + bI_{yz} + cI_{yy} \end{aligned} \quad (8-51)$$

$$\begin{aligned} -M_z &= \int_F (a + by + cz) y dF = a \int_F y dF + b \int_F y^2 dF + c \int_F yz dF \\ &= aS_z + bI_{zz} + cI_{yz} \end{aligned}$$

بما أن المحاور y, z هي محاور مركزية المقطع العرضي إبدأً فإن العزوم الستاتيكية بالنسبة لها تساوي الصفر ، أي أن :

$$S_y = \int_F z \, dF = 0 \quad ; \quad S_z = \int_F y \, dF = 0 \quad (8-52)$$

بإدخال هذه النتيجة في العلاقات (8.51) بعين الاعتبار يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$N_x = a F$$

$$M_y = b I_{yz} + c I_{yy} \quad (8-53)$$

$$-M_z = b I_{zz} + c I_{yz}$$

بحل هذه المعادلات يتم تعيين الثوابت :

$$a = \frac{N_x}{F}$$

$$b = - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = - \frac{M_z^*}{I_{zz}^*}$$

(8-54)

$$c = \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} = \frac{M_y^*}{I_{yy}^*}$$

حيث أن I_{yy}^*, I_{zz}^* تمثل قيا معدلة لعزوم العطالة ومقدارها هو :

$$I_{yy}^* = I_{yy} - \frac{I_{yz}^2}{I_{zz}}$$

(8-55)

$$I_{zz}^* = I_{zz} - \frac{I_{yz}^2}{I_{yy}}$$

كذلك فإن M_y^*, M_z^* تمثل ما يسمى بالعزوم المعدلة ولها هذه القيم :

$$M_y^* = M_y + M_z \left(\frac{I_{yz}}{I_{zz}} \right)$$

(8-56)

$$M_z^* = M_z + M_y \left(\frac{I_{yz}}{I_{yy}} \right)$$

وبذلك تكون المعادلة العامة للتوزيع المستوي للاجهادات الناعمية في الانعطاف المنحرف المركب للقضبان المستقيمة كما يلي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (8-57)$$

أو

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z^*}{I_{zz}^*} y + \frac{M_y^*}{I_{yy}^*} z \quad (8-58)$$

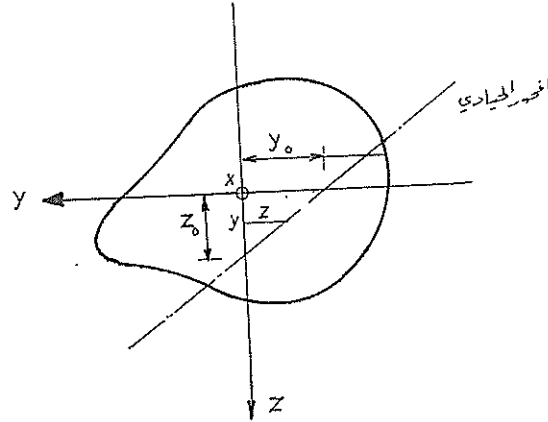
ويجب عند ايجاد القيم الاهتمام بالاشارات .

تحدد معادلة المحور الحيادي (محور الصفر) بجعل $\sigma_x = 0$ وبذلك ينتج :

$$\begin{aligned} z &= - \frac{N_x}{F} \frac{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}} + \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}} y \\ &= - \frac{N_x}{F} \frac{I_{yy}^*}{M_y^*} + \frac{M_z^* \cdot I_{yy}^*}{M_y^* \cdot I_{zz}^*} y \end{aligned} \quad (8-59)$$

تبلغ احدائيات نقاط تقاطع هذا المستقيم مع المحاور الاحداثية القيم التالية (شكل 8-23) :

$$y_0 = - \frac{N_x}{F} \frac{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}} ; z_0 = - \frac{N_x}{F} \frac{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}} \quad (8-60)$$



شكل 8-23

β - المحاور z, y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي

عندما تكون المحاور z, y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي فإن جداء العطالة يساوي الصفر:

$$I_{yz} = \int_V y z dF = 0$$

وبذلك تأخذ العلاقات (8.53) الشكل التالي :

$$N_x = a F$$

$$M_y = c I_{yy} \quad (8.61)$$

$$-M_z = b I_{zz}$$

اما الثوابت a, b, c فتأخذ القيم التالية :

$$a = \frac{N_x}{F} ; \quad b = - \frac{M_z}{I_{zz}} , \quad c = \frac{M_y}{I_{yy}} \quad (8.62)$$

وبذلك تسهل علاقة توزيع الاجهاد الناطمي كثيراً لتأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_z}{I_{zz}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} z \quad (8.63)$$

اما احداثيات نقاط تقاطع المحور الحيادي مع المحاور الاحداثية z, y فتبلغ :

$$y_0 = - \frac{N_x}{F} \frac{I_{zz}}{M_z} , \quad z_0 = - \frac{N_x}{F} \frac{I_{yy}}{M_y} \quad (8.64)$$

يتركب الاجهاد الناطمي في حالة الانعطاف المنحرف المركب من حدين ، حدد ناتج σ_x عن القوة الناطمية N_x وحد اخر ناتج عن عزم الانعطاف M (أو بالاحرى ناتج عن مركبتى عزم الانعطاف M_z, M_y) . يسمى الانعطاف منحرفاً لان المحور الحيادي لا يوازي أحد محاور العطالة الرئيسية للمقطع العرضي .

بالرجوع إلى علاقة الاجهاد (8.63) وببديل :

$$M_y = M \cos \alpha ; \quad M_z = M \sin \alpha$$

فالمها تصبح

$$\sigma = \frac{\dot{N}_x}{F} + M \left(\frac{\cos \alpha}{I_{yy}} z - \frac{\sin \alpha}{I_{zz}} y \right)$$

تسهل مهمة إيجاد العلاقات التي تربط بين الاجتهادات الداخلية وبين القوى الخارجية المطبقة على الجملة الانشائية كثيراً بتقسيمها الى مرحلتين .

المرحلة الاولى :

مرحلة إيجاد علاقات تربط بين القوى الخارجية المؤثرة على الجملة الانشائية وبين محصلات الاجتهاد الداخلية المسماة بقيم القطع .

المرحلة الثانية :

مرحلة إيجاد علاقات تربط بين محصلات الاجتهاد المسماة بقيم القطع وبين الاجتهادات (مركبات الاجتهاد) .

ان المرحلة الاولى هي من وظيفة علم السكون ولقد تم بحثها بشكل مفصل (وذلك بتطبيق شروط التوازن على الاجسام بعد الفطع) . اما المرحلة الثانية فهي من وظيفة علم مقاومة المواد وقد تم أنفاً دراستها وهي تعتمد على حقيقة كون محصلة الاجتهادات في المقطع العرضي بالاتجاه الاقبي مساوية للقوة الناعظمية N_x وكذلك كون محصلة العزوم التي تشكلها الاجتهادات الناعظمية بالنسبة للمحور y مساوية للعزم M_y ومحصلة العزوم التي تشكلها الاجتهادات الناعظمية بالنسبة للمحور z مساوية للعزم M_z .

٨ - ٢ - ٥ أمثلة

مثال 79 :

بعد تعيين مخططات قيم القطع لجائز مصنع من الفولاذ تبين ان مقطعه العرضي يحتوي على عزم إنعطاف M_y فقط .

المعطى : $M_y = 12,5 \text{ Mpm}$ والاجتهاد المسموح للفولاذ $\sigma = 1,4 \text{ Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : تعيين بروفيل من النوع IP يستطيع تحمل العزم M_y .

الحل :

بتطبيق علاقة التصميم للانعطاف البسيط الصافي (العلاقة 8.42) ينتج :

$$\text{erf } W_y \geq \frac{|M_y|}{|\text{zul } \sigma|} = \frac{12,5 \cdot 10^2}{1,4} = 892,9 \text{ cm}^3$$

من جدول البروفيلات الموجود في الملحق يتم اختيار بروفيل IP 24 الذي يبلغ عزم مقاومته :

$$\text{vorh } W_y = 974,0 \text{ cm}^3 > \text{erf } W_y = 892,9 \text{ cm}^3$$

مثال 80 :

يتألف مقطع عرضي فولاذي من بروفيلين من النوع 24 [تتصل ببعضها بواسطة اللحام .

المعطى : الاجهاد المسموح للفولاذ St . 37 : $\text{zul } \sigma = 1,4 \text{ Mp cm}^{-2}$.

المطلوب : حساب عزم الانعطاف M_y الذي يستطيع المقطع العرضي تحمله .

الحل : من جدول البروفيلات الموجود في الملحق ومن أجل البروفيل 24 [تقرأ قيمة العزم المقاوم بالنسبة للمحور y التالية :

$$W_y = 300,0 \text{ cm}^3 = (W_{yy})$$

بما ان المقطع العرضي يتألف من بروفيلين لذا فان العزم المقاوم الكلي هو :

$$W_y = 2 \cdot 300,0 = 600,0 \text{ cm}^3$$

بتطبيق العلاقة (8.42 b) يتم الحصول على عزم الانعطاف المسموح (اعلى عزم انعطاف يسمح للمقطع العرضي بتحمله) :

$$| \text{zul } M_y | \leq W_{yy} \cdot | \text{zul } \sigma | = 600,0 \cdot 1,4 = 840,0 \text{ Mp cm}$$

مثال 81 :

حمل جائز بسيط مقطعه العرضي مستطيل الشكل ومسند في النقطتين a , b في منتصفه بقوة وحيدة P (شكل 8.24) .

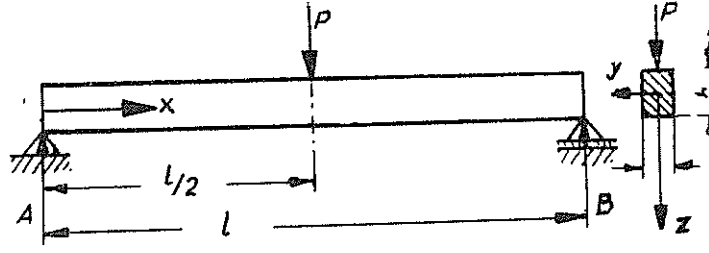
المعطى :

$$h = 5 \text{ cm} ; b = 3 \text{ cm} ; l = 100 \text{ cm} ; P = 650 \text{ kp}$$

المطلوب :

١ - حساب توزيع الاجهاد الناطمي في المكان $x=l/3$.

٢ - حساب الاجهاد الناطمي الاعظمي في المكان $x=l/2$.



شكل 8.24

الحل :

ان المحاور z, y هي محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي (لانطباقها على محاور تناظر المقطع العرضي) .

اما الانعطاف المتشكل فهو انعطاف بسيط لوقوع مستوي التحميل على المحور الرئيسي z .
إن العلاقة التي تصلح من اجل توزيع الاجهاد الناطمي في مكان ما من الجائز هي التالية :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

يلغ رد فعل المسند عند a القيمة الآتية :

$$A_v = \frac{P}{2}$$

اما تابع عزم الانعطاف (عزم الانعطاف M بالنسبة للمحور x) فهو :

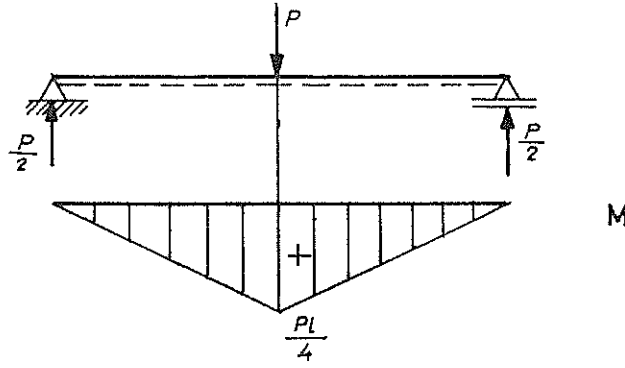
$$M_y = A_v \cdot x = \frac{P}{2} x$$

لقد تم في الشكل (8.25) تمثيل مخطط عزم الانعطاف .

يلغ عزم عطالة المقطع العرضي بالنسبة للمحور y القيمة التالية :

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

وبذلك يأخذ توزيع الاجهاد الناطمي في نقطة ما من الجائز (النقطة التي تبعد x)
القيمة الآتية :

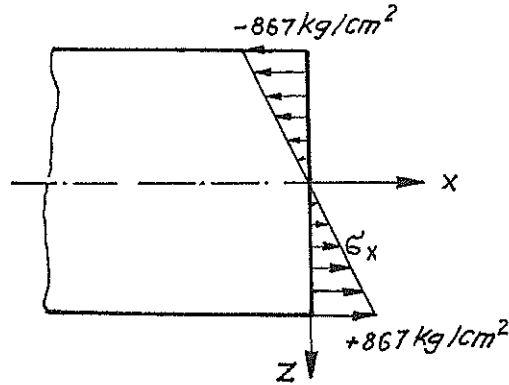


شكل 8.25

$$\sigma_x = \frac{P \times 12}{2 b h^3} z$$

١ - يتم الحصول على توزيع الاجهاد الناطمي في النقطة $x=l/3$ بتبديل قيمة x في العلاقة السابقة وبذلك ينتج :

$$\sigma_x = \frac{2 P l}{b h^3} z$$



شكل 8.26

يتشكل في المقطع العرضي الكائن عند $x=l/3$ ، الاجهاد الناطمي الاعظمي في النقاط $z=h/2$ (الشكل 8.26) :

$$\max \sigma = \frac{Pl}{b h^2} = \frac{650 \cdot 100}{3 \cdot 25} = 867 \text{ kp/cm}^2$$

بالامكان اختيار طريق آخر عديم الواحدات ، يستطاع بواسطته التعبير عن الاجهادات ، هكذا :

$$\frac{\sigma_x}{\max \sigma_x} = \frac{z}{h/2}$$

من هذه العلاقة يرى ان الاجهاد الناطمي يتناسب طردياً مع المحور z . فمن أجل $z=0$ ينتج :

$$\sigma_x = 0$$

ومن أجل $z=h/2$ يتم الحصول على القيمة التالية :

$$\sigma_z = \max \sigma_x$$

٢ - يتم الحصول على الاجهاد الناطمي الاعظمي في المقطع العرضي $x=l/2$ بتبديل $x=l/2$ و $z=h/2$ في علاقة الاجهاد :

$$\max \sigma_x = \frac{\max M_y}{W_y} = \frac{3 Pl}{2bh^2} = \frac{3 \cdot 650 \cdot 100}{2 \cdot 3 \cdot 25} = 1300 \text{ kp/cm}^2$$

مثال 82 :

يتكون المقطع العرضي لجائز موثوق من بروفيل فولاذي على شكل I . حمل هذا الجائز بحمولة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 8.27) .

المعطى : $l=120 \text{ cm}$, $\sigma_{zul}=1400 \text{ kp/cm}^2$. البروفيل المستعمل هو NPI 10 .

المطلوب : تعيين الحمولة الوحيدة P التي يستطيع الجائز المذكور تحملها لكل من اوضاع المقطع العرضي الممثلة في الشكل (8 27a) ، أي

١ - عندما تؤثر الحمولة باتجاه الجسد (الحالة a) .

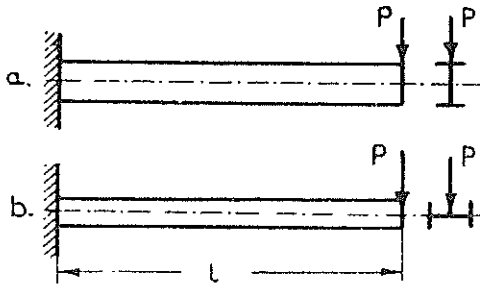
٢ - عندما تؤثر الحمولة عمودية على اتجاه الجسد (الحالة b) .

الحل :

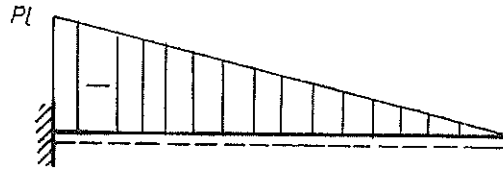
إن شرط التصميم في الانعطاف المستقيم هو :

$$\max \sigma_x = \frac{\max M_y}{W_y} \leq \sigma_{zul}$$

يلغ عزم الانعطاف الاعظمي في الجائز ، القيمة التالية (شكل 8 27 b) :



شكل 8.27 a



شكل 8-27b

$$\max M_y = \max P \cdot l$$

من العلاقتين السابقتين يتم الحصول على النتيجة الآتية :

$$\max P = \frac{W_y \text{ zul } \sigma}{l}$$

١ - يبلغ العزم المقاوم من أجل الحالة a :

$$W_y = 34,2 \text{ cm}^3$$

وبالتعويض في العلاقة الاخيره يتم الحصول على القوة الاعظمية

$$\max P = \frac{34,2 \cdot 1400}{120} = 399 \text{ kp}$$

٢ - يبلغ العزم المقاوم من أجل الحالة b :

$$W_y = 4,88 \text{ cm}^3$$

$$\max P = \frac{4,88 \cdot 1400}{120} = 56,9 \text{ kp}$$

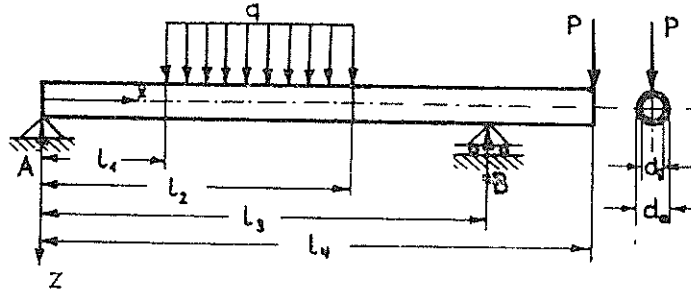
مثال 83 :

حمل الجائز المثل في الشكل (8.28) والمسند في النقطتين A , B بالقوة p وكذلك بحمولة خطية موزعة بانتظام q .

المعطى :

$$l_2 = 50 \text{ cm} , l_1 = 20 \text{ cm} , q = 30 \text{ kp/m} , P = 500 \text{ kp}$$

$$d_i / d_a = 0,8 ; l_4 = 90 \text{ cm} ; l_3 = 70 \text{ cm},$$



شكل 8.28

المطابوب : تصميم المقطع العرضي للجائز شريطة أن يكون أنبـوباً دائرياً تتحقق فيه نسبة الاقطار المعطاة .

الحـل :

حساب ردود أفعال المساند :

$$\Sigma H = 0 : H = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 : B_v &= \frac{1}{l_3} \left\{ Pl_4 + q(l_2 - l_1) \cdot \left[\frac{l_2 - l_1}{2} + l_1 \right] \right\} \\ &= \frac{2 Pl_4 + q(l_2 - l_1)(l_2 + l_1)}{2l_3} \approx 1093 \text{ kp} \end{aligned}$$

$$\Sigma V = 0 : A_v = q(l_2 - l_1) + P - B_v \approx 307 \text{ kp}$$

حساب عزم الانعطاف :

لتعيين مكان عزم الانعطاف الاعظمي يلجأ لحساب توابع عزوم الانعطاف ورسمها على شكل مخطط (مخطط عزم الانعطاف) . يتألف الجائز من اربعة مجالات . بتطبيق شرط توازن العزوم على الاشكال (8.29) ينتج :

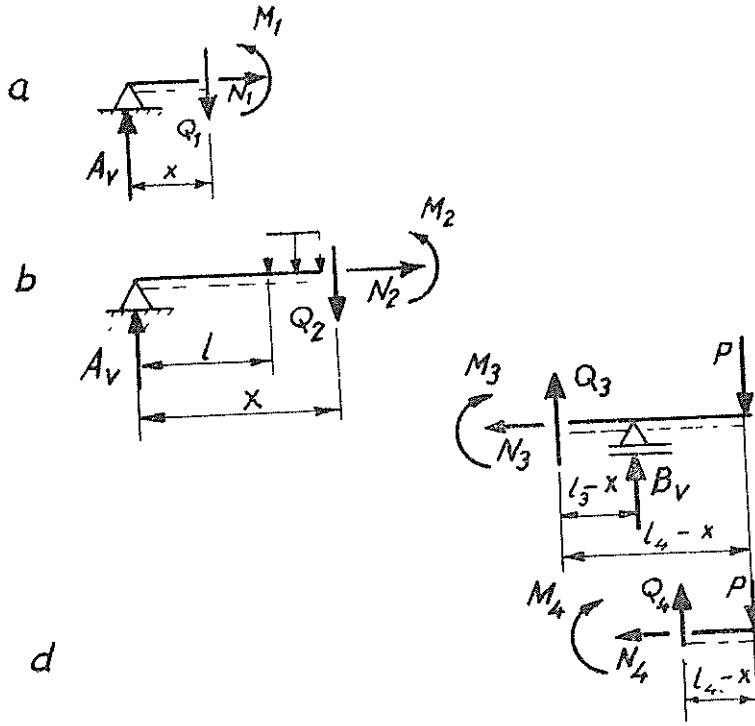
المجال 1 : $(0 \leq x \leq l_1 = 20 \text{ cm})$

$$\Sigma M_x = 0 : M_1 = A_v \cdot x = 307 x$$

(توزيع خطي) .

$$x = 0 : M_1 = 0$$

$$x = 20 \text{ cm} : M_1 = 6140 \text{ kp cm}$$



شكل 8.29

المجال II ($l_1 = 20 \text{ cm} \leq x \leq l_2 = 50 \text{ cm}$):

$$\Sigma M_x = 0 : M_2 = A_v \cdot x - q(x - l_1) \frac{(x - l_1)}{2} = A_v x - q \frac{(x - l_1)^2}{2}$$

(قطع مكافئ درجة 2) .

$$x = 20 \text{ cm} : M_2 \approx 6140 \text{ kp cm}$$

$$x = 50 \text{ cm} : M_2 \approx 1850 \text{ kp cm}$$

لتمين مكان العزم الاعظمي يلجأ لاشتقاق التابع وجمعه يساوي الصفر ($dM_2/dx=0$) وبذلك ينتج :

$$\frac{dM_2}{dx} = A_v - q(x - l_1) = 0$$

$$x = \frac{A_v}{q} + l_1 = 10,02 + 20 = 30,02 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm}$$

أما عزم الانعطاف الاعظمي فيتم الحصول عليه بتبديل $x=30 \text{ cm}$ في تابع عزم الانعطاف وهو يساوي :

$$\max M_2 = 7710 \text{ kp cm}$$

: ($l_2 = 50 \text{ cm} \leq x \leq l_3 = 70 \text{ cm}$) III المجال

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 : M_3 &= B_v (l_3 - x) - P (l_4 - x) \\ &= (B_v l_3 - P l_4) - (B_v - P) x \end{aligned}$$

(توزيع خطي) .

$$x = 50 \text{ cm} : M_3 = 1860 \text{ kp cm}$$

$$x = 70 \text{ cm} : M_3 = - 10000 \text{ kp cm}$$

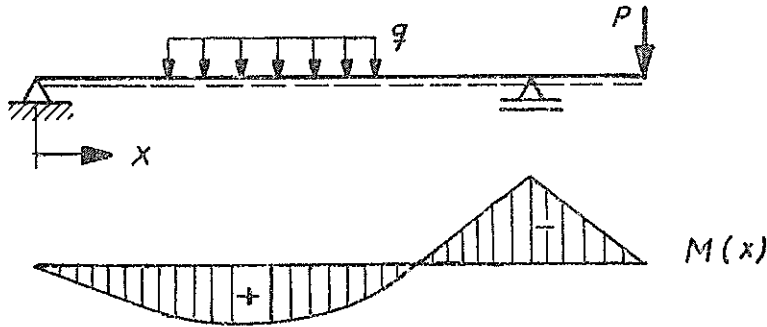
: ($l_3 = 70 \text{ cm} \leq x \leq l_4 = 90 \text{ cm}$) IV المجال

$$\Sigma M_x = 0 : M_4 = - P (l_4 - x)$$

(توزيع خطي) .

$$x = 70 \text{ cm} : M_4 = - 10000 \text{ kp cm}$$

$$x = 90 \text{ cm} : M_4 = 0$$



شكل 8.30

لقد تم في الشكل (8.30) تمثيل مخطط عزم الانعطاف . من مخطط العزم المذكور يرى ان العزم الاعظمي يتشكل عند نقطة الاستناد b وتبلغ قيمته :

$$\max M_y = M_b = - 10\,000 \text{ kp cm}$$

وهو الضروري لتصميم الجائز . في حالة الانعطاف البسيط الموجودة في هذا المثال تصلح علاقة التصميم التالية :

$$\text{erf } W_y = \frac{\max M}{\text{zul } \sigma} = \frac{10\,000}{1400} = 7,14 \text{ cm}^3$$

يعرف العزم المقاوم كما يلي :

$$W_y = \frac{I_y}{e}$$

يبلغ عزم العطالة المحوري لأنبوب دائري القيمة التالية :

$$I_y = \frac{\pi}{64} (d_a^4 - d_i^4) = I$$

اما البعد الاعظمي للمقطع العرضي عن المحور الحيادي e فيبلغ :

$$e = \frac{d_a}{2}$$

وبذلك فان العزم المقاوم يأخذ القيمة التالية :

$$W_y = \frac{\pi}{32 d_a} (d_a^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32} d_a^3 \left(1 - \frac{d_i^4}{d_a^4} \right)$$

في هذه الحالة يلزم حساب القطر d_a بالاستعانة بالعزم المقاوم للأنبوب الدائري erf W وبذلك ينتج :

$$d_a^3 = \frac{32 \text{ erf } W_y}{\pi (1 - d_i^4 / d_a^4)} = \frac{32 \cdot 7,14}{1,854} = 123,3 \text{ cm}$$

$$d_a = 4,98 \text{ cm} ; d_i = 3,98 \text{ cm}$$

مثال 84 :

يحتوي مقطع عرضي مستطيل الشكل على قيم القطع التالية : عزم الانعطاف M_y والقوة الناعمية N_x (شكل 8.31) .

المعطى :

$$M_y = 1,0 \text{ Mpm} , N_x = 8,0 \text{ Mp} , h = 28,0 \text{ cm} , b = 14,0 \text{ cm}$$

المطلوب : حساب الاجهادات الناعمية على حواف المقطع العرضي (اجهادات الحواف) .

الحل : بواسطة مساحة المقطع العرضي :

$$F = bh = 14,0 \cdot 28,0 = 392,0 \text{ cm}^2$$

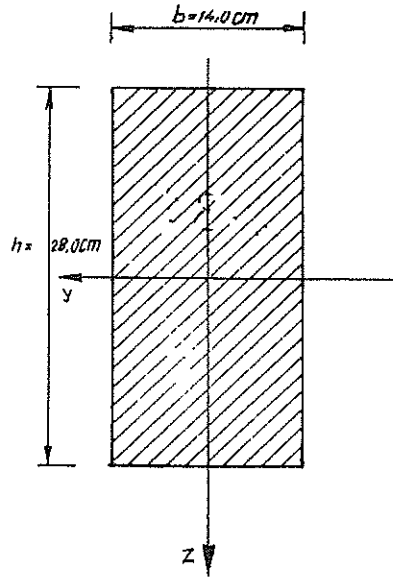
والعزم المقاومة :

$$W_{yyu} = W_{yyo} = \frac{bh^2}{6} = \frac{14,0 \cdot 28,0^2}{6} = 1829,3 \text{ cm}^3$$

وبتطبيق العلاقة (8.39) يتم الحصول على اجهادات الحواف :

$$\begin{aligned} \sigma_{xu} &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yyu}} = \frac{8,0}{392,0} + \frac{100}{1829,3} \\ &= 0,0204 + 0,0547 = 0,0751 \text{ Mp cm}^{-2} \end{aligned}$$

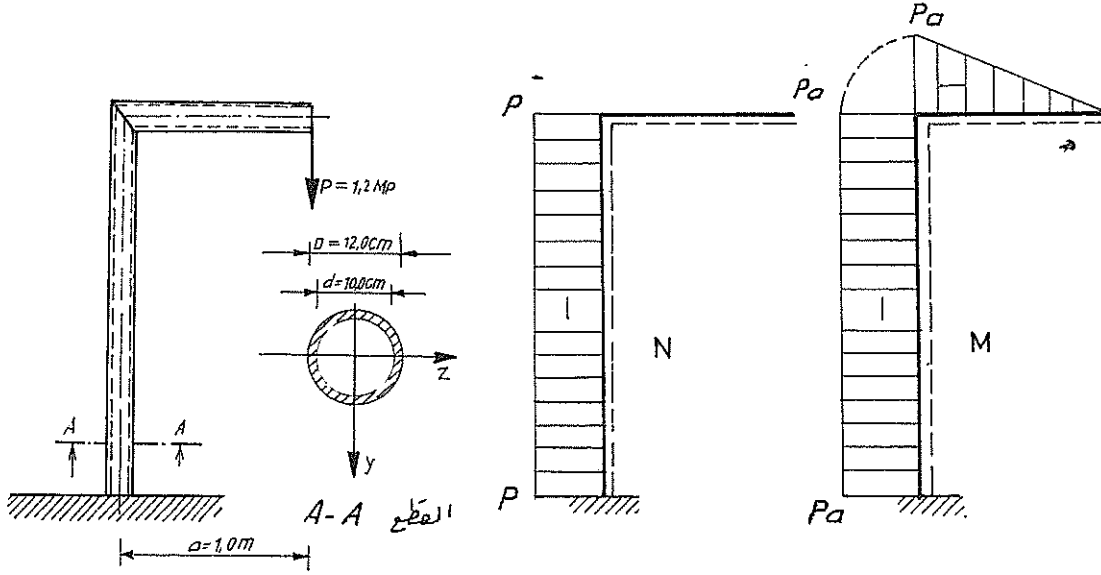
$$\begin{aligned} \sigma_{xo} &= \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yyo}} = \frac{8,0}{392,0} - \frac{100}{1829,3} \\ &= 0,0204 - 0,0547 = -0,0343 \text{ Mp cm}^{-2} \end{aligned}$$



شكل 8.31

مثال 85 :

تؤثر على النهاية الحرة لجائز موثوق من طرف واحد ، حمولة وحيدة P (شكل 8.32) .
المعطى : ابعاد الجائز و $P = 1,2 \text{ Mp}$ و ابعاد المقطع العرضي المكون على شكل حلقة دائرية .
المطلوب : حساب إجهادات الحواف للمقطع العرضي الواقع عند نقطة الوثاقة .



شكل 8.32

الحل : تبلغ قيم المقطع في المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة (شكل 8.32) :

$$N_x = -P = -1.2 \text{ Mp}$$

$$M_y = -Pa = -1.2 \cdot 1.0 = -1.2 \text{ Mpm}$$

(لا داعي لرسم مخطط Q والتنويه عنها لأنها تؤدي لتشكيل إجهاد مماسي لا لإجهاد ناظمي) .
بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي :

$$F = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi (12.0^2 - 10.0^2)}{4} = 34,6 \text{ cm}^2$$

وبالعزم المقاوم :

$$W_u = W_o = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D} = \frac{\pi (12.0^4 - 10.0^4)}{32 \cdot 12.0} = 87,8 \text{ cm}^3$$

يتم الحصول على اجهادات الحواف :

$$\sigma_{xu} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_u} = \frac{-1,2}{34,6} + \frac{120,0}{87,8} = -0,0347 + 1,3667 = 1,332 \text{ Mp/cm}^2$$

$$\sigma_{xo} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_o} = \frac{-1,2}{34,6} - \frac{120,0}{87,8} = -0,0347 - 1,3667 = -1,401 \text{ Mp/cm}^2$$

مثال 86 :

يحمل عمود بيتوني (الوزن النوعي $\gamma = 2.4 \text{ Mp cm}^{-3}$) مقطعه العرضي مثلثي الشكل ، بالقوى Z,P وبوزنه الذاتي (شكل 8.33) .

المعطى :

$$H = 3,0 \text{ m} , b = 0,8 \text{ m} , h = 0,6 \text{ m} , Z = 3,0 \text{ Mp} , P = 10,0 \text{ Mp}$$

المطلوب : حساب اجهادات الحافة (الاجهادات الطرفية) للمقطع العرضي عند نقطة الوثافة (يؤخذ الوزن الذاتي للعمود بعين الاعتبار)

الحل : بالاستعانة بمساحة المقطع العرضي الثابتة :

$$F = \frac{bh}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{2} = 0,240 \text{ m}^2$$

يتم الحصول على الوزن الذاتي للعمود :

$$G = \gamma F H = 2,4 \cdot 0,240 \cdot 3,0 = 1,728 \text{ Mp}$$

تبلغ قيم القطع عند نقطة الوثافة القيم التالية :

$$N_x = -(P + G) = -(10,0 + 1,728) = -11,728 \text{ Mp}$$

$$M_y = Z H + P \frac{2h}{3} = 3,0 \cdot 3,0 + 10,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 = 13,0 \text{ Mpm}$$

بالاستعانة بالمزوم المقاومة :

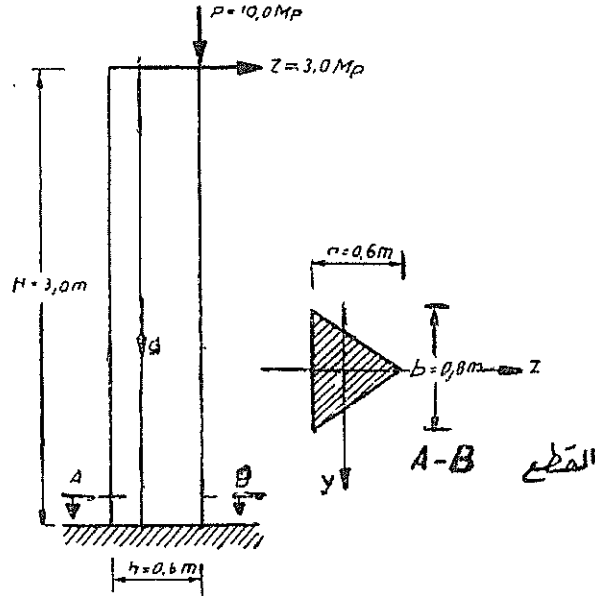
$$W_{yl} = \frac{bh^2}{12} = \frac{0,8 \cdot 0,6^2}{12} = 0,024 \text{ m}^3$$

$$W_{yr} = \frac{bh^2}{24} = \frac{0,8 \cdot 0,6^2}{24} = 0,012 \text{ m}^3$$

وبمساحة المقطع العرضي وبقيم القطع يتم الحصول على اجهادات الحافة :

$$\sigma_{x,l} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yl}} = \frac{-11,728}{0,24} + \frac{13,0}{0,024} = -48,87 + 541,67 = 492,8 \text{ Mp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{x,r} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yr}} = \frac{-11,728}{0,24} - \frac{13,0}{0,012} = -48,87 - 1083,33 = -1132,2 \text{ Mp cm}^{-2}$$



شكل 8,33

مثال 87 :

يتألف الجائز المقرر ستاتيكيًا والممثل في الشكل (8,34) من بروفيل مدرفل I 32 .

المعطى : ابعاد الجائز و $P = 6,0 \text{ Mp}$.

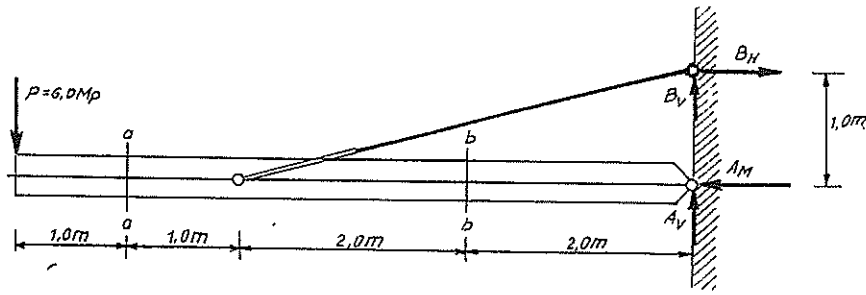
المطلوب : حساب اجهادات الحافة (الاجهادات الطرفية) في المقاطع العرضية الواقعة عند المقطوع $b-b$, $a-a$.

الحل :

تبلغ ردود افعال المساند للجائز القيم التالية :

$$\Delta_H = 36,0 \text{ Mp} ; B_H = 36,0 \text{ Mp}$$

$$A_v = - 3,0 \text{ Mp} ; B_v = 9,0 \text{ Mp}$$



شكل 8,34

وبالاستعانة بها يتم الحصول على قيم المقطع الآتية :

في المقطع العرضي a-a :

$$N_x = 0$$

$$M_y = - P \cdot 1,0 = - 6,0 \text{ Mp m}$$

وفي المقطع العرضي b-b :

$$N_x = - A_H = - 36,0 \text{ Mp}$$

$$M_y = A_v \cdot 2,0 = - 6,0 \text{ Mp m}$$

بواسطة القيم الهندسية للمقطع العرضي التي يتم الحصول عليها من الجدول الموجود في الملحق :

$$F = 77,8 \text{ cm}^2 ; W_{yu} = W_{yo} = 782,0 \text{ cm}^3$$

يتم تعيين اجهادات الحافة في البروفيل 132 عند المقطع العرضي a-a :

$$\sigma_{xu} = \frac{M_y}{W_u} = \frac{- 6000,0}{782,0} = - 0,767 \text{ Mp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xo} = - \frac{M_y}{W_o} = - \frac{- 6000,0}{782,0} = + 0,767 \text{ Mp cm}^{-2}$$

وعند المقطع العرضي b-b :

$$\sigma_{xu} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W_{yu}} = \frac{- 36,0}{77,8} + \frac{- 6000,0}{782,0} = - 1,230 \text{ Mp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xo} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_{yo}} = \frac{36,0}{77,8} - \frac{6000,0}{782,0} = + 0,304 \text{ Mp cm}^{-2}$$

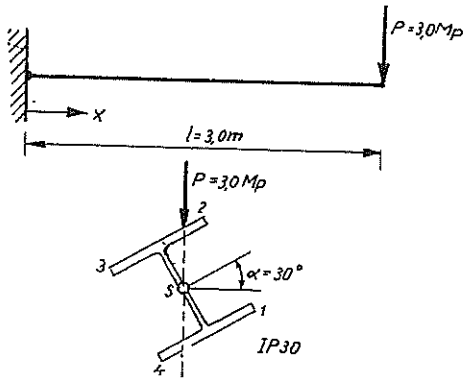
مثال 88 :

يتألف المقطع العرضي للجائز بارز من بروفيل فولاذي من النوع IP 30 . ميل المقطع العرضي على طول محور الجائز ليشكل مع حامل القوة P الزاوية α (شكل 8.35) .

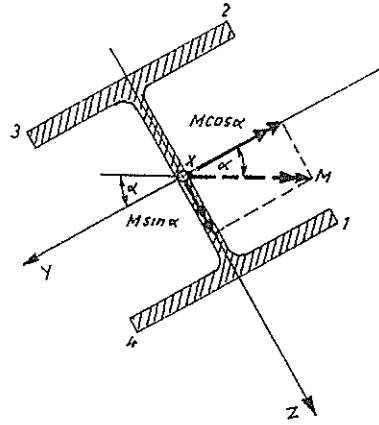
المعطى :

$$l = 3,0 \text{ m} , \alpha = 30^\circ , P = 3,0 \text{ Mp}$$

المطلوب : حساب الاجهادات الناعمية المتشكلة في نقاط زوايا المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة .



شكل 8,35



شكل 8,36

الحل :

تمثل مجموعة المحاور (z, y) المحاور الرئيسية للمقطع العرضي (لكونها محاور تناظر) . لا ينطبق اثر مستوي التحميل على المحاور الرئيسية (z, y) فالانعطاف المتشكل هو اذاً إنعطاف منحرف . عزم الانعطاف عند نقطة الوثاقة :

$$M = - Pl = - 3,0 \cdot 3,0 = - 9,0 \text{ Mp m}$$

يرسم شعاع عزم الانعطاف M الفعلي (شكل 8.36) .

مركبات عزم الانعطاف بالنسبة لمجموعة المحاور الرئيسية z, y : هناك طريقان :

اولهما : ان يرسم شعاع عزم الانعطاف الفعلي (بعد ادخال الاشارة بعين الاعتبار) (شكل 8 36) ثم يحلل هذا العزم الى مركبتين ، هكذا :

$$\dot{M}_y = - | \dot{M} | \cos \alpha = - 9,0 \cdot 0,866 = - 7,794 \text{ Mp m}$$

$$M_z = + | M | \sin \alpha = + 9,0 \cdot 0,500 = + 4,500 \text{ Mp m}$$

وثانيهما : ان يحلل شعاع عزم الانعطاف الموجب دون النظر للاتجاه الفعلي ثم تدخل الاشارة
بمين الاعتبار اثناء العلاقة ، هكذا :

$$M_y = + M \cos \alpha = (- 9,0) \cdot 0,866 = - 7,794 \text{ Mpm}$$

$$M_z = - M \sin \alpha = - (- 9,0) \cdot 0,500 = + 4,500 \text{ Mpm}$$

القيم الهندسية للمقطع العرضي (وتقرأ من الجدول الموجود في الملحق) :

$$I_{yy} = 25760 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{yz} = 9010,0 \text{ cm}^4$$

احداثيات نقاط حواف المقطع العرضي :

$$y_1 = - \frac{b}{2} = - 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_1 = + \frac{h}{2} = + 15 \text{ cm}$$

$$y_2 = - \frac{b}{2} = - 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_2 = - \frac{h}{2} = - 15 \text{ cm}$$

$$y_3 = + \frac{b}{2} = + 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_3 = - \frac{h}{2} = - 15 \text{ cm}$$

$$y_4 = + \frac{b}{2} = + 15 \text{ cm} \quad ; \quad z_4 = + \frac{h}{2} = + 15 \text{ cm}$$

علاقة الاجهاد الناطمي :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = - \frac{7,794 \cdot 10^5}{25760,0} z - \frac{4,500 \cdot 10^5}{9010,0} y \\ &= - 30,256 z - 49,944 y \end{aligned}$$

اجهادات نقاط الحواف :

$$\sigma_{xx1} = - 30,256 (+15) - 49,944 (-15) = + 295 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xx2} = - 30,256 (-15) - 49,944 (-15) = + 1203 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xx3} = - 30,256 (-15) - 49,944 (+15) = - 295 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_{xx4} = - 30,256 (+15) - 49,944 (+15) = - 1203 \text{ kp cm}^{-2}$$

مثال 89 :

يحتوي المقطع العرضي لجائز على عزم الانعطاف M (شكل 8.37) .

المعطى :

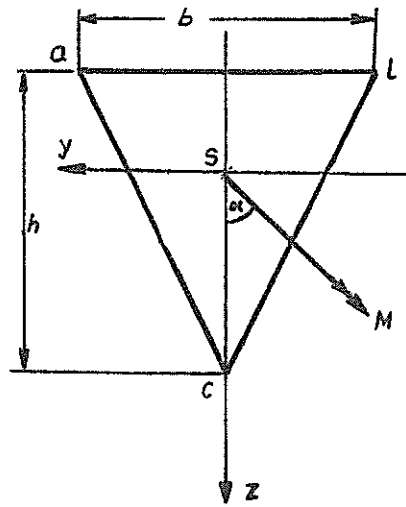
$$h = 4 \text{ cm} , \quad b = 4 \text{ cm} , \quad \alpha = 45^\circ , \quad M = 2000 \text{ kp cm}$$

المطلوب :

١ - حساب الاجهادات في كل من النقاط a, b, c .

٢ - حساب الاجهاد الاعظمي .

٣ - تحديد موضع المحور الحيادي .



شكل 8,37

الحل :

تمثل المحاور z, y محاور عطالة رئيسية المقطع العرضي (وذلك لكون المحور z محور تناظر للمقطع العرضي) .

لا ينطبق شعاع العزم M على احد المحاور الرئيسية . إذاً فالمقطع العرضي موجود في حالة انعطاف منحرف .

١ - يمثل توزيع الاجهاد الناطمي في حالة الانعطاف المنحرف كما يلي :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y = \frac{-M \sin \alpha}{I_{yy}} z - \frac{M \cos \alpha}{I_{zz}} y$$

عزوم عطالة المقطع العرضي بالنسبة للمحاور z, y :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{36} = 7,11 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{48} = 5,33 \text{ cm}^4$$

بتبديل هذه القيم في معادلة توزيع الاجهاد ينتج :

$$\sigma_x = -795 \frac{z}{h} - 1060 \frac{y}{b} \text{ kp cm}^{-2}$$

احداثيات النقاط c, b, a :

$$y_a = + \frac{b}{2} , \quad z_a = - \frac{1}{3} h$$

$$y_b = - \frac{b}{2} , \quad z_b = - \frac{1}{3} h$$

$$y_c = 0 , \quad z_c = + \frac{2}{3} h$$

بتبديل هذه القيم في معادلة توزيع الاجهاد ، ينتج :

$$\sigma_a = + \frac{795}{3} - \frac{1060}{2} = -265 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_b = + \frac{795}{3} + \frac{1060}{2} = +795 \text{ kp cm}^{-2}$$

$$\sigma_c = - \frac{795 \cdot 2}{3} = -530 \text{ kp cm}^{-2}$$

٢ - يتشكل الاجهاد الناطمي الاعظمي في احد رؤوس المثلث الثلاثة . بالامكان اخذ النتيجة من الطلب الاول .

$$\max \sigma = \sigma_b = +795 \text{ kp cm}^{-2}$$

٣ - يمكن الحصول على معادلة محور الصفير (المحور الحيادي) بجعل معادلة توزيع الاجهاد الناطمي تساوي صفراً ، هكذا :

$$\sigma = - \frac{M \sin \alpha}{I_{yy}} z - \frac{M \cos \alpha}{I_{zz}} y = 0$$

$$z = - \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \operatorname{ctg} \alpha y = \operatorname{tg} \beta \cdot y$$

حيث ان :

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{I_{yy}}{I_{zz}} \operatorname{ctg} \alpha = - \frac{7,11}{5,33} 1 = - 0,75 ; \beta = 126^{\circ} 55'$$

بطريقة مور-لانند التخطيطية يمكن الحصول على نفس النتيجة ايضاً .

مثال 90:

حمل جائز بارز (حامل بارز) بحمولة وحيدة (شكل 8,38) .
المعطى :

$$\alpha = 45^{\circ} , P = 50 \text{ kp} ; L = 100 \text{ cm} ; h = 0,7 \text{ cm} ; l = 6 \text{ cm}$$

المطلوب : حساب توزيع الاجهاد وتعين الاجهاد الاعظمي :

الحل :

بسبب كون المحور z محور تناظر للمقطع العرضي فان المجموعة z, y هي مجموعة محاور العطالة المركزية الرئيسية للمقطع العرضي . ولعدم وقوع اثر مستوي التحميل على احد المحاور الرئيسية z, y فالمقطع العرضي المدروس موجود في حالة انعطاف منحرف بسيط (مسمي بسيطاً لعدم احتواء المقطع العرضي على قوة ناظمية) .

$$M = - P \cdot \bar{x} ; M_y = + M \cos \alpha ; M_z = + M \sin \alpha$$

ابعاد المقطع العرضي :

$$e = \frac{1}{2} \frac{l^2 + l h - h^2}{2l - h} = 1,755 \text{ cm}$$

عزوم العطالة :

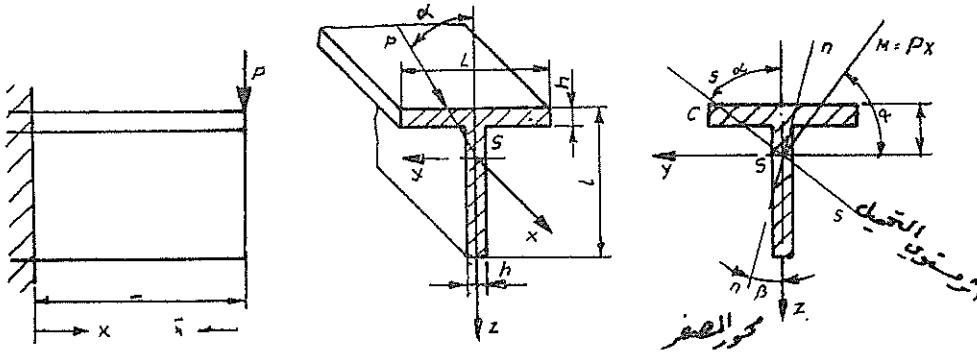
$$I_{yy} = \frac{h l^3}{3} + \frac{(l-h)}{3} h^3 - \frac{h}{4} \frac{(l^2 + lh - h^2)}{2l-h} = 26,613 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{h l^3}{12} + \frac{(l-h)}{12} h^3 = 12,769 \text{ cm}^4$$

توزيع الاجهاد :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y = (2,770 y - 1,327 z) \bar{x}$$

(تموض \bar{x} , y , z بالـ cm اما σ فيعوض بالـ kp/cm^2) حيث ان $(\bar{x} = L - x)$.



شكل 8,38

المحور الحيادي (المحور السليم) :

$$\sigma_x = 0 = (2,770 y - 1,327 z) \bar{x}$$

$$z = \frac{2,770}{1,327} y = \tan \beta y ; \beta = 64,65^\circ$$

يتشكل العزم الاعظمي في المقطع العرضي السكائن عند نقطة الوثاقة $(\bar{x} = L)$ وهو يساوي :

$$\max M = - PL$$

اما الاجهاد الناظمي الاعظمي فيتشكل في نقاط المقطع العرضي التي لها اكبر بعد عن المحور الحيادي ، هنا في النقطة c ذات الاحداثيات $(y_c = -e, z_c = l)$ ، وهو يبلغ القيمة التالية :

$$\max \sigma = (2,770 \cdot 3 + 1,327 \cdot 1,755) \cdot 100 = 1063,75 \text{ kp/cm}^2$$

مثال b 90 :

حملت علاقة رافعة بالحمولة P (شكل 8.38) .

المعطى :

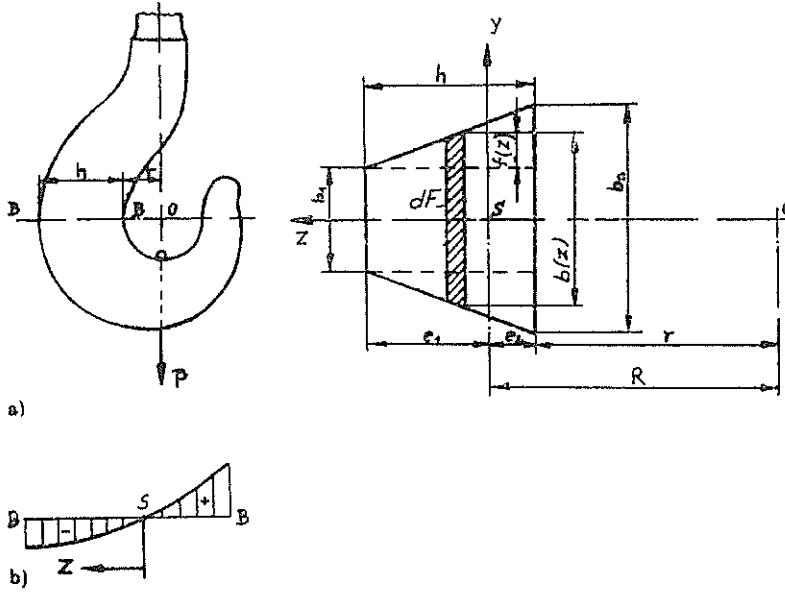
$$r = 10 \text{ cm} , h = b_2 = 8 \text{ cm} , b_1 = 4 \text{ cm} , P = 3000 \text{ kp}$$

المطلوب : حساب توزيع الاجهاد الناطمي في المقطع العرضي B — B بالاعتماد على نظرية القضبان ذات الانحناء الكبير .

الحل :

نصف قطر الانحناء R للمحور المركزي المائد للمقطع العرضي B — B :

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 48 \text{ cm}^2$$



شكل 8-38

$$e_2 = \frac{1}{F} \left(\frac{1}{2} b_1 h + 2 \frac{h}{3} \frac{h}{2} \frac{b_2 - b_1}{2} \right) = 3,56 \text{ cm}$$

$$e_1 = h - e_2 = 4,44 \text{ cm}$$

$$R = e_2 + r = 13,56 \text{ cm}$$

العامل (العامل) Y :

$$dF = b(z) dz = [b_1 + 2\eta(z)] dz$$

$$\frac{\eta(z)}{e_1 - z} = \frac{\frac{b_2 - b_1}{2}}{h}$$

$$Y = -FR^2 + R^3 \int_F \frac{dF}{R+z} = -FR^2 + R^3 \int_{z=-e_2}^{e_1} \frac{b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h}(e-z)}{R+z} dz =$$

$$= -FR^2 + R^3 \left\{ \left[b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} (r+h) \right] \ln \frac{r+h}{r} - (b_2 - b_1) \right\}$$

$$Y = 250 \text{ cm}^4$$

توزيع الاجهاد (شكل 8.38 b) :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{FR} + \frac{M}{Y} \frac{z}{R+z}$$

التشكل في المقطع العرضي B-B :

$$N = P, \quad M = -PR$$

$$\sigma_x = - \frac{PR^2}{Y} \frac{z}{R+z} = - 2208 \frac{z}{13,56 + z} \text{ kp/cm}^2$$

الحافة الخارجية للمقطع العرضي : (ضغط) $\sigma_x(z=e_1) = -514,5 \text{ kp/cm}^2$

الحافة الداخلية للمقطع العرضي : (شد) $\sigma_x(z=-e_2) = 786,0 \text{ kp/cm}^2$
المحور الحيادي :

بعد المحور الحيادي (n-n) عن مركز الثقل :

من اجل :

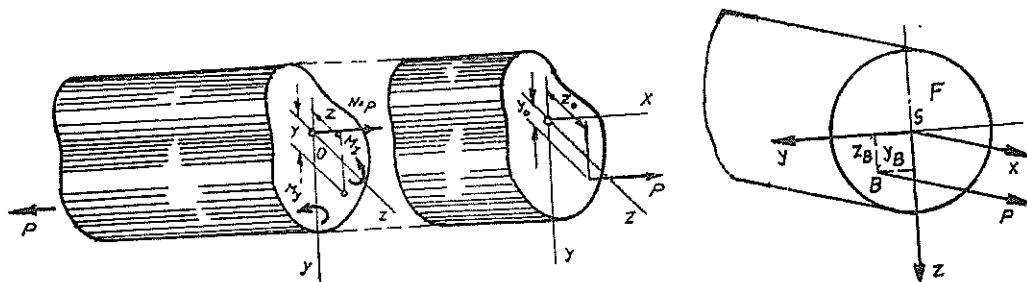
$$N = P, \quad M = -PR$$

فان المحور الحيادي (n-n) ينطبق على المحور y .

٨ - ٣ الشد (أو الضغط) اللامر كزي

في حالة عدم تأثير القوة P في مركز ثقل المقطع العرضي بل في نقطة ما منه وليكن في النقطة

B ذات الاحداثيات (y_B, z_B) عندئذ تتشكل في المقطع العرضي علاوة على القوة الناعمية ، عزوم الانعطاف M_z, M_y . بسبب التغيرات الصغيرة المدروسة التي يقتصر البحث عليها هنا يتم الحصول على توزيع الاجهاد بتضام اجهاد الشد (او الضغط) الثابت (الناتج عن تأثير قوة ناعمية N) مع الاجهاد ذو التغير الخطي الناتج عن الانعطاف المنحرف (شكل 8.39) .



شكل 8.39

٨ - ٣ - ١ المحاور z, y هي محاور عطالة رئيسية

إذا كانت المحاور z, y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي فان توزيع الاجهاد الناعمي يتم الحصول عليه كما يلي :

$$M_y = P z_B ; M_z = - P y_B , N_x = P \quad (8.65)$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y$$

أو (بعد الاستعانة بتعريف انصاف اقطار العطالة) :

$$\sigma_x = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_B}{i_{yy}^2} z + \frac{y_B}{i_{zz}^2} y \right)$$

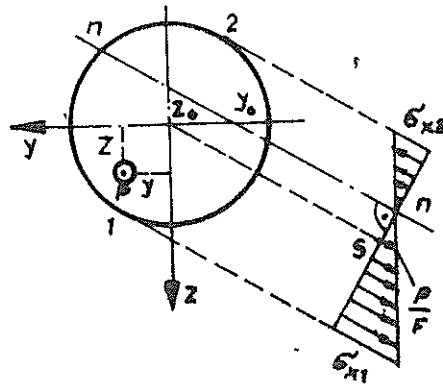
يرسم توزيع الاجهاد مستوي منحرف . يمين المحور الحيادي (محور صفر الاجهاد) بواسطة المعادلة التالية :

$$1 + \frac{z_B}{i_{yy}^2} z + \frac{y_B}{i_{zz}^2} y = 0 \quad (8.67)$$

يقطع المحور الحيادي مجمعة المحاور الاحداثية في النقاط ذات الاحداثيات :

(8,67)

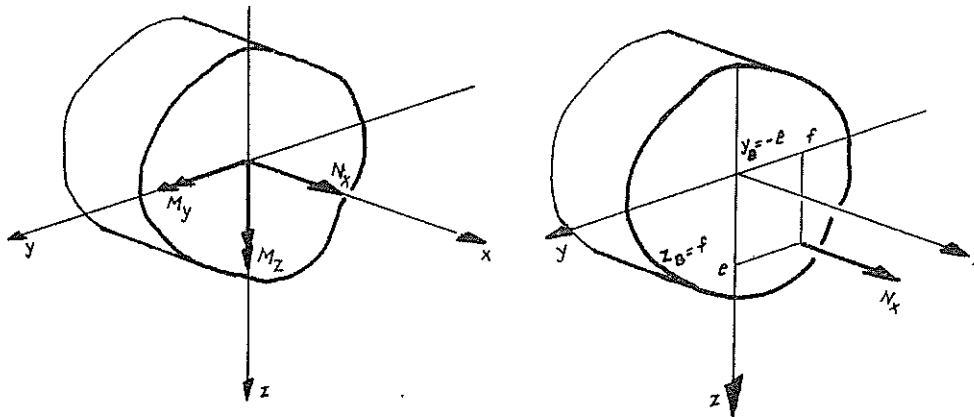
في الشكل (40-8) رسم اجهادات الحواف (اجهادات الاطراف) تخطيطياً .



شکل 8-40

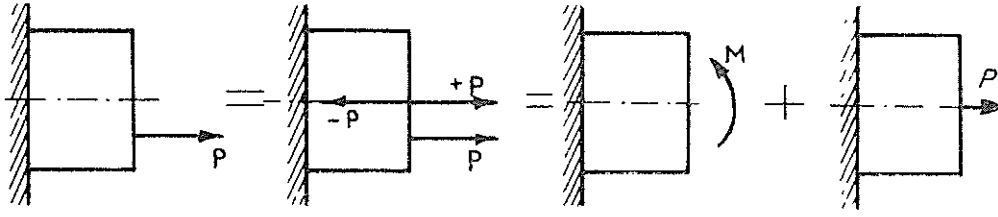
يمكن الاستعاضة عن قيم القطع M_z, M_y, N_z (شكل 8-41) بقوة ناظرية لامركزية N_x تكافئها وتؤثر في النقطة B ذات الاحداثيات (شكل 8-41):

$$z_B = \frac{M_y}{N_x} ; y_B = - \frac{M_z}{N_x}$$



شکل 8,41

حالة خاصة : (لا مركزية وحيدة المحور) :



شكل 8-41a

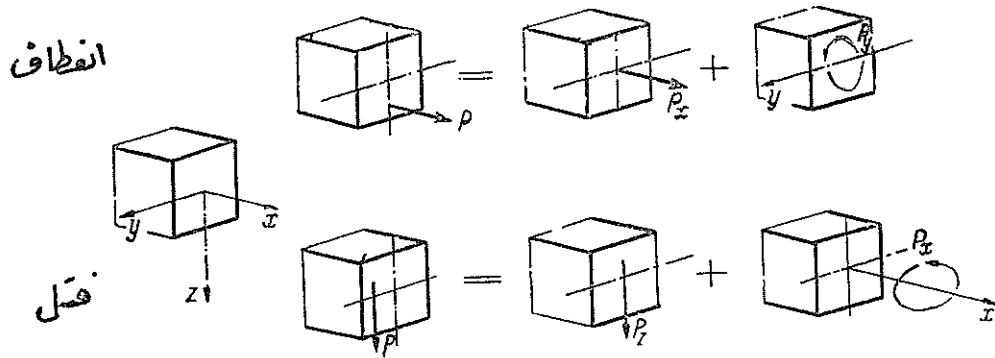
يمثل الشكل (8-41a) لامركزية وحيدة المحور وهي التي تقع فيها نقطة تطبيق القوة اللامركزية على أحد المحاور الرئيسية . فإذا وقعت نقطة تطبيق القوة اللامركزية على المحور z فإن توزيع الاجهاد الناطمي يصبح كالتالي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F'} + \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

حيث أن :

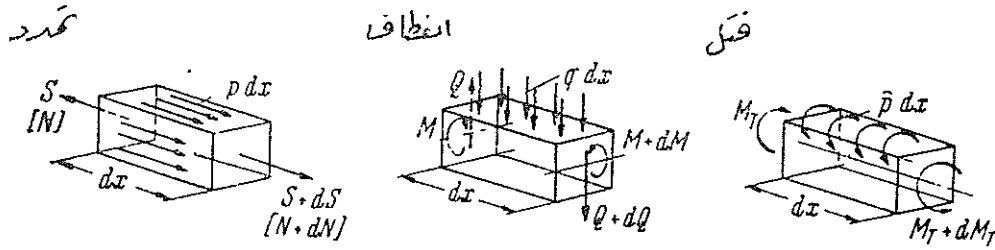
$$N_x = P , \quad M_y = P z_B$$

إذا توازى حامل القوة اللامركزية المؤثرة مع المحور الاوسط للقضيب فالعزم المتشكل هو عزم انعطاف اما اذا وقع حاملها في مستوي المقطع العرضي للقضيب فان العزم المتشكل هو عزم قتل (شكل 8-41 b) .



شكل 8-41 b

يشير الشكل (8-41 c) الى ثلاث حالات هي الاستطالة (التمدد) والانعطاف والقتل .



شكل 8-11 c

٨ - ٣ - ٢ المحاور z, y ليست محاور عطالة رئيسية

إذا لم تكن المحاور z, y محاور عطالة رئيسية فإن توزيع الاجهاد الناتج عن قوة لا مركزية تؤثر في النقطة $B (y_B, z_B)$ يتم الحصول عليه بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} - \frac{M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z \quad (8-68)$$

حيث أن

$$N = P ; M_y = P z_B ; M_z = - P y_B$$

مثال 91 :

حمل عمود بيتوني موثوق من نهايته السفلية بقوة لامركزية P تؤثر على الحافة 3 (شكل 8.42). المعطى : $P = 30,0 \text{ Mp}$ والوزن النوعي للبيتون $\gamma = 2,4 \text{ Mp cm}^{-3}$ و $H = 2,50 \text{ m}$ و $h = 0,6 \text{ m}$ و $b = 0,4 \text{ m}$.

المطلوب :

حساب الاجهادات الناعمية المتشكلة في نقاط الزوايا للمقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقعة (يدخل في حساب الاجهادات تأثير الوزن الذاتي للعمود بعين الاعتبار).

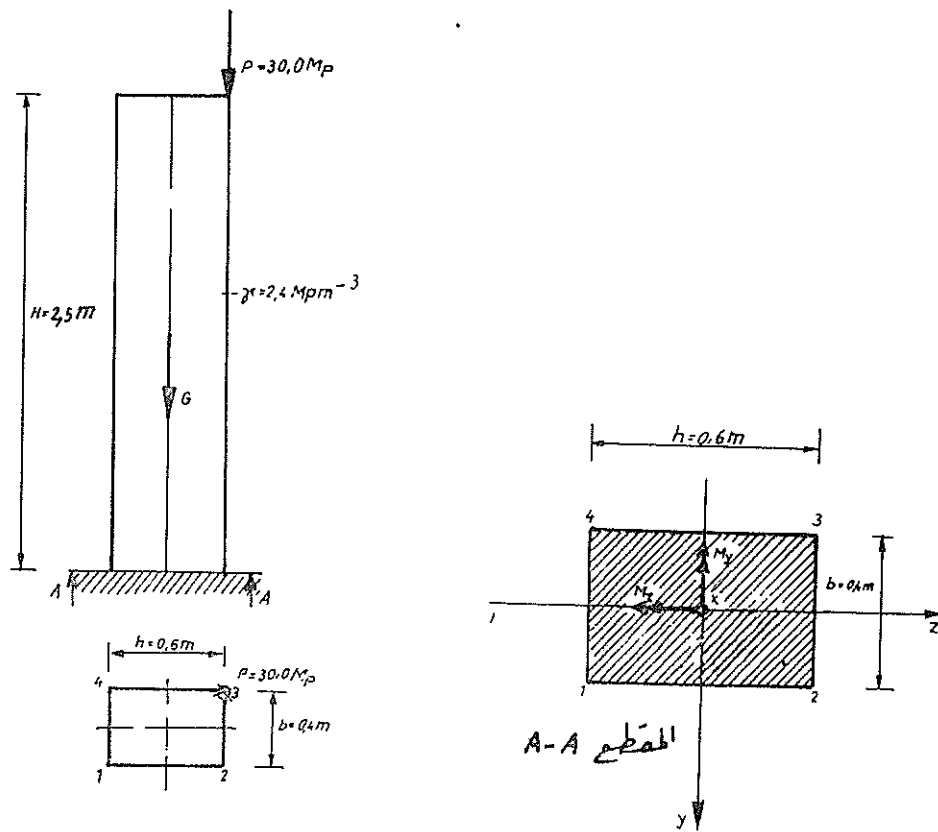
الحل :

مساحة المقطع العرضي للعمود :

$$F = b h = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \text{ m}^2$$

الوزن الذاتي للعمود :

$$G = \gamma F H = 2,4 \cdot 0,24 \cdot 2,5 = 1,44 \text{ Mp}$$



شكل 8-42

عزوم عطالة المقطع العرضي :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,4 \cdot 0,6^3}{12} = 0,072 \text{ m}^4$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,6 \cdot 0,4^3}{12} = 0,032 \text{ m}^4$$

قيم المقطع في المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة :

$$N_x = - (P + G) = - (30,00 + 1,44) = - 31,44 \text{ Mp}$$

$$M_y = - P \frac{h}{2} = - 30,0 \cdot 0,3 = - 9,0 \text{ Mpm}$$

$$M_z = - P \frac{b}{2} = - 30,0 \cdot 0,2 = - 6,0 \text{ Mpm}$$

تتشكل في المقطع العرضي حالة انعطاف منحرف مركب . ان المحاور z, y هي محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي (لكونها محاور تناظر) .

توزيع الاجهاد الناطمي :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y$$

$$\sigma_x = - \frac{31,41}{0,24} - \frac{9,0}{0,0072} z + \frac{6,0}{0,0032} y = -131,0 - 1250,0 z + 1875,0 y$$

احداثيات حواف المقطع العرضي :

$$y_1 = + \frac{b}{2} = + 0,2 \text{ m} ; \quad z_1 = - \frac{h}{2} = -0,3 \text{ m}$$

$$y_2 = + \frac{b}{2} = + 0,2 \text{ m} ; \quad z_2 = + \frac{h}{2} = +0,3 \text{ m}$$

$$y_3 = - \frac{b}{2} = - 0,2 \text{ m} ; \quad z_3 = + \frac{h}{2} = + 0,3 \text{ m}$$

$$y_4 = - \frac{b}{2} = -0,2 \text{ m} ; \quad z_4 = - \frac{h}{2} = -0,3 \text{ m}$$

الاجهادات الناطمية على حواف المقطع العرضي (اجهادات الحواف) :

$$\sigma_{x \times 1} = - 131,0 - 1250 (-0,3) + 1875(+0,2) = + 619,6 \text{ Mp m}^{-2}$$

$$\sigma_{x \times 2} = - 131,0 - 1250(+0,3) + 1875 (+0,2) = - 131,0 \text{ Mp m}^{-2}$$

$$\sigma_{x \times 3} = - 131,0 - 1250(+0,3) + 1875(-0,2) = - 881,0 \text{ Mp m}^{-2}$$

$$\sigma_{x \times 4} = - 131,0 - 1250 (-0,3) + 1875 (-0,2) = - 131,0 \text{ Mp m}^{-2}$$

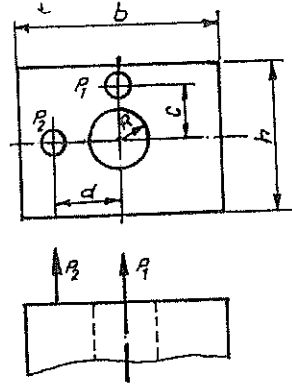
مثال 92 :

حمل عمود مقطعه العرضي مستطيل ويحتوي على ثقب في وسطه ، بقوتين وحيدتين لا مركبتين P_1, P_2 (شكل 8-43) .

المعطى :

$$R = 2 \text{ cm} , h = 8 \text{ cm} , d = 4 \text{ cm} ; c = 3 \text{ cm} , b = 12 \text{ cm} , P_2 = 2000 \text{ kp} , P_1 = 1000 \text{ kp}$$

المطلوب: حساب توزيع الاجهاد الناطمي وتحديد موضع المحور الحيادي وحساب الاجهاد الناطمي الاعظمي .



شكل 8 43

الحل :

بسبب كون المحاور z, y محاور تناظر المقطع العرضي فهي اذاً محاور عطالة رئيسية مركزية له. ان المقطع العرضي المدروس موجود في حالة انعطاف منحرف مركب ويحتوي على قيم القطع التالية :

$$M_y = -P_1 \cdot c ; \quad M_z = -P_2 \cdot d ; \quad N_x = P_1 + P_2$$

علاقة توزيع الاجهاد الناطمي (في حالة كون z, y محاور عطالة رئيسية) :

$$\sigma_x = \frac{P_1 + P_2}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z - \frac{M_z}{I_{zz}} y$$

القيم الهندسية للمقطع العرضي :

$$F = b h - \pi R^2 = 83,44 \text{ cm}^2$$

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} - \frac{R^4 \pi}{4} = 499,44 \text{ cm}^4$$

$$I_{zz} = \frac{hb^3}{12} - \frac{R^4 \pi}{4} = 1139,44 \text{ cm}^4$$

تبديل القيم الهندسية في علاقة الاجهاد ينتج :

$$\sigma_x = 36 + 7,026 y - 6 z$$

تبدل z, y بالـ cm فينتج من العلاقة ان σ_x هي بالـ (kp/cm^2) .
المحور الحيادي:

$$\sigma_x = 0 = 36 + 7,026 y - 6 z ; z = 6 + 1,171 y$$

تشير هذه المعادلة الى ان المحور الحيادي هو خط مستقيم يشكل مع المحور z الزاوية β وهو يقطع المحور z في النقطة $z = +6 cm$.

$$\tan \beta = \frac{1}{1,171} = 0,855 ; \beta = 40,53^\circ$$

$$\max \sigma_x = \sigma_x \left(y = \frac{b}{2} , z = -\frac{h}{2} \right) = + 102,2 kp/cm^2$$

٨ - ٤ نواة المقطع العرضي

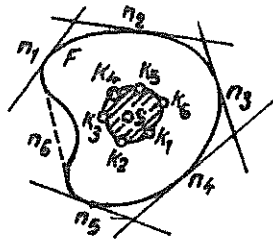
لقد تبين في حالة الانعطاف المركب ان المحور الحيادي إما أن يفصل (بشطر) المقطع العرضي إلى منطقتين احدهما مشدودة والاخرى مضغوطة (المحور الحيادي يقع داخل المقطع العرضي) او أن يقع خارج المقطع العرضي وكحالة حدية ملاسته ، عندئذ تتشكل على سطح المقطع العرضي بكامله اجهادات ناظرية من اشارة واحدة وذلك حسب إتجاه القوة اللامركزية المؤثرة ، إما اجهاد شد فقط او إجهاد ضغط فقط .

تصادف المهندس في الحياة العملية مواد كثيرة ليس لها المقدرة على تحمل نوع معين من الاجهادات، وعلى سبيل المثال فان مقاومة الاحجار والبéton للشد ضعيفة اذا ما قورنت بمقاومتها للضغط . كما ان هناك اجزاء منشآت لا يسمح بتحميلها بنوع معين من الاجهادات الناظرية او يرغب ان يكون الاجهاد الناظمي على كامل المقطع العرضي هو إجهاد ضغط فقط ، على سبيل المثال فعل الاساسات التي لا تسمح المواصفات من ان تنقل اليها اجهادات شادة . لذا يسعى لجعل نقطة تطبيق (نقطة تأثير) القوة اللامركزية قريبة من مركز ثقل المقطع العرضي قدر المستطاع والحصول على وضع يكون فيه المحور الحيادي خارج المقطع العرضي او على الاكثر ملاسته حتى يكون كامل المقطع العرضي مضغوطاً او مشدوداً فقط .

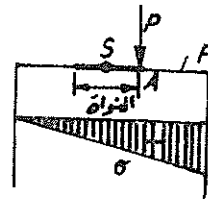
توجد على مقربة من مركز ثقل المقطع العرضي منطقة تدعى سطح النواة او باختصار نواة المقطع العرضي ، من خصائصها انه إذا وقع مركز تطبيق القوة اللامركزية داخلها فان المحور

الحيادي يقع خارج المقطع العرضي وبالتالي يتشكل فيه بكامله إجهاد ناظمي من إشارة واحدة (اي ان الاجهاد الناظمي لا يغير اشارته في المقطع العرضي) اما اذا وقع مركز تطبيق القوة اللامركزية خارج حدود النواة فان المحور الحيادي يقطع المقطع العرضي وفي هذه الحالة يكون المقطع العرضي مضغوطاً في جزء منه ومشدوداً في الجزء الآخر (اي ان الاجهاد الناظمي يغير اشارته في المقطع العرضي) واما اذا وقع مركز تطبيق القوة اللامركزية على محيط النواة فان المحور الحيادي (المحور السليم) يمس محيط المقطع العرضي وبذلك تسيطر على كامل المقطع العرضي اجهادات ناظرية من نوع واحد (اي ان المقطع العرضي اما ان يكون مضغوطاً او يكون مشدوداً) .

لتعيين نواة المقطع العرضي ينبغي التخيل بأن المحور الحيادي هو دائماً في حاله تماس مع نقاط محيط المقطع العرضي ، عندها ترسم نقطة تطبيق القوة حدود النواة . إذا جعل المحور الحيادي يمس المحيط المغلف للمقطع العرضي F في نقطة ما منه ثم تعين بالنسبة لهذا الوضع نقطة تأثير القوة اللامركزية التابعة له والتي تمثل في نفس الوقت نقطة من المحيط المغلف للنواة وتكرار هذه العملية على عدة نقاط مختلفة (المحيط المغلف للمقطع العرضي) إلى ان يتم الحصول على مجموعة من النقاط وبذلك يتم تعيين النواة . ولكي يتم الحصول على المحيط المغلف للنواة ينبغي وصل النقاط التي تم ايجادها مع بعض بخطوط مستقيمة . ينبغي إغلاق الزوايا البارزة في المقطع العرضي بمستقيم حتى لا تقطع بعض هذه المسارات سطح المقطع العرضي في نقطة ما (شكل 8-44) .



شكل 8-44



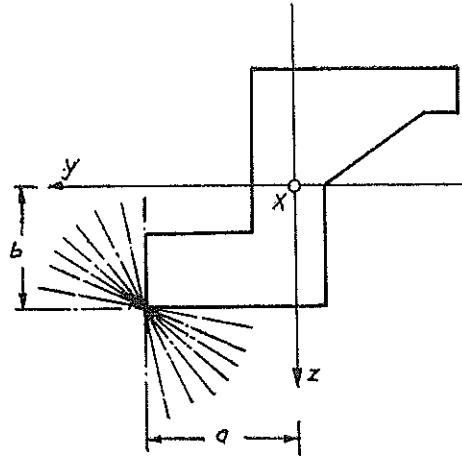
شكل 8-45

تسمى النقاط الواقعة على المحيط المغلف للنواة ، بنقاط النواة . تتبع المحور n_1 نقطة النواة k_1 كما تتبع المحور الحيادي n_2 نقطة النواة k_2 والنح .

تقابل كل ضلع من أضلاع مضلع منتظم نقطة من محيط النواة كما يقابل كل رأس في المضلع خط مستقيم في محيط النواة (تقابل الرؤوس في المقطع العرضي F أضلاع في محيط النواة والعكس صحيح) وذلك لأن المسارات أثناء انتقالها من أحد أضلاع المضلع إلى الضلع

الذي يليه تدور حول نقطة الرأس الواقعة بينها وبذلك تستقل نقطة تطبيق القوة التابعة لها على طول خط مستقيم . توصل نقاط النواة التي تقابل أضلاع المضلع مع بعضها بخطوط مستقيمة . حسب ما ذكر فإن نواة المضلع المنتظم هي مضلع منتظم أيضاً ، عدد رؤوسها يساوي عدد رؤوس المقطع العرضي . إذاً نواة المثلث هي مثلثة أيضاً ونواة المربع هي مضلع رباعي ونواة الدائرة هي دائرة. إذا كان المقطع العرضي متناظراً بالنسبة لمحور ما فنواته تكون أيضاً متناظرة بالنسبة لنفس المحور . بما أن الاجهادات النازلية في حالة الشد أو الضغط المركزي (P تؤثر في مركز ثقل المقطع العرضي s) تتوزع على كامل المقطع العرضي توزيعاً منتظماً (ثابت القيمة) إذاً ينبغي أن يقع مركز ثقل المقطع العرضي دائماً داخل النواة (شكل 8-15) .

لتعيين نقاط المحيط المغلف لنواة سطح مضلع والعائدة لرؤوسه ينبغي تحليل كل المستقيمات التي تمر بنقطة الرأس والتي لا تقطع المقطع العرضي وكذلك محاور حيادية (شكل 8-46) عندئذ يمكن البرهان على أن كل النقاط ذات الاحداثيات z_k, y_k والتي تتبع هذه المستقيمات تقع على مستقيم واحد .



شكل 8-46

تمثل مجموعة (حزمة) المستقيمات التي تمر من نقطة الرأس ذات الاحداثيات a و b بالمعادلة التالية :

$$z = b + m (y - a)$$

أو

$$1 + \frac{m}{b - ma} y - \frac{1}{b - ma} z = 0$$

حيث أن الحرف m هو عامل الاتجاه وهو في هذه الحالة قيمة متغيرة . بمقارنة المعادلة السابقة مع معادلة المحور الحيادي (العلاقة 8-65) التالية :

$$1 + \frac{y_B}{i_{zz}^2} y + \frac{z_B}{i_{yy}^2} z = 0$$

ينتج :

$$z_B = i_{zz}^2 \frac{m}{b - ma}$$

$$y_B = -i_{yy}^2 \frac{1}{b - ma}$$

باختزال العامل m ينتج :

$$1 + \frac{a}{i_{zz}^2} y_B + \frac{b}{i_{yy}^2} z_B = 0$$

وبهذا يكون قد برهن على أن النقاط ذات الاحداثيات (y_k, z_k) لكل عامل من عوامل الاتجاه تقع على مستقيم واحد .

٨ - ٤ - ١ تعيين نقاط نواة المقطع العرضي

α - تعيين نقاط النواة بطريقة تحليلية (المحاور y, z محاور عطالة رئيسية) .

بالرجوع إلى معادلة المحور الحيادي ، في حالة الانعطاف المنحرف المركب ، التالية :

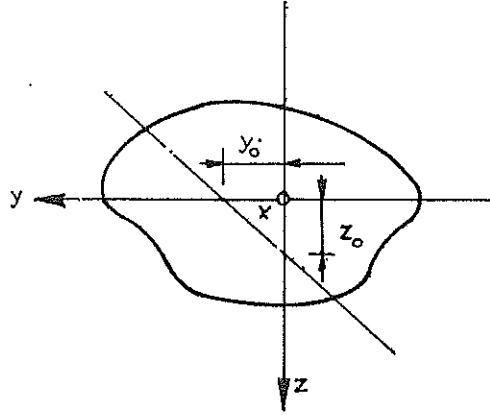
$$1 + \frac{z_B}{i_{yy}^2} z + \frac{y_B}{i_{zz}^2} y = 0$$

(والتي تصلح عندما تكون $N_x \neq 0$, $y_B \neq 0$, $z_B \neq 0$ وعندما تكون المحاور y, z محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي) وبمقارنتها مع معادلة المستقيم الممثل في الشكل (8.47) :

$$z = z_0 - \frac{z_0}{y_0} y$$

أو

$$1 - \frac{1}{z_0} z - \frac{1}{y_0} y = 0 \quad (8-69)$$



شكل 8.47

بعد إعتباره محوراً حيادياً ، يتم الحصول على إحداثيات نقطة تطبيق القوة اللامركزية التالية .
(شكل 8.48 a) :

$$y_B = - \frac{i_{zz}^2}{y_0} , \quad z_B = - \frac{i_{yy}^2}{z_0}$$

وذلك لكون المعادلتين تمثل نفس المستقيم ألا وهو المحور الحيادي . يجعل المحور الحيادي يس محيط المقطع العرضي في نقطة ما إحداثياتها z_B, y_B (يجعل $y_0 = y_R, z_0 = z_R$) ، عندها تنطبق نقطة تأثير القوة اللامركزية على إحدى نقاط النواة التي إحداثياتها z_k, y_k (بذلك تصبح $z_B = z_k, y_B = y_k$) والتي تعين بواسطة العلاقات التالية :

$$y_k = - \frac{i_{zz}^2}{y_R} , \quad z_k = - \frac{i_{yy}^2}{z_R}$$

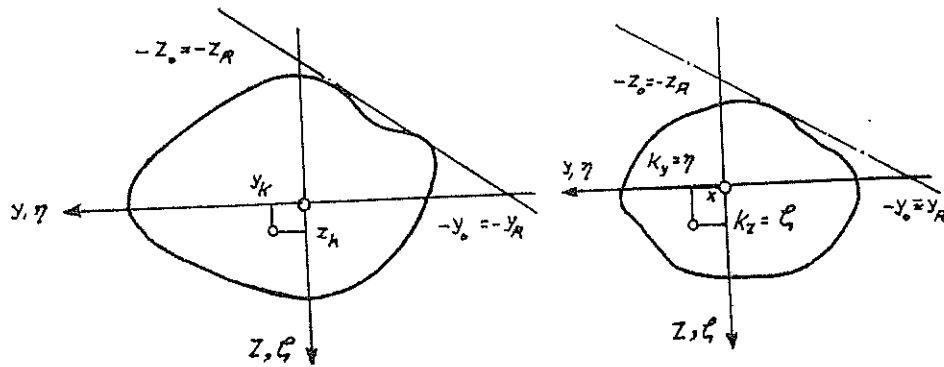
أو بعد استخدام تعريف أنصاف أقطار العطالة والعزوم المقاومة :

$$y_k = - \frac{I_{zz}}{F y_R} = - \frac{W_{zz}}{F} , \quad z_k = - \frac{I_{yy}}{F z_R} = - \frac{W_{yy}}{F} \quad (8-70)$$

- حيث أن I_{zz}, I_{yy} هي عزوم عطالة المقطع العرضي بالنسبة للمحاور z, y .
- و i_{zz}, i_{yy} هي انصاف أقطار العطالة بالنسبة للمحاور z, y .
- و F هي مساحة المقطع العرضي.
- و z_R, y_R هي إحداثيات نقاط التماس الواقعة على حافة المقطع العرضي.
- و z_k, y_k هي إحداثيات نقطة النواة.

بواسطة هذه العلاقات يتم تحديد إحداثيات نقاط النواة وبفضلها يتم حساب أبعاد النواة (بمطلق على البعد بين مركز ثقل المقطع العرضي وبين نقطة النواة بمبدأ النواة). من هذه العلاقات يستخلص ما يلي :

تقع نقطة النواة التابعة لمماس على الحافة العليا تحت مركز s ، اما نقطة النواة العائدة لمماس على الحافة السفلى فتقع فوق مركز الثقل s أو بمعنى آخر فإن إتجاه نقطة النواة ونقطة التماس بالنسبة لمركز الثقل s متعاكسين .



شكل 8.48

β - تعيين نقاط النواة تخليطياً (المحاور z, y محاور عطالة رئيسية للمقطع العرضي) .

يتم تعيين نقاط النواة بطريقة تخليطية وخاصة للمقاطع العرضية غير المنتظمة في الشكل باتباع الخطوات التالية (أما الطريق المتبع فيها فهو الطريق العكسي لايجاد المحاور الحيادي في حالة إعطاء نقطة تأثير القوة) :

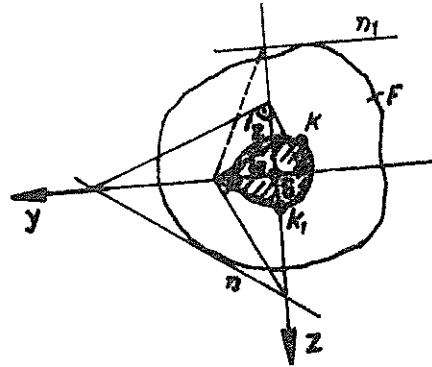
- ١ - يختار مقياس مناسب لانصاف أقطار العطالة i_{zz}, i_{yy} .
- ٢ - ترسم القيمة i_{yy} على الاحداثي y والقيمة i_{zz} على الاحداثي z (كلاهما ابتداء من مركز ثقل المقطع العرضي s) .

٣ - يرسم مماساً ما (وليكن المماس n) على حافة المقطع العرضي F ثم تعين نقاط تقاطعه مع المحاور الاحداثيه y, z (نقطة التقاطع مع المحور z ، b نقطة التقاطع مع المحور y) .
 ٤ - بوصل النقطة b (نقطة تقاطع المماس مع الاحداثي y) ونهاية القيمة i_{zz} (المرسومة على الاحداثي z) بمستقيم ثم باقامة عمود على المستقيم المذكور يمر من نهاية i_{zz} فيقطع الاحداثي y في النقطة \bar{b} . القيمة $S\bar{b}$ هي مسقط نقطة النواة على الاحداثي y (هي إحداثي نقطة النواة بالنسبة للمحور y) .

٥ - بوصل النقطة a (نقطة تقاطع المماس مع الاحداثي z) ونهاية القيمة i_{yy} المرسومة على الاحداثي y) بمستقيم ثم باقامة عمود على المستقيم المذكور ويمر من نهاية i_{yy} فيقطع الاحداثي z في النقطة \bar{a} . القيمة $S\bar{a}$ هي مسقط نقطة النواة على الاحداثي z (هي إحداثي نقطة النواة بالنسبة للمحور z) .

٦ - بالاستعانة بالقيم $S\bar{a}, S\bar{b}$ يتم تحديد نقطة النواة k التابعة للمماس n .

يشير الشكل (8-18) الى كل الخطوات المذكورة كما يشير لطريقة تعيين نقطة النواة k التابعة للمماس n الذي يتعامد مع المحور z . بعد رسم سلسلة من المماسات على حافة المقطع العرضي وتحديد نقاط النواة التابعة لها بالطريقة المذكورة ، يستطاع تعيين النواة بوصل النقاط بعضها بواسطة خطوط مستقيمة .



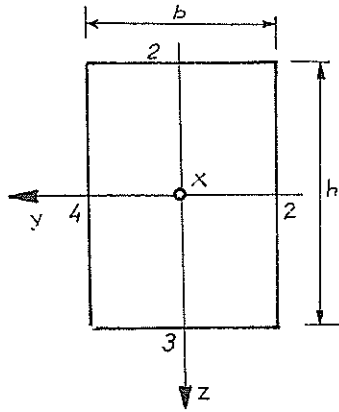
شكل 8-48

٨ - ٤ - ٢ أمثلة

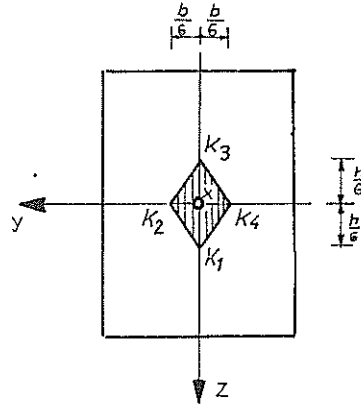
مثال 93 :

إن المقطع العرضي لجائز هو مستطيل الشكل (الشكل 8-49) .

المعطى: b, h .



شكل 8-49



شكل 8-50

المطلوب : تعيين أبعاد نواة المقطع العرضي ورسمها .

الحل :

مساحة المستطيل :

$$F = b h$$

عزوم عطالة المستطيل :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} , \quad I_{zz} = \frac{hb^3}{12}$$

نقاط النواة :

إحداثيات نقطة النواة العائدة للماس 1 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط : $(y_R = \infty , z_R = -\frac{h}{2})$

$$y_{k1} = -\frac{I_{zz}}{F y_R} = 0 ; z_{k1} = -\frac{I_{yy}}{F z_R} = -\frac{bh^3/12}{bh(-h/2)} = +\frac{h}{6}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 3 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط : $(y_R = \infty , z_R = +h/2)$

$$y_{k3} = 0 ; z_{k3} = -\frac{bh^3/12}{bh(+h/2)} = -\frac{h}{6}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماسين 2 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

$$: (y_R = - \frac{b}{2} , z_R = \infty)$$

$$y_{k2} = - \frac{hb^3/12}{bh(b/2)} = + \frac{b}{6} ; z_{k2} = 0$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماسين 4 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

$$: (y_R = + \frac{b}{2} , z_R = \infty)$$

$$y_{k4} = - \frac{hb^3/12}{bh(+b/2)} = - \frac{b}{6} , z_{k4} = 0$$

تتبع حزمة المستقيمت التي تمر من كل رأس من رؤوس المستطيل ، المستقيمت الممثلة في الشكل (8-50) وبهذا يتحدد شكل النواة .

يلاحظ من الشكل بأن نواة المستطيل هي عبارة عن شكل رباعي . يتبع كل رأس في المستطيل مستقيم في النواة ويتبع كل ضلع في المستطيل رأسين في النواة ، كما يلاحظ بأن محاور تناظر المستطيل هي في نفس الوقت محاور تناظر لنواته .

حالات خاصة :

المربع (b=h=a) :

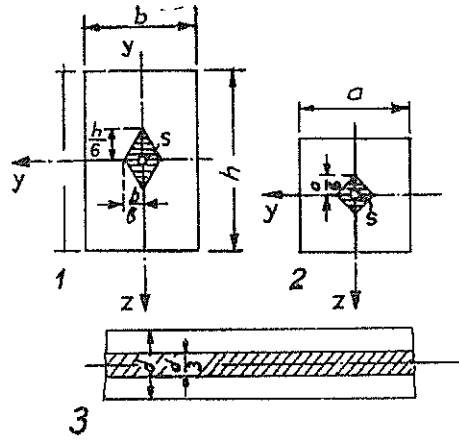
بتبديل b=h=a في علاقات احداثيات النواة السابقة يتم الحصول على احداثيات النواة التابعة للمربع التالية (شكل 8-51) :

$$k = k_y = k_z = \frac{a}{6}$$

شريحة متوازية :

شريحة متوازية عرضها d (على سبيل المثال المسقط الرأسي لجدار طويل والذي يمكن أن يعتبر مستطيلاً لانتهائي الطول) شكل (8-52) :

إن نواة هذه الشريحة هي أيضاً شريحة متوازية عرضها d/3 .



شكل 8-51

شكل 8-52

مثال 94 :

مقطع عرضي على شكل مثلث متساوي الاضلاع (شكل 8-53) .

المعطى : h, b .

المطلوب : تعيين أبعاد نواة المقطع العرضي .

الحل :

مساحة المثلث :

$$F = \frac{1}{2} b h$$

عزوم عطالة المثلث :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{36} , \quad I_{zz} = \frac{hb^3}{48}$$

إحداثيات نقاط النواة :

إحداثيات نقطة النواة العائدة للماس 1-2 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

$$: \left(y_R = \infty ; z_R = +\frac{h}{3} \right)$$

$$y_k = -\frac{I_{zz}}{F \cdot y_R} = 0 ; \quad z_k = -\frac{I_{yy}}{F \cdot z_R} = -\frac{bh^3/36}{\frac{1}{2}bh\left(\frac{h}{3}\right)} = -\frac{h}{6}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 2-3 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

$$: (y_R = -\frac{1}{3}b, z_R = -\frac{2h}{3})$$

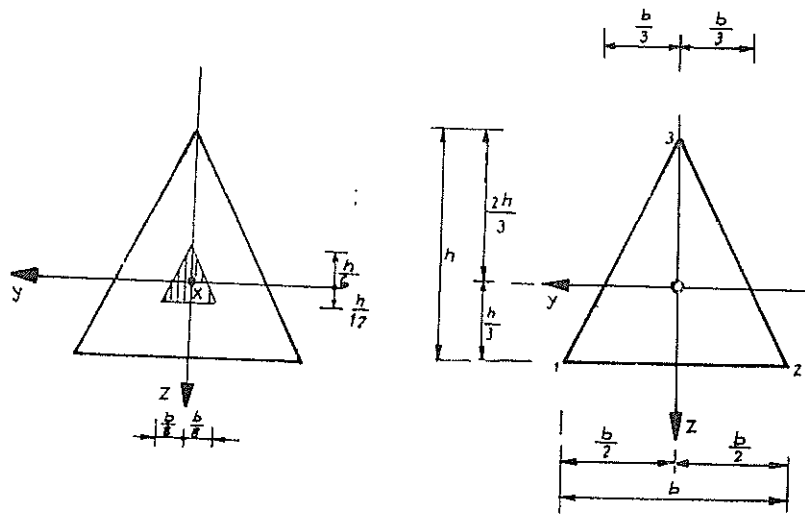
$$y_k = -\frac{hb^3/48}{\frac{1}{2}bh(-\frac{1}{3}b)} = +\frac{b}{8}, z_k = -\frac{bh^3/36}{\frac{1}{2}bh(-\frac{2}{3}h)} = +\frac{h}{12}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 3-1 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط

$$: (y_R = \frac{1}{3}b, z_R = -\frac{2}{3}h)$$

$$y_k = -\frac{hb^3/48}{\frac{1}{2}bh(+\frac{1}{3}b)} = -\frac{b}{8}, z_k = -\frac{bh^3/36}{\frac{1}{2}bh(-\frac{2}{3}h)} = +\frac{h}{12}$$

تقابل حزمة المستقيمات التي تمر من نقاط زوايا المثلث مستقيمات تصل بين نقاط النواة كما يشير الشكل (8-53). ان محاور تناظر المثلث متساوي الاضلاع هي في نفس الوقت محاور تناظر لنواته.



شكل 8-53

مثال 95 :

مقطع عرضي دائري الشكل (8-54).

المعطى : R .

المطاب : حساب أبعاد نواة المقطع العرضي .

الحل :

بسبب تناظر الدائرة بالنسبة لجميع المحاور المركزية فإن نواتها هي أيضاً دائرة متناظرة بالنسبة لنفس المحاور المركزية .

مساحة الدائرة :

$$F = \pi R^2$$

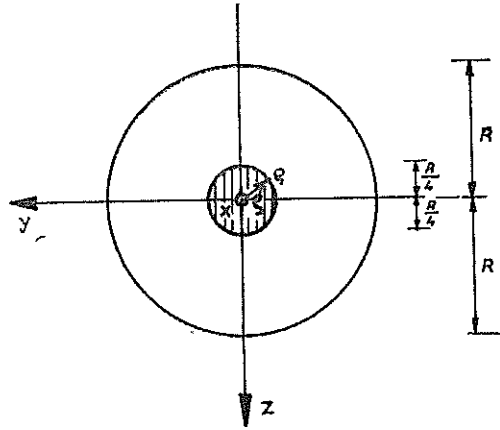
عزوم عطالة الدائرة :

$$I_{yy} = I_{zz} = I = \frac{\pi R^4}{4}$$

نقاط النواة :

يبلغ نصف قطر دائرة النواة ما يلي :

$$\rho_k = \sqrt{y_k^2 + z_k^2} = \frac{I}{F \cdot R} = \frac{\pi R^4 / 4}{\pi R^2 \cdot R} = \frac{R}{4}$$



شكل 8,54

مثال 96 :

مقطع عرضي على شكل حلقة دائرية (شكل 8,55) .

المعطى : $D = d_a = 2R$; $d = d_i = 2r$.

المطلوب : تعيين أبعاد نواة المقطع العرضي ورسمها .

الحل :

مساحة الحلقة الدائرية :

$$F = \pi (R^2 - r^2)$$

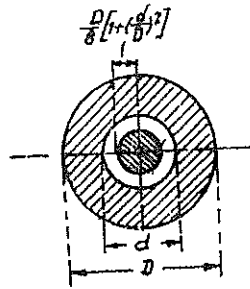
عزم عطالة الحلقة الدائرية :

$$I_{yy} = I_{zz} = I = \pi \frac{(D^4 - d^4)}{64} = \pi \frac{R^4 - r^4}{4}$$

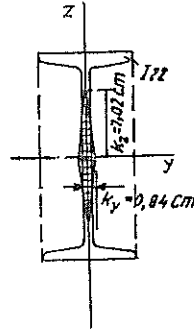
نقاط النواة :

ان نواة الحلقة الدائرية هي دائرة نصف قطرها ρ_k :

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{I}{F \cdot R} = \frac{\pi \frac{R^4 - r^4}{4}}{\pi (R^2 - r^2) \cdot R} = \frac{R^2 + r^2}{4R} \\ &= \frac{R}{4} \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \frac{D}{8} \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \text{const} \end{aligned}$$



شكل 8-55



شكل 8.56

مثال 97 :

يتألف مقطع عرضي من بروفيل^٩ على شكل حرف I (شكل 8-56) .

المعطى : ابعاد المقطع العرضي I 220 .

المطلوب : تعيين نقاط نواة المقطع العرضي .

الحل :

لتعيين النواة تعلق في البداية الرأس البارزة في المقطع العرضي وبذلك ينتج عنه مغلف مستطيل الشكل . اذاً نواة المقطع العرضي للبروفيل هي مضلع رباعي (في هذه الحالة ، معين) لكن هذه النواة تختلف عن نواة المستطيل المغلف المذكور لاختلاف عزوم العطالة والمساحات بين البروفيل والمستطيل المغلف وهي لا تتفق مع بعضها الا في الشكل .

بسبب تناظر المقطع العرضي بالنسبة للمحورين y , z فان النواة هي أيضاً متناظرة بالنسبة لنفس المحاور ولذلك يكتفى بتعيين نصف النواة .

القيم الهندسية للبروفيل (وتؤخذ من الجدول الموجود في الملحق) :

$$F = 39,5 \text{ cm}^2 \quad ; \quad I_{yy} = 3060 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{zz} = 162 \text{ cm}^4$$

$$b = 9,8 \text{ cm} \quad ; \quad h = 22,0 \text{ cm}$$

نقاط النواة :

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 1-1 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط $(y_R = \infty \text{ و } z_R = \frac{h}{2})$:

$$y_R = - \frac{I_{zz}}{F \cdot y_R} = 0 \quad , \quad z_R = - \frac{I_{yy}}{F \cdot z_R} = - \frac{3060}{39,5 \cdot 11} = - 7,01 \text{ cm}$$

احداثيات نقطة النواة العائدة للماس 2-2 الذي يقطع مجموعة المحاور الاحداثية في النقاط $(y_R = b/2 , z_R = \infty)$:

$$y_k = - \frac{I_{zz}}{F \cdot y_R} = - \frac{162}{39,5 \cdot 4,9} = - 0,84 \text{ cm} \quad ; \quad z_k = 0$$

مثال 98 :

مقطع عرضي على شكل زاوية (شكل 8.57) .
المطلوب : تعيين نواة الزاوية L 90.90.13 بالطريقة التخطيطية .

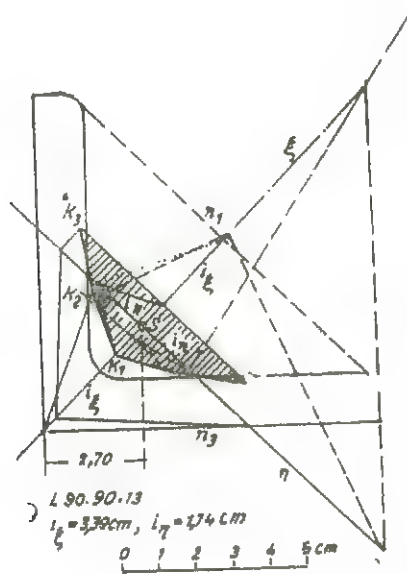
الحل :

من جدول المقاطع العرضية الموجود في الملحق تقرأ أنصاف أقطار العطالة التابعة للمقطع العرضي المدروس :

$$i_1 = 3,39 \text{ cm} ; i_2 = 1,74 \text{ cm}$$

وكذلك بقية القيم اللازمة الأخرى . بعد اختيار مقياس الرسم المناسب للنموه في الشكل (8.57) يرسم نصف قطر المعطالة i_1 على المحور الرئيسي s_1 ويرسم نصف قطر المعطالة i_2 على المحور s_2 كل منها ابتداء من مركز الثقل وبقيـس رسم الاطوال . بعد ذلك يفلق الرأس البارز للمقطع العرضي بواسطة مستقيم (المستقيم n_1) فينشأ عن ذلك مضلع خماسي مغلف متناظر بالنسبة للمحور الرئيسي s_1 . بالنظر إلى المضلع المغلف يرى أن النواة هي أيضاً مضلع خماسي ومتناظر بالنسبة للمحور الرئيسي s_1 . لتعيين النواة التي تمثل مضلعاً خماسياً متناظراً يكتمل بإنشاء ثلاثة نقاط منها فقط .

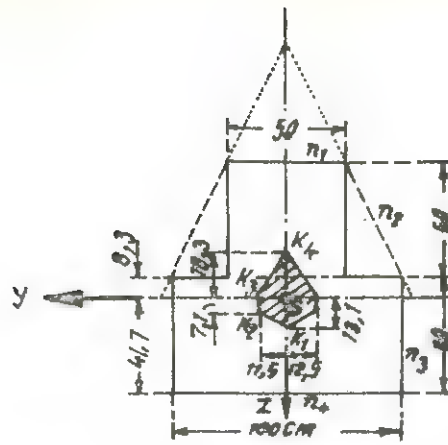
لقد تم في الشكل (8.57) تعيين نقاط النواة k_1, k_2, k_3 التابعة للماسات n_1, n_2, n_3 . تمامد المستقيم n_1 والمحور الرئيسي s_1 ينبغي أن تقع النقطة k_1 على المحور s_1 .



شكل 8.57

مثال 99 :

- مقطع عرضي لوتد بيتوني على شكل حرف T (شكل 858) .
المعطى : ابعاد المقطع العرضي .
المطلوب : تعيين نواة المقطع العرضي تحليلياً مع الرسم .



شكل 8.58

الحل :

في البداية تغلق كافة البروزات الموجودة في المقطع العرضي بواسطة مستقيمات فينشأ عنه مضلع هندسي مغلف متناظر بالنسبة للمحور z . بذلك فإن نواة المقطع العرضي للوند هي مضلع سداسي متناظر بالنسبة للمحور z أيضاً . لاسباب التناظر يكتفى في هذه الحالة لتحديد النواة ايجاد أربع رؤوس منها فقط (أربع نقاط من المحيط المغلف للنواة) وهي k_1 , k_2 , k_3 , k_4 المائدة للمحاور الحياضية n_1 , n_2 , n_3 , n_4 .

لتكن z_i , y_i هي إحداثيات نقاط تقاطع المحور الحياضي n_i مع مجموعة المحاور الاحداثيية ولتكن z_{ki} , y_{ki} هي احداثيات نقطة النواة k_i المائدة للمحور الحياضي n_i والتي تحسب بواسطة العلاقات التالية :

$$y_{ki} = - \frac{i_{xx}^2}{y_i} \quad , \quad z_{ki} = - \frac{i_{yy}^2}{z_i}$$

عزوم العطالة :

لحساب عزوم العطالة الرئيسية I_{yy} , I_{zz} بالنسبة للمحاور المركزية الرئيسية y , z يجرىء المقطع العرضي الى مربع مساحته $F_1 = 50 \cdot 50 \text{ cm}^2$ والى مستطيل مساحته $F_2 = 100 \cdot 50 \text{ cm}^2$. بالاستعانة بعلاقة شتايز يتم الحصول على عزوم العطالة I_{zz} وذلك بالاعتماد على العلاقة (1.30) :

$$I_{yy} = I_{yy1} + I_{yy2} + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} e^2$$

أما I_{zz} فتساوي مجموع عزوم عطالة السطحين الجزئيين وذلك لمرور المحور z مع مراکز ثقلها. مساحة المقطع العرضي :

$$F = F_1 + F_2 = 50 \cdot 50 + 100 \cdot 50 = 7500 \text{ cm}^2$$

القيمة التربيعية لأنصاف اقطار العطالة :

$$i_{yy}^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{1}{7500} \left[\frac{50^4}{12} + \frac{100 \cdot 50^3}{12} + \frac{2500 \cdot 5000}{2500 + 5000} \cdot 50^2 \right] = 764 \text{ cm}^2$$

$$i_{zz}^2 = \frac{I_{zz}}{F} = \frac{1}{7500} \left[\frac{50^4}{12} + \frac{50 \cdot 100^3}{12} \right] = 625 \text{ cm}^2$$

يحسب بعد مركز الثقل s عن حافة المقطع العرضي السفلي بواسطة العلاقة التالية :

$$e_z = \frac{F_1 e_{z1} + F_2 e_{z2}}{F_1 + F_2} = \frac{(100 \cdot 50) \cdot 25 + (50 \cdot 50) \cdot (50 + 25)}{(100 \cdot 50) + (50 \cdot 50)}$$

$$e_z = \frac{5000 \cdot 25 + 2500 \cdot 75}{7500} = 41,7 \text{ cm}$$

وذلك للتمكن من رسم المحاور y ولتعيين احداثيات نقاط تقاطع المماسات على حافات المقطع العرضي في المحاور الاحداثية z, y .

نقاط تقاطع المحور الحياضي n_2 مع المحاور الاحداثية :

$$z_2 = - (8,3 + 50 + 50) = -108,3 \text{ cm}$$

$$y_2 = - \left(50 + \frac{1}{2} 8,3 \right) = -54,2 \text{ cm}$$

أما بقية نقاط تقاطع المحاور الحياضية n_1, n_2, n_3 مع المحاور الاحداثية فقد دونت في الجدول الذي سيرد آنفاً :

n_i	y_i	z_i	k_i	y_{ki}	z_{ki}
—	cm	cm	—	cm	cm
n_1	∞	- 58,3	k_1	0,0	+ 13,1
n_2	- 54,2	- 108,3	k_2	+ 11,5	+ 7,1
n_3	- 50,0	∞	k_3	+ 12,5	0,0
n_4	∞	+ 41,7	k_4	0,0	- 18,3

٨ - ٥ إنعطاف القضبان المنحنية المتناظرة

لتكن المقاطع العرضية المدروسة متناظرة بالنسبة لمستوي الانعطاف . حسبها تكون النسبة بين نصف قطر الانحناء وبين أبعاد المقطع العرضي يفرق بين القضبان ذات الانحناء الطفيف وبين القضبان ذات الانحناء الكبير ، فإذا كانت هذه النسبة كبيرة يقال عن القضيب انه ذو انحناء طفيف اما اذا كانت هذه النسبة صغيرة (نصف قطر الانحناء وأبعاد المقطع العرضي من نفس المرتبة) فيقال عنه انه ذو انحناء كبير .

٨ - ٥ - ١ القضبان ذات الانحناء الطفيف

تعطي معادلة الانعطاف المستقيم في هذه الحالة حلولاً تقريبية جيدة . لذلك تفترض هنا أيضاً صلاحية فرضية نافير في التوزيع الخطي للاجهادات وكذلك صلاحية فرضية برنولي في بقاء المقاطع العرضية مستوية ، يعطى توزيع الاجهادات في القضبان ذات الانحناء الطفيف بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

تعتبر القوة الناعلمية (القوة الطولية) N موجبة عندما تكون قوة شادة وسالبة عندما تكون قوة ضاغطة . ويعتبر عزم الانعطاف $M > 0$ عندما يؤدي لزيادة الانحناء .

٨ - ٥ - ٢ القضبان ذات الانحناء الكبير

تفترض هنا أيضاً من البداية صلاحية فرضية برنولي في بقاء المقاطع العرضية مستوية لكن هذه الفرضية تؤدي بسبب اختلاف أطوال المحاور (الالياف) المحصورة بين مقطعين عرضيين ناظمين (عموديين) على المحور الاوسط للقضيب الى توزيع لا خطي للاجهادات في القضبان ذات الانحناء الكبير وذلك على عكس ما أدت اليه في القضبان المستقيمة .

بعض الرموز الهامة التي مستعمل أثناء استخراج علاقات توزيع الاجهاد :

$k-k$: طبقة المحاور (طبقة الالياف) المدروسة .

$m-m$: المحور المركزي .

$n-n$: طبقة صفر الاجهادات (الطبقة الحيادة) .

$\dot{p}_1 (p_2)$: نصف قطر انحناء طبقة انعدام الاجهادات قبل (بعد) التغيير .

R : نصف قطر انحناء المحور المركزي .

z : بعد $k-k$ عن $m-m$.

e : بعد $m-m$ عن $n-n$.

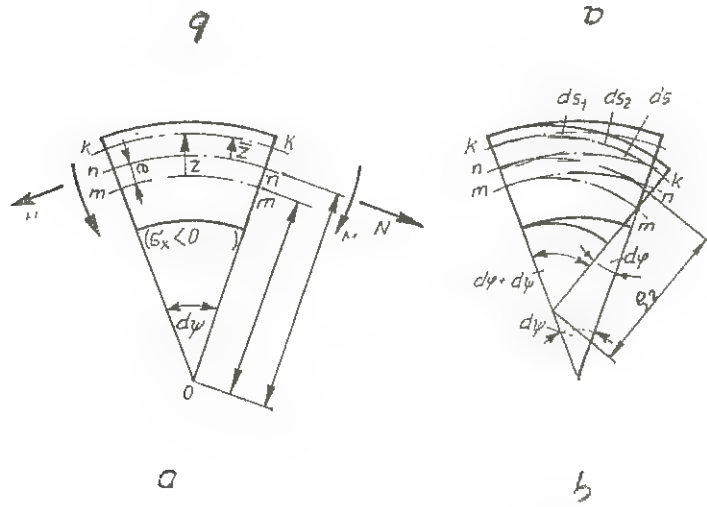
\bar{z} : بعد $n-n$ عن $k-k$.

M : عزم الانعطاف ($M > 0$ عندما يؤدي لزيادة الانحناء) .

N : القوة الناعظية (القوة الطولية) ($N > 0$ قوة شد ، $N < 0$ قوة ضغط) .

تأخذ علاقات التوازن (شروط التوازن) المطبقة على العنصر الحجمي (شكل 8.59)
الشكل التالي :

$$\int_F \sigma_x dF = N \quad ; \quad \int_F \sigma_x z dF = M \quad (8.71)$$



شكل 8.59

لحل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكيًا ينبغي اللجوء الى علاقات التغيير (شروط التغيير) (شكل 8.29) .

حسب فرضية برنولي فان تغير الشكل يتألف من دوران المقاطع العرضية بالزاوية $d\varphi$. فالزاوية

$d\psi$ المحصورة بين مقطعين عرضيين قبل التغير تصبح بعد التغير $d\psi + d\varphi$. لاتعاني طبقة
 صفر الاجهادات (طبقة انعدام الاجهادات) $n - n$ أي تغير نسبي طولي (تمدد) .

$$ds_0 = \rho_1 d\psi = \rho_2 (d\varphi + d\psi)$$

يلغ التمدد (التغير النسبي الطولي) لطبقة المحاور (الالياف) $k - k$ القيمة التالية :

$$\epsilon = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_1} = \frac{(\rho_2 + \bar{z}) (d\varphi + d\psi) - (R + z) d\psi}{(R + z) d\psi} = \frac{z - e}{R + z} \frac{d\varphi}{d\psi} \quad (8.72)$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon = E \frac{d\varphi}{d\psi} \frac{z - e}{R + z}$$

يتم الحصول من شروط التوازن على القيم e , $d\varphi/d\psi$. بواسطة العلاقة التالية :

$$\frac{d\varphi}{d\psi} E = a$$

يتم الحصول من العلاقتين (8 71) و (8.72) على ما يلي :

$$N = a \int_F \frac{z - e}{R + z} dF , \quad M = a \int_F \frac{z^2 - ez}{R + z} dF \quad (8.73)$$

بالاستعانة بالاختصار التالي :

$$Y = \int_F \frac{z^2}{1 + z/R} dF$$

تأخذ التكاملات التي تحتويها العلاقة (5.73) الشكل الآتي :

$$\int_F \frac{z^2}{R + z} dF = \frac{Y}{R} , \quad \int_F \frac{z}{R + z} dF = - \frac{Y}{R^2}$$

$$\int_F \frac{dF}{R + z} = \frac{F}{R} + \frac{Y}{R^2}$$

وبذلك تتحول المعادلة (8.73) لتصبح كما يلي :

$$N = -a \frac{Y}{R^2} - ae \frac{F}{R} - ae \frac{Y}{R^3}$$

$$M = a \frac{Y}{R} + ae \frac{Y}{R^2}$$

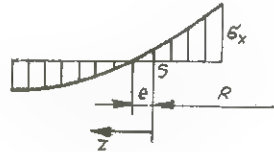
من هاتين المعادلتين يستطاع تعيين المجاهيل a , ae وبمدها تعوض في المعادلة :

$$\sigma_x = a \frac{z - e}{R + z}$$

وبعد اجراء بعض العمليات الحسابية يتم منها الحصول على العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{FR} + \frac{MR}{Y} \frac{z}{R+z} \quad (8.75)$$

حسب هذه العلاقة فإن الاجهاد الناطمي يتوزع في المقطع العرضي وباتجاه الارتفاع على شكل قطع زائد (hyperbolisch) (شكل 8.60) . في هذه الحالة لا تنطبق المحاور المحايدة (الألياف المحايدة) على المحور المركزي حتى ولو كانت $N=0$.



شكل 8.60

عندما يكون العامل Y (العلاقة 8.74) معلوما عندئذ يستطاع تقييم المعادلة (8.75) . من أجل $R \gg z$ فإن العامل Y يتحول الى عزم عطالة السطح العادي وتتحول المعادلة (8.75) لتأخذ الشكل المعتاد التالي :

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} z$$

من أجل المستطيل ذو الأبعاد h, b يصبح العامل Y هكذا :

$$Y = -FR^2 + bR^3 \ln \frac{1+(h/2R)}{1-(h/2R)} \quad (8.76)$$

ومن أجل دائرة قطرها r فإن العامل Y يصبح بالشكل التالي :

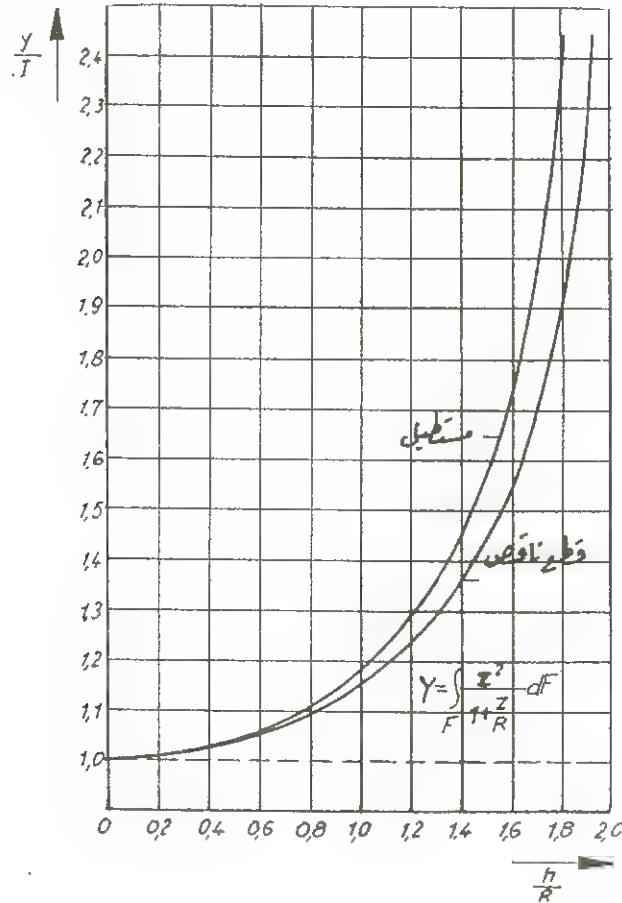
$$Y = FR^2 \left\{ -1 + 2 \left(\frac{R}{r} \right) \left[\frac{R}{r} - \sqrt{\left(\frac{R}{r} \right)^2 - 1} \right] \right\} \quad (8-78)$$

ان نشر العامل Y هو ممكن أيضاً . بواسطة العلاقة التالية :

$$\frac{1}{1+z/R} = 1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R} \right)^2 - \left(\frac{z}{R} \right)^3 + \dots$$

ينتج :

$$Y = I - \frac{1}{R} \int_F z^3 dF + \frac{1}{R^2} \int_F z^4 dF - \frac{1}{R^3} \int_F z^5 dF + \dots$$



شكل 8.61

لقد تم في الشكل (8.61) رسم Y/R كتابع للقيمة h/R او بالاحرى كتابع للقيمة r/h وذلك من أجل مقطع عرضي مستطيل الشكل وآخر على شكل قطع ناقص (ودائرة) .

الفصل التاسع

التغير الناتج عن الانعطاف

٩ - ١ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط انعطاف الجيزان الموشورية في حالة الانعطاف المستقيم

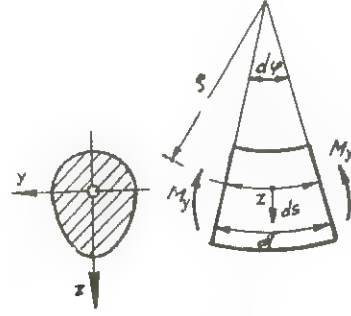
سوف تتم ، في هذه الفقرة ، دراسة المنحني الذي يأخذه (يتبناه) قضيب مستقيم في الاصل نتيجة لتأثير حمولة ساكنة معلومة . يسمى هذا المنحني خط الانعطاف أو الخط المرن . أما الغاية من تعيين خط الانعطاف فهي :

- ١ - حساب التغيرات (الانتقالات والدورانات) في الانشاءات (الجمل الانشائية) للتمكن من مقارنتها مع تغيرات مسموحة تحددها المواصفات .
- ٢ - معالجة مشكلة تحنيط القضبان المضغوطة .
- ٣ - معالجة الجمل غير المقررة ستاتيكيًا .

ليكن الجائر المدروس محملاً بمحمولات ما نظامية على محور القضيب وليفترض من البداية بأن هذه المحولات تقع كلها في مستوى واحد يؤدي لان تشكل في القضيب حالة انعطاف مستقيم (تقع حالة الانعطاف المستقيم عندما ينطبق شعاع عزم الانعطاف على إحدى اتجاهات المحاور الرئيسية للمقطع العرضي) . في حالة تأثير حمولات مائلة (منحرفة) على الجائر فلنأخذها تحلل الى مركبتين إحداها موازية والثانية ناظمية على المحور الاوسط للقضيب . ان المركبة الاخيرة (المركبة النظامية على محور القضيب) هي التي تلعب دوراً على خط الانعطاف .

لتكن المادة التي صنع منها الجائر خاضعة لقانون هوك وليكن عامل مرونتها (الطولي) هو E . تقع انتقالات الجائر في حالة الانعطاف المستقيم في مستوى التحميل وبذلك فان خط الانعطاف في هذه الحالة هو منحنى يقع في مستوى التحميل . سوف يفترض هنا ان احداثيات المقطع العرضي z, y هي محاور رئيسية له (جداء المعطالة $I_{yz} = 0$) . ليكن الاحداثي الطولي (المثبت في الفراغ) الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب غير المتغير هو x وليكن الاحداثي الطولي الذي ينطبق على المحور الاوسط للقضيب المتغير (المثبت في الجسم) هو s . لتعيين

الانتقال الشاقولي الذي يقوم به قضيب مستقيم سوف يقطع منه عنصر تفاضلي طوله $ds=dx$ (يحتفظ المحور الاوسط للقضيب بعد التغير بطوله الأصلي) ويحده من طرفية مقطعان عرضيان متوازيان . نتيجة لتأثير عزوم الانعطاف M_y الموجودة في كل من المقطعين العرضيين فإن العنصر التفاضلي المستقيم (الذي كانت تبلغ كافة أطوال محاوره القيمة ds) سوف يعاني تغييراً يجعله يتحول إلى عنصر تفاضلي منحني (شكل 9 1) .



شكل 9.1

استناداً إلى فرضية برنولي فإن المقاطع العرضية المستوية والناظمية على المحور $z=0$ قبل التغير ، تبقى بعد التغير مستوية وناظمية على المحور الاوسط للجائر المتغير . أي أن المقاطع العرضية للعنصر تعاني فقط دوراناً متبادلاً صغيراً ، يتعين بواسطة الزاوية $d\phi$.
العلاقة الهندسية ، حسب الشكل (9 1) (تشابه المثلثات) :

$$\frac{dl}{ds} = \frac{\rho + z}{\rho} = 1 + \frac{z}{\rho}$$

التمدد (التغير النسبي الطولي) :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{dl - ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 = \frac{z}{\rho} ; (\epsilon_y = \epsilon_z = 0) \quad (9-1)$$

قانون هوك للاجهادات النازمية :

$$\sigma_x = E \epsilon_x = \frac{E}{\rho} z \quad (9-2)$$

علاقة الاجهاد النازمي في حالة الانعطاف المستقيم :

$$\bar{\sigma}_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

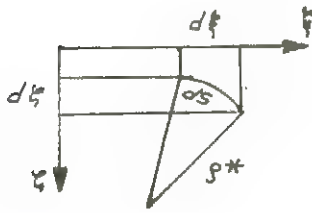
باجراء المساواة بين العلاقة (9-2) والعلاقة (9-3) ينتج :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_{yy}} = \frac{M}{EI} \quad (9.4)$$

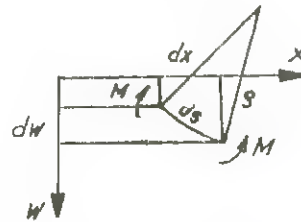
بهذه العلاقة يكون قد تم التوصل الى نصف قطر انحناء خط الانعطاف ممثلاً كنابح لعزم الانعطاف M وصلابة الانعطاف EI_{yy} وهي معادلة الخط المرن للجيزان الموشورية في حالة الانعطاف المستقيم وتسمى المعادلة الطبيعية لخط انعطاف القضبان المستقيمة . بفضل هذه العلاقة يتم التوصل إلى أن خط الانعطاف (الخط المرن) في حالة كون عزم الانعطاف وصلابة الجائز على الانعطاف ثابتين هو قوس دائري نصف قطره هو ρ . ينسب كل من عزم الانعطاف M وصلابة الانعطاف EI وانحناء محور القضيب المتغير $1/\rho$ الى مستوي واحد ويمكن أن تكون كلها تابعة للاحداثي الطولي x .

لقد اعطيت معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) مبدئياً بشكلها الطبيعي (خالية من الاحداثيات) أما الآن فسوف يتم إعطاؤها ممثلة بالاحداثيات . يعطى نصف قطر الانحناء $1/\rho^*$ لمنحني (شكل 9.2) في مجموعة احداثيات ديكرتية ما η , ξ بواسطة العلاقة الرياضية المعروفة :

$$+ \frac{1}{\rho^*} = \frac{d^2\eta/d\xi^2}{[1+(d\eta/d\xi)^2]^{3/2}} = \frac{d^2\eta/ds^2}{\sqrt{1-(d\eta/ds)^2}} \quad (9-5)$$



شكل 9.2



شكل 9.3

سوف يرمز لانتقالات جسم متغير بالاتجاهات x , y , z بالرموز u , v , w . يشير الرمز w الى انتقال نقطة ما من المحور الاوسط للقضيب باتجاه المحور z . بما ان الانتقال w يتعلق (يرتبط) بالمحور x أو بالأحرى s لذلك سوف يصار الى تمثيل المحور الاوسط

للفضيب المتغير على شكل تابع $w(x)$ أو $w(s)$. اذا ثبتت في الشكل (9.1) مجموعة المحاور الاحداثية w , z ، عندئذ يتم التوصل للشكل (9.3) الذي يتطابق مع الشكل (9.2) (ينبغي الانتباه الى الاتجاه المتعاكس بين p^* , p) وبذلك تنتج هنا العلاقة التالية :

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w / dx^2}{[1 + (\frac{dw}{dx})^2]^{3/2}} = \frac{d^2 w' ds^2}{\sqrt{1 - (\frac{dw}{ds})^2}} \quad (9-6)$$

وبذلك تتحول المعادلة الطبيعية لخط الانعطاف (9.4) الى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية :

$$-\frac{d^2 w / dx^2}{[1 + (dw / dx)^2]^{3/2}} = \frac{M_y}{E I_{yy}} \quad (9-7)$$

باجراء الاختصار التالي :

$$\frac{d()}{dx} = ()' \quad (9-8)$$

فان المعادلة التفاضلية (9.7) تأخذ الشكل الآتي

$$-\frac{w''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} = \frac{M_y}{E I_{yy}} \quad (9-9)$$

ينطبق على معظم الجيزان والعناصر الانشائية التي ترد في المجالات الهندسية أن الانتقال $w(x)$ ومشتقه $w'(x) = \tan \varphi(x)$ صغيرين ، أي أن :

$$\frac{dw}{ds} \ll 1 \quad , \quad \frac{dw}{dx} \ll 1$$

بحيث يمكن ، حسب اقتراح العالم أو يلر (EULER) إهمال الحد $[w'(x)]^2$ بالنسبة للعدد 1 في المعادلة الطبيعية لخط الانعطاف (9.6) وبذلك تصبح تلك المعادلة كالتالي :

$$\frac{1}{\rho} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2} \approx -\frac{d^2 w}{ds^2} = -w'' \quad (9-10)$$

وبهذا تتحول المعادلة اللاخطية لخط الانعطاف (9.7) لتأخذ الشكل التالي :

$$w'' = -\frac{M_y}{E I_{yy}} = -\frac{M}{EI} \quad (9-11)$$

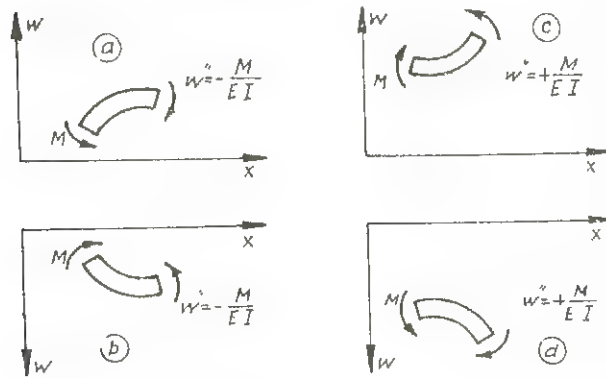
هذه المعادلة هي معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) ويمكنها ان تأخذ إشارة معاكسة عندما تنسب الى مجموعة إحداثيات اخرى ، هكذا :

$$w'' = + \frac{M_y}{EI_y} = + \frac{M}{EI} \quad (8-12)$$

لكي يتم تعيين الانتقال w باعتباره تابعاً للمتغير x ينبغي حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية التالية :

$$w'' = \pm \frac{M}{EI} \quad (8-13)$$

لتنظيم الاشارة في هذه المعادلة فان الشكل (9.4) يقوم بهذه المهمة .



شكل 9.4

ان الاتجاهات المرسومة للقيم w , x , M هي الاتجاهات الموجبة بالتعريف . ينبغي الانتباه الى ان كل القيم المذكورة هي قيم جبرية (اي أنها مرفقة باشارة) ويمكنها ايضاً ان تأخذ قيمة سالبة . يفضل اثناء تعيين الانتقال $w(x)$ باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية اتباع الطريق التالي :

١ - اختيار كفي و لكن بشكل مناسب لمجموعة المحاور الاحداثية (w , x , M) . بالامكان اختيار مجموعة محاور احداثية مشتركة او مختلفة لكل من مجالات الجائز . ينبغي ان لا يحتوي المجال الواحد (مجال الاستمرار) على عدم استمرار اياً كان نوعه (بالمفهوم الرياضي) . يتحدد عدم الاستمرار (وبذلك ايضاً حدود المجالات) من خلال الانكسارات والقفزات (الانزلاقات) التي تحتويها كل من توابع $M(x)$, $EI(x)$ وتغير اتجاه الجائز .

٢ - حساب توابع $M(x)$, $EI(x)$. ينبغي الانتباه للاتجاهات الموجبة التي تم اختيارها في (١-). علاوة على ارتباط تابع المزم $M(x)$ بالحمولة الخارجية فإنه يتعلق أيضاً ، في الجيزان غير المقررة مستاتيكيًا ، من الـ n ردود الافعال المجهولة وذلك عندما تكون الجملة n - مرة غير مقررة مستاتيكيًا .

٣ - تعيين التوابع $w''(x)$ (لكل مجال) ، حسب المعادلة (9.11) وبالإستعانة بالتوابع $EI(x)$, $M(x)$ وذلك بعد الانتباه للإشارة المنوه عنها في ١ - . تشكل في الـ m مجال m توابع مختلفة لـ $w_k''(x)$ ($k=1,2,...,m$) .

٤ - مكاملة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٣ - . عندئذ تشكل $2m$ ثوابت للتكامل (معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية) .

٥ - كتابة شروط الاطراف وشروط التحول (شروط الانتقال من مجال لمجال آخر) التابعة للقيم الهندسية $w(x)$, $w'(x)$ (وتسمى هذه الشروط بشروط الاطراف وشروط التحول الهندسية) . تشكل في جملة n - مرة غير مقررة مستاتيكيًا والتي تحوي على m مجال ، $2m+n$ معادلة جبرية خطية لتعيين $2m$ ثوابت تكامل و n ردود افعال مساند غير مقررة مستاتيكيًا .

٦ - حل مجموعة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٥ - .

٧ - تلخيص النتائج وتقييمها .

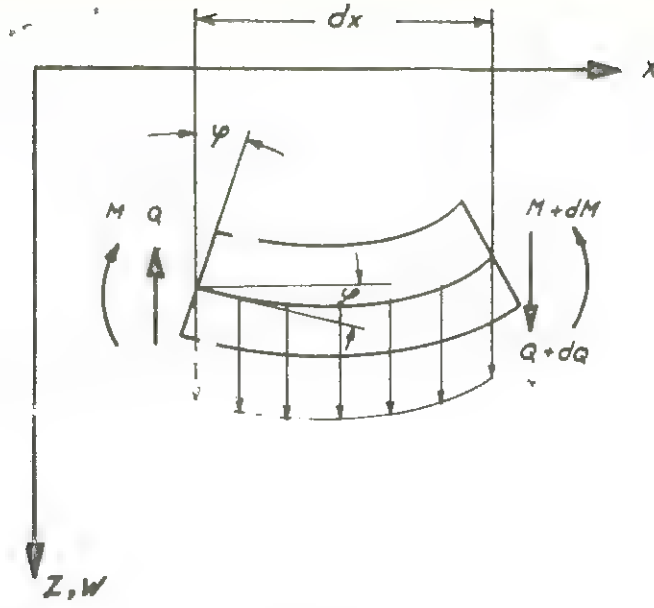
٩ - ٢ المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط انعطاف الجيزان المشورية في حالة الانعطاف المستقيم

سيتم في هذه الفقرة استخدام مجموعة المحاور الاحداثية المشار اليها في الشكل (9.5) .

تأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف بالنسبة لمجموعة المحاور الاحداثية w , x المشار اليها آنفاً ، الشكل التالي :

$$w'' = - \frac{M}{EI} \quad (9-14)$$

لقد تم في علم مسكون الاجسام الحاملة التوصل لعلاقات التفاضلية التي تربط بين $M(x)$, $Q(x)$, $q(x)$ التالية :



شكل 9.5

$$Q = + \frac{dM}{dx} = + M' \quad (9-15)$$

$$q = - \frac{dQ}{dx} = - Q' = - M'' \quad (9-16)$$

من المعادلات الثلاثة السابقة يتم التوصل لما يلي من العلاقات :

$$M = - EI w'' \quad (9-17)$$

$$Q = - (EI w'')' \quad (9-18)$$

$$q = + (EI w'')'' \quad (9-19)$$

عندما تكون $EI = \text{const}$ فإن المعادلات السابقة تتحول لتأخذ شكلها الجديد التالي :

$$M = - EI w'' \quad (9-17 \text{ b})$$

$$Q = - EI w''' \quad (9-18 \text{ b})$$

$$q = + EI w'''' \quad (9-19 \text{ b})$$

إن المعادلة (9.19) هي معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة من أجل الانتقال الشاقولي $w(x)$

كتابيع للمتغير x . يستعان بالمعادلات (9.17) , (9.18) للتمكن من كتابة شروط الاطراف وشروط التحول .

لحساب الانتقال الشاقولي $w(x)$ عن طريق استخدام المعادلة التفاضلية من الرتبة الرابعة (9.19) يفضل إتباع الخطوات الآتية :

١ - تقسيم الجلة القضيية الى مجالات وتثبيت مجموعة الاحداثيات (w, x) (شكل 9.5) على مخطط الجلة (وهذا ضروري للتمكن من كتابه شروط الأطراف وشروط التحول) .

٢ - تعيين التوابيع $q(x)$, $EI(x)$. هنا لا تظهر حتى في الجيزان غير المقررة متناهيًا ردود افعال مساند بمجولة .

٣ - كتابة المعادلات التفاضلية من اجل الـ m مجال الموجودة في الجلة القضيية وحسب المعادلة (9.19) .

٤ - مكاملة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٣ - بعد الانتهاء من المكاملة سوف تشكل $4m$ ثوابت للتكامل (معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة) .

٥ - كتابة شروط الاطراف وشروط التحول (التحول من مجال لمجال اخر يليه) العائدة للقيسم :

$$Q(x) ; M(x) ; w'(x) (w' = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi) , w(x)$$

تسمى شروط الاطراف وشروط التحول العائدة للقيم $Q(x)$, $M(x)$ بالشروط الستاتيكية .

اما شروط الاطراف وشروط التحول العائدة للقيم $w'(x)$, $w(x)$ فتسمى بالشروط الهندسية .

بتطبيق المعادلات (9.7) حتى (9.19) يتم الحصول على $4m$ معادلة من اجل $4m$ ثوابت

للتكامل (هنا لا تلعب درجة التقرير الستاتيكية اي دور في عدد المعادلات) .

٦ - حل مجموعة المعادلات التي تم الحصول عليها في ٥ - .

٧ - تلخيص النتائج وتقييمها .

ملاحظة :

عندما تختار مجموعة الاحداثيات (w, x) كما في الشكل (9.5) فان المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف والعلاقات التفاضلية التي تربط بين قيم القطع وتابع المحولة تصبح بالشكل التالي :

$$w'' = + \frac{M}{EI}$$

$$Q = + \frac{dM}{dx} = + M'$$

$$q = + \frac{dQ}{dx} = + Q' = + M''$$

من هذه المعادلات الثلاثة يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$M = + EI w''$$

$$Q = + (EI w'')$$

$$q = + (EI w'')''$$

تسمى الطريقتين السابقتين (طريقة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية وطريقة المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة) في بعض المراجع بطريقة المكاملة .

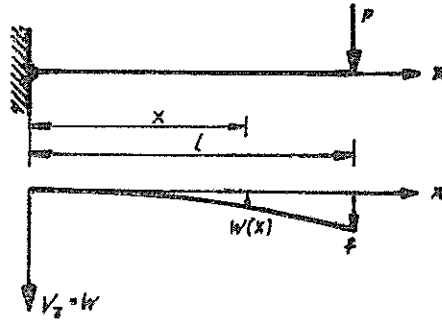
٩ - ٣ أمثلة :

مشال 100 :

حملت النهاية الحرة لجائز بارز (ظفر) بمحمولة وحيدة شكل (9.6) .

المعطى : l , P , $EI = \text{const.}$.

(تطبيق عددي : $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$, $d = 5 \text{ cm}$, $l = 100 \text{ cm}$, $P = 250 \text{ kp}$) .



شكل 9.6

المطلوب :

- ١ - حساب ورسم خط الانعطاف (الخط المرن) .
 - ٢ - تعيين القيمة العظمى للانتقال الشاقولي (السهم) .
 - ٣ - تعيين زاوية دوران المماس لخط الانعطاف عند نقطة النهاية الحرة b .
- ينبغي ، في البداية ، الاجابة على الطلبات بشكل عام ودون استخدام القيم العددية ، بعد ذلك يجرى التطبيق العددي على الطلب الاول فقط .

الحل :

I - استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف .

I - ١ - حساب ورسم خط الانعطاف .

عزم الانعطاف :

بتطبيق شروط التوازن على الجزء الايمن المقطع من الجائز (شكل 9.7) يتم الحصول على عزم الانعطاف في النقطة x من الجائز (تابع عزم الانعطاف) :

$$M(x) = -P(l-x)$$

المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف :

$$EI w''(x) = -M(x)$$

بتبديل تابع عزم الانعطاف في هذه العلاقة ينتج :

$$EI w''(x) = P(l-x)$$

بكاملة هذه المعادلة على التوالي يتم الحصول على العلاقات التالية :

$$EI w'(x) = \int P(l-x) dx + C_1 = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (a)$$

$$EI w(x) = \int \left[Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1 \right] dx + C_2 = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (b)$$

يحتاج تعيين ثوابت التكامل C_1 , C_2 الى معادلتين يتم الحصول عليهما من شروط الاطراف الهندسية للجملة .

شروط الاطراف الهندسية :

α - ينعدم الانتقال الشاقولي عند نقطة الوثاقة . ويعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي :

$$\bullet \text{ عندما } x=0 \text{ فإن } w=0 \text{ أو هكذا } w(x=0)=0$$

β - ينعدم دوران المماس لخط الانعطاف عند نقطة الوثاقة (ينعدم ميل خط الانعطاف في نقطة الوثاقة ، أي انه يبقى أفقياً) . ويعبر عن ذلك رياضياً بالشكل التالي :

$$\bullet \text{ عندما } x=0 \text{ فإن } w'=0 \text{ أو هكذا } w'(x=0)=0$$

بتحقيق المعادلة (b) لشرط الاطراف (α -) ينتج :

$$0 = 0 + 0 + 0 + C_2 \quad ; \quad C_2 = 0$$

كما يعطي تحقيق المعادلة (a) لشرط الاطراف (β -) ما يلي :

$$0 = 0 + 0 + C_1 \quad ; \quad C_1 = 0$$

بتبديل ثوابت التكامل في معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) يتم الحصول على المطلوب :

$$w(x) = \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{6l^3} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right)$$

I - ٢ - تعيين القيمة العظمى للانتقال الشاقولي

يتشكل الانتقال الاعظمي للجائز البارز عند النهاية الحرة التي تؤثر عليها القوة الوحيدة ، أما قيمتها فيتم الحصول عليها من معادلة خط الانعطاف $x=l$ وهي تبلغ :

$$w(x=l) = f = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (c)$$

I - ٣ - زاوية دوران المماس على خط الانعطاف عند نقطة النهاية الحرة .

بتبديل $x=l$ في معادلة مشتق خط الانعطاف :

$$w'(x) = \varphi = \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{x}{l^2} - \frac{x^2}{2l^3} \right)$$

يتم الحصول على زاوية دوران المماس للنهاية الحرة b :

$$w'(x=l) = \phi = \frac{Pl^2}{2EI}$$

عندما يختار الاحداثي \bar{x} الذي يبدأ عند النهاية الحرة للجائز بدلاً عن الاحداثي x عندئذ تأخذ معادلة خط الانعطاف الشكل الجديد الآتي :

$$w(\bar{x}) = \frac{1}{EI} \left(\frac{P}{6} \bar{x}^3 - \frac{Pl^2}{3} \bar{x} + \frac{Pl^3}{3} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \left[\left(\frac{\bar{x}}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{\bar{x}}{l} \right) + 2 \right]$$

II - استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف .

بالامكان الحصول على نفس النتائج السابقة باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة التالية :

$$EI w''''(x) = -M''(x) = +q(x) = 0$$

بمكاملة هذه العلاقة عدة مرات ينتج :

$$EI w'''(x) = -Q(x) = D_1$$

$$EI w''(x) = -M(x) = D_1 x + D_2$$

$$EI w'(x) = EI \phi(x) = D_1 \frac{x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$EI w(x) = D_1 \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} + D_3 x + D_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربعة نلزم أربع معادلات يتم الحصول عليها بالاستعانة بشروط الاطراف .
شروط الاطراف الهندسية :

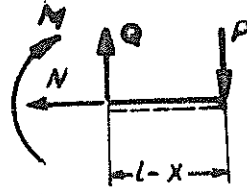
عندما $x=0$ فإن $w=0$ أو هكذا $w(x=0)=0$.

عندما $x=0$ فإن $w'=0$ أو هكذا $w'(x=0)=0$.

شروط الاطراف الستاتيكية :

عندما $x=l$ فإن $Q=+P$ أو هكذا $Q(x=l)=P$.

عندما $x=l$ فإن $M=0$ أو هكذا $M(x=l)=0$.



شكل 9.7

بتحقيق المعادلات التفاضلية لشروط الاطراف ، ينتج :

$$w(x=0) = 0 = D_4$$

$$w'(x=0) = 0 = D_3$$

$$M(x=l) = 0 = -D_1 l - D_2$$

$$Q(x=l) = P = -D_1$$

من هذه العلاقات يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$D_3 = D_4 = 0 ; D_1 = -P ; D_2 = Pl$$

بالتبديل في العلاقات التفاضلية يتم الحصول على معادلة خط الانعطاف :

$$w(x) = \frac{P l^3}{6 E I} \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right)$$

وعلى معادلة عزم الانعطاف ومعادلة القوة العرضية :

$$M(x) = -P(l-x)$$

$$Q(x) = +P$$

تطبيق عددي :

بتقييم معادلة خط الانعطاف يتم الحصول على القيم العددية التالية :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 30,68 \text{ cm}^4$$

x / l	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
w [cm]	0	0,074	0,269	0,56	0,91	1,29

مثال 101 :

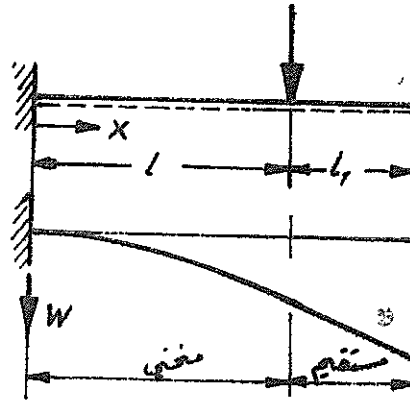
حملت نقطة داخلية ما من جائز بارز (ظفر) بحمولة وحيدة (شكل 9.8) .

المعطى : l_1 , l , P , $EI = \text{const.}$.

المطلوب :

١ - إيجاد معادلة خط الانعطاف مع الرسم .

٢ - حساب القيمة العظمى للانتقال الشاقولي (السهم) .



شكل 9 8

الحل :

آ - حساب المطالب بالاعتماد على معلومات مسبقة .

يتألف الجائز من مجالين. تثبت الاحداثيات المساعدة x_1 , x_2 كما يشير الشكل (9.8) وهي تتجه من اليمين إلى اليسار . أما المحور z والانتقال w الذي ينطبق عليه فيشير إلى الأسفل .

المجال I : $(0 \leq x_1 \leq l_1)$:

يبقى المجال 1 مستقيماً وذلك لانعدام عزم الانعطاف فيه $(M_1 = 0)$.

المجال II : $(0 \leq x_2 \leq l)$:

$$M_2 = - P x_2$$

$$EI w''_2 = - M_2 = + P x_2$$

بما ان معادلة العزم في هذا المثال هي نفسها في المثال السابق (المثال 100) وبسبب كون الجائز المدروس هناك هو نفس الجائز المدروس هنا ، لذلك يمكن الاستفادة من النتيجة السابقة لكونها نفس النتيجة في هذا المثال ، اي :

$$w_2 = \frac{1}{EI} \left(P \frac{x^3}{6} - P \frac{l^2}{2} x + P \frac{l^3}{3} \right) = \frac{P l^3}{6 EI} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l} \right) + 2 \right]$$

لعدم إحتواء خط الانعطاف عند نقطة تطبيق القوة على إنكسار ، لذلك ينبغي أن يكون خط الانعطاف في المجال غير الحمل (المجال I) باتجاه المماس على منحنى خط انعطاف المجال II . زاوية ميل خط الانعطاف في المجال I :

$$\operatorname{tg} \alpha = | w'_2(x_2 = 0) | = \left| - \frac{Pl^2}{2EI} \right| = \frac{Pl^2}{2EI}$$

وبوامعتهما يتم التوصل لا كبر إنتقال شاقولي في الجائز :

$$f_1 = f + l_1 \operatorname{tg} \alpha = f + l_1 \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{Pl^3}{6EI} \left(2 + 3 \frac{l_1}{l} \right)$$

(بما أن انعطاف الجائز الذي تنطبق عليه الفرضيات البحوث في بداية هذا الفصل مسبب عن عزم الانعطاف ، فان شكل المجال الذي ينعدم فيه العزم يبقى مستقيماً دون إنعطاف) .

ب - حساب المطالب باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية :

المجال I $(0 \leq x_1 \leq l_1)$:

$$M_1 = 0$$

$$EI w''_1 = - M_1 = 0$$

$$EI w'_1 = + C_1$$

$$EI w_1 = + C_1 x_1 + C_2$$

المجال II $(0 \leq x_2 \leq l)$:

$$\dot{M}_2 = -P x_2$$

$$EI w''_2 = -M_2 = +P x_2$$

$$EI w'_2 = +P \frac{x_2^2}{2} + C_3$$

$$EI w_2 = +P \frac{x_2^3}{6} + C_3 x_2 + C_4$$

شروط الاطراف :

$$w_2'(x_2=l) = 0 \quad : C_3 = -\frac{Pl^2}{2}$$

$$w_2'(x_2=l) = 0 \quad : C_4 = +\frac{Pl^3}{3}$$

$$w'(x_1=l_1) = w'(x_2=0) : C_1 = -\frac{Pl^2}{2}$$

$$w_1(x_1=l_1) = w_2(x_2=0) : C_1 l_1 + C_2 = +\frac{Pl^3}{3} \quad , \quad C_2 = \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pl^2}{2} l_1$$

$$EI w_1 = -\frac{Pl^2}{2} x_1 + \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pl^2}{2} l_1$$

$$EI w_2 = +P \frac{x_2^3}{6} - \frac{Pl^2}{2} x_2 + \frac{Pl^3}{3}$$

الانتقال الشاقولي الاعظمي :

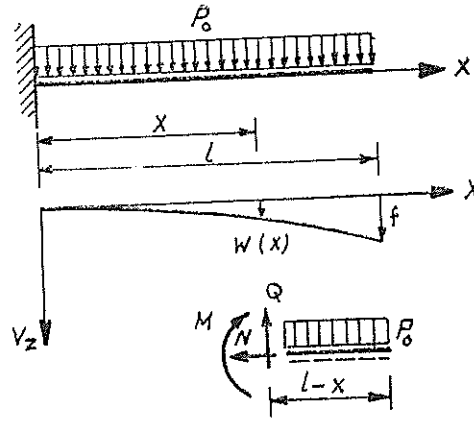
$$f_1 = w_1(x_1=0) = \frac{P l^3}{6 EI} \left(2 + 3 \frac{l_1}{l} \right)$$

مثال 102 :

يتألف المقطع العرضي لجائز بارز (جلفر) محمل بجمولة خطية ثابتة (بجمولة خطية موزعة بانتظام) شدتها $p_z(x)=p_0$ (شكل 9-9) من مستطيل عرضه b ثابت وارتفاعه h متغير خطياً (ان ارتفاع المستطيل عند النهاية الحرة هو H_1 وارتفاعه عند النهاية الموثوقة هو H_0) .

المعطى : E, H_1, H_0, b, p_0 .

المطلوب : تعيين خط الانعطاف (إيجاد المعادلة ورسم المنحني) .



شكل 9.9

الحل :

يعين ارتفاع المقطع العرضي في نقطة ما من الجائز بواسطة المعادلة التالية :

$$h(x) = H_0 - \frac{H_0 - H_1}{l} x = H_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

حيث أن

$$a = \frac{H_0 l}{H_0 - H_1}$$

يعطى عزم العطالة السطحي للمقطع العرضي في نقطة ما من الجائز بالعلاقة التالية :

$$I_{yy}(x) = \frac{b(x)^3}{12} = \frac{b H_0^3}{12} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 = I_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3$$

يعين عزم الانحناء في نقطة ما من الجائز بواسطة العلاقة الآتية :

$$M(x) = -\frac{p_0 l^2}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 ; M(x) = M_y(x)$$

بتبديل هذه المعادلة في العلاقة التفاضلية لخط الانحناء ينتج :

$$E I_0 w''(x) = \frac{p_0 l^2}{2} \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}$$

بمكاملة هذه العلاقة وبلاستعانة بالتكامل التالي :

$$\int \frac{(1-x/l)^2}{(1-x/a)^2} dx = \frac{a^3}{l^2} \left[\frac{(a-l)^2}{2a^2(1-x/a)^2} - \frac{2(a-l)}{a(1-x/a)} - \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \right]$$

ينتج :

$$EI_0 w'(x) = \frac{p_0 a^3}{4} \left[\frac{(1-l/a)^2}{(1-x/a)^2} - 4 \frac{1-l/a}{1-x/a} - 2 \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] + C_1$$

باجراء مكاملة ثانية يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$EI_0 w(x) = \frac{p_0 a^4}{4} \left[\frac{(1-l/a)^2}{1-x/a} - 2(1-x/a)(1+\ln a) + \right. \\ \left. + 2 \left(3 - 2 \frac{l}{a} - \frac{x}{a} \right) \ln(a-x) \right] + C_1 x + C_2$$

بتحقيق المعادلة التفاضلية وتكاملاتها لشروط الاطراف الهندسية التالية :

$$w(x=0) = 0$$

$$w'(x=0) = 0$$

يتم الحصول على المعادلات الآتية :

$$\frac{p_0 a^4}{4} \left[\left(1 - \frac{l}{a}\right)^2 - 2(1 + \ln a) + 2 \left(3 - 2 \frac{l}{a}\right) \ln a \right] + C_2 = 0$$

$$\frac{p_0 a^3}{4} \left[\left(1 - \frac{l}{a}\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{l}{a}\right) \right] + C_1 = 0$$

بحل هذه المعادلات يتم الحصول على ثوابت التكامل :

$$C_1 = - \frac{p_0 a^3}{4} \left[\left(1 + \frac{l}{a}\right)^2 - 4 \right]$$

$$C_2 = - \frac{p_0 a^4}{4} \left[\left(1 - \frac{l}{a}\right)^2 - 2 + 4 \left(1 - \frac{l}{a}\right) \ln a \right]$$

وبتبدالها في التكامل الثاني للمعادلة التفاضلية يتم الحصول على معادلة خط الانعطاف :

$$w(x) = \frac{p_0 a^4}{4EI_0} \left[\frac{(1-l/a)^2}{1-x/a} \frac{x^2}{a^2} + 2\left(3-2\frac{l}{a}\right) \frac{x}{a} + 2\left(3-2\frac{l}{a} - \frac{x}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \right]$$

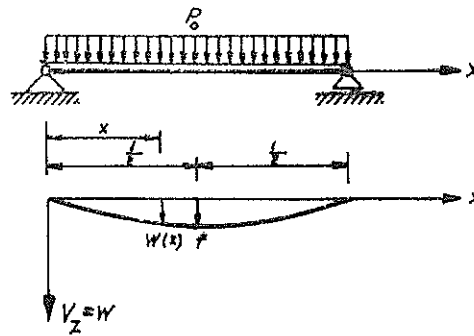
اما الانتقال الشاقولي للنهاية الحرة فيبلغ :

$$w(x=l) = f = \frac{p_0 a^4}{4EI_0} \left[6\frac{l}{a} - 3\frac{l^2}{a^2} - \frac{l^3}{a^3} + 6\left(1 - \frac{l}{a}\right) \ln\left(1 - \frac{l}{a}\right) \right]$$

مثال 103 :

حمل جانز بسيط بحمولة خطية موزعة بانتظام (ثابتة) p_0 (شكل 9-10) .
المعطى : $EI = \text{const.}$, l , p_0 .

المطلوب : تعيين خط الانعطاف (بالحساب والرسم) باستخدام المعادلتين التفاضليتين ، من المرتبة الثانية ومن المرتبة الرابعة .



شكل 9-10

الحل :

أ - تعيين خط الانعطاف باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .
يعطى عزم الانعطاف في نقطة ما من الجانز البسيط (توزيع عزم الانعطاف) بواسطة العلاقة التالية :

$$M(x) = \frac{p_0}{2} (lx - x^2)$$

وبعد التبديل في العلاقة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط الانعطاف ينتج :

$$E I w''(x) = -\frac{p_0 l}{2} x + \frac{p_0}{2} x^2$$

وبإجراء مكاملة مضاعفة للعلاقة السابقة ينتج :

$$E I w'(x) = -\frac{p_0 l}{4} x^2 + \frac{p_0}{6} x^3 + C_1$$

$$E I w(x) = -\frac{p_0 l}{12} x^3 + \frac{p_0}{24} x^4 + C_1 x + C_2$$

بتحقيق المعادلات السابقة لشروط الاطراف الهندسية التالية :

$$w(x=0) = 0 ; w(x=l) = 0$$

يتم الحصول على معادلات لتعيين الثوابت :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_2$$

$$w(x=l) = 0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{p_0 l^4}{12} + \frac{p_0 l^4}{24} + C_1 l + C_2 \right)$$

وبحلها يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = \frac{p_0 l^3}{24} ; C_2 = 0$$

بتعويض هذه القيم في معادلة خط الانعطاف فانها تأخذ الشكل النهائي التالي :

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{p_0 l^4}{24 EI} \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) \\ &= \frac{p_0 l^4}{24 EI} \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

بسبب تناظر خط الانعطاف فان القيمة الاعظمية للانتقال الشاقولي (السهم) تقع في منتصف الجائز ، أي في النقطة $x=l/2$ وهي تبلغ :

$$w\left(x = \frac{l}{2}\right) = f = \frac{5 p_0 l^4}{384 EI}$$

لقد كان بالإمكان أيضاً تعيين مكان تشكل القيمة الأعظمية للانتقال الشاقولي باشتقاق معادلة خط الانعطاف وجعلها صفراً ثم تبديل هذه القيمة في معادلة خط الانعطاف لتعيين القيمة الأعظمية للانتقال الشاقولي (السهم) .

بواسطة :

$$\max M = M \left(x = \frac{l}{2} \right) = \frac{p_0 l^2}{8}$$

فان العلاقة الاخيرة تأخذ شكلا أسهل هو التالي :

$$f = \max w = w \left(x = \frac{l}{2} \right) = \frac{5 \max M \cdot l^2}{48 EI}$$

ب - تعيين خط الانعطاف باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .
تابع المحولة الموزعة :

$$p(x) = p_0 = \text{const.}$$

معادلة خط الانعطاف التفاضلية من المرتبة الرابعة وتبديل تابع المحولة الموزعة فيها :

$$EI w''''(x) = p(x) = p_0$$

بكمالة هذه العلاقة أربعة مرات متتالية ينتج :

$$EI w'''(x) = -Q(x) = p_0 x + D_1$$

$$EI w''(x) = -M(x) = \frac{p_0}{2} x^2 + D_1 x + D_2$$

$$EI w'(x) = \frac{p_0}{6} x^3 + D_1 \frac{x^2}{2} + D_2 x + D_3$$

$$EI w(x) = \frac{p_0}{24} x^4 + D_1 \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} + D_3 x + D_4$$

لتعيين الثوابت الاربعة تلزم اربعة معادلات تنتج عن شروط اطراف الجملة ، التي سيعبر عنها هكذا :
شروط الاطراف الهندسية :

$$w(x=0) = 0 : w(x=l) = 0$$

شروط الاطراف الستاتيكية :

$$M(x=0)=0 \quad ; \quad M(x=l)=0$$

بتحقيق المعادلات الاخيرة لشروط الاطراف ، يتم الحصول على المعادلات الآتية :

$$w(x=0)=0=\frac{1}{EI} D_4$$

$$w(x=l)=0=\frac{1}{EI} \left(\frac{P_0}{24} l^4 + D_1 \frac{l^3}{6} + D_2 \frac{l^2}{2} + D_3 l + D_4 \right)$$

$$M(x=0)=0=-D_2$$

$$M(x=l)=0=-\frac{P_0}{2} l^2 - D_1 l - D_2$$

بحل مجموعة المعادلات هذه يتم تعيين الثوابت :

$$D_1 = -\frac{P_0 l}{2} , \quad D_2 = 0 , \quad D_3 = \frac{P_0 l^3}{24} , \quad D_4 = 0$$

بتعديل هذه القيم في معادلة خط الانعطاف يتم الحصول على نفس العلاقة التي تم التوصل اليها اثناء استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية ، علاوة على ذلك تتعين علاقات قيم القطع $Q(x)$, $M(x)$.

مسألة 104 :

حمل جانز بسيط ممتد الطرف بحمولة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.11) .

المعطى : l , a , $EI = \text{const}$.

المطلوب :

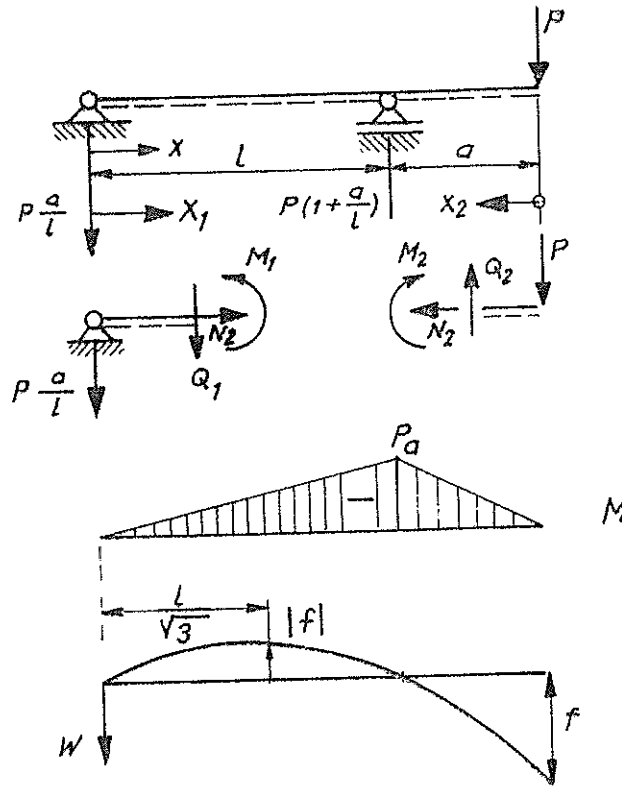
- ١ - تعيين خط الانعطاف (اعطاء المعادلة ورسم الدالة ، أي المنحني) .
- ٢ - حساب القيمة العظمى للانتقال (السهم) وتحديد مكان تشكلها .
- ٣ - حساب زاوية دوران المماس في النقطة .

الحل :

١ - تعيين خط الانعطاف

١ - ١ - حساب ردود أفعال المساند .

بتطبيق شروط التوازن على الجملة ككل يتم الحصول على ردود أفعال المساند :



شكل 9-11

$$\sum M_b = 0 \quad ; \quad C_v l - P(l + a) = 0$$

$$C_v = P \left(1 + \frac{a}{l} \right)$$

$$\sum V = 0 \quad : \quad C_v - B_v - P = 0$$

$$B_v = \frac{Pa}{l}$$

١ - ٢ - اختيار مكان مناسب للاحداثيات وتحديد المجالات .

يختار المسند الثابت الايسر مبدأ للاحداثي المستمر x ومبدأ للاحداثي الفرعي x_1 كما تختار النهاية الحرة مبدأ للاحداثي x_2 (شكل 9-11) . يتألف الجائز في هذا المثال من مجاليين فقط . المجال الاول $0 \leq x_1 \leq l$ والمجال الثاني $0 \leq x_2 \leq a$.

١ - ٣ - معادلات عزم الانعطاف .

المجال I $(0 \leq x_1 \leq l)$:

بتطبيق شروط توازن العزوم على الجزء المقطوع الایسر (شكل 9-11) يتج :

$$\Sigma M_{x_1} = 0 : M_1(x_1) = - \frac{Pa}{l} x_1$$

المجال II ($0 \leq x_2 \leq a$) :

بتطبيق شرط توازن العزوم على الجزء المقطوع الایمن (شكل 9-11) يتج :

$$\Sigma M_{x_2} = 0 : M_2(x_2) = - Px_2$$

١ - ٤ - المعادلات التفاضلية لخط الانعطاف وتكاملاتها .

بعد رسم خط عزم الانعطاف M (شكل 9-11) يرى انه لا يمثل بكامله تابعاً مستمراً وانما يحتوي على انكسار فوق المسند c ولهذا السبب لا يمكن مكاملة المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف على كامل الجائز وانما ينبغي في هذه الحالة كما في عزم الانعطاف تقسيم الجائز الى مجالين لكل مجال معادلة خط انعطاف خاصة به .

مجال I ($0 \leq x_1 \leq l$) :

$$EI w''_1 = - M_1 = + \frac{Pa}{l} x_1$$

$$EI w'_1 = EI \varphi_1 = + \frac{Pa}{l} \frac{x_1^2}{2} + C_1$$

$$EI w_1 = + \frac{Pa}{l} \frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C_2$$

مجال II ($0 \leq x_2 \leq a$) :

$$EI w''_2 = - M_2 = + Px_2$$

$$EI w'_2 = EI \varphi_2 = + P \frac{x_2^2}{2} + C_3$$

$$EI w_2 = + P \frac{x_2^3}{6} + C_3 x_2 + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربعة يلزم اربعة شروط اطراف .

١ - ٥ - شروط الاطراف وشروط التحول (من مجال لمجال) وتعيين الثوابت :
في هذا المثال يكتفى بشروط الاطراف الهندسية .

$$w_1(x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

$$w_1(x_1 = l) = 0 \quad ; \quad \frac{Pa}{l} \frac{l^3}{6} + C_1 l + C_2 = 0$$

$$w'_2(x_2 = a) = -w'_1(x_1 = l) : \frac{Pa^2}{2} + C_3 = -\frac{Pa}{l} \frac{l^2}{2} - C_1$$

$$w_2(x_2 = a) = 0 \quad ; \quad \frac{Pa^3}{6} + C_3 a + C_4 = 0$$

١ - ٦ - حل مجموعة المعادلات الخطية وتعيين ثوابت التكامل :

$$C_2 = 0 \quad ; \quad C_1 = -\frac{Pa l}{6}$$

$$C_3 = -\frac{1}{3} Pa l - \frac{1}{2} Pa^2 \quad , \quad C_4 = \frac{1}{3} Pa^2 l + \frac{1}{3} Pa^3$$

١ - ٧ - تبديل ثوابت التكامل في معادلات خط الانعطاف :

$$El w_1 = \frac{1}{6} \frac{Pa}{l} x_1^3 - \frac{1}{6} Pa l x_1$$

$$El w_2 = \frac{1}{6} Pa x_2^3 - Pa \left(\frac{1}{3} l + \frac{1}{2} a \right) x_2 + \frac{1}{3} Pa^2 (l + a)$$

٢ - حساب القيمة العظمى للانتقال الشاقولي (السهم) وتحديد مكان تشكيلها .

المجال I :

بجعل مشتق الانتقال يساوي صفراً يتم تحديد مكان تشكل الانتقال الاعظمي :

$$El w'_1 = \frac{1}{2} \frac{Pa}{l} x_1^2 - \frac{1}{6} Pa l = 0 \quad ; \quad x_1^2 = \frac{1}{3} l^2 \quad ; \quad x_1 = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}$$

يؤخذ من الحلين ، الحل الموجب فقط ، أي :

$$x_1 = + \frac{l}{\sqrt{3}}$$

وبالتبديل في معادلة خط الانعطاف ، يتم الحصول على الانتقال الشاقولي الاعظمي (السهم) :

$$E I w_1 \left(x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = E I f_1 = - \frac{1}{9 \sqrt{3}} \frac{P a l^2}{E I} = - \frac{\sqrt{3} P a l^2}{27 E I}$$

المجال II :

$$w_2 (x_2 = 0) = f_2 = \frac{1}{3 E I} P a^2 (l+a)$$

٣ - زاوية دوران المماس في النقطة b .

بتبديل $x_1=0$ في معادلة مشتق خط الانعطاف للمجال الاول يتم الحصول على زاوية دوران المماس في النقطة b :

$$w'_1 = \varphi_1 = - \frac{P a l}{6 E I}$$

ملاحظة :

في حالة اختيار المسند الثابت الايسر مبدأ للاحداثي x وعدم اختيار احداثيات فرعية x_1 , x_2 فان العلاقات السابقة تصبح بالشكل التالي :

$$M(x) = \begin{cases} - \frac{P l}{a} x & ; 0 \leq x \leq l \\ - P (l + a - x) & ; l \leq x \leq l + a \end{cases}$$

المجال I $(0 \leq x \leq l)$:

$$E I w''_1 (x) = \frac{P a}{l} x$$

$$E I w'_1 (x) = \frac{P a}{l} \left(\frac{x^2}{2} + D_1 \right)$$

$$E I w_1 (x) = \frac{P a}{l} \left(\frac{x^3}{6} + D_1 x + D_2 \right)$$

المجال II $(l \leq x \leq l+a)$:

$$EI w''_2(x) = + P(l+a-x)$$

$$EI w'_2(x) = + P[(l+a)x - \frac{x^2}{2} + D_3]$$

$$EI w_2(x) = + P[(l+a) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + D_3 x + D_4]$$

شروط الاطراف وشروط التحول (شروط الاستمرار) :

$$w_1(x=0) = 0 \quad : D_2 = 0$$

$$w_1(x=l) = 0 \quad : \frac{Pa}{l} \left(\frac{l^3}{6} + D_1 l + D_2 \right) = 0$$

$$w_2(x=l) = 0 \quad : P \left[(l+a) \frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} + D_3 l + D_4 \right] = 0$$

$$w'_1(x=l) = w'_2(x=l) : \frac{Pa}{l} \left(\frac{l^2}{2} + D_1 \right) = P \left[(l+a) l - \frac{l^2}{2} + D_3 \right]$$

بحل مجموعة المعادلات ينتج :

$$D_1 = -\frac{l^2}{6} \quad , \quad D_2 = 0 \quad , \quad D_3 = -\frac{2}{3} a l - \frac{l^2}{2}$$

$$D_4 = \frac{l^2}{6} (a+l)$$

معادلات خط الانعطاف :

$$w_1(x) = \frac{P a l^2}{6 E I} \left(\frac{x}{l} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) \right)$$

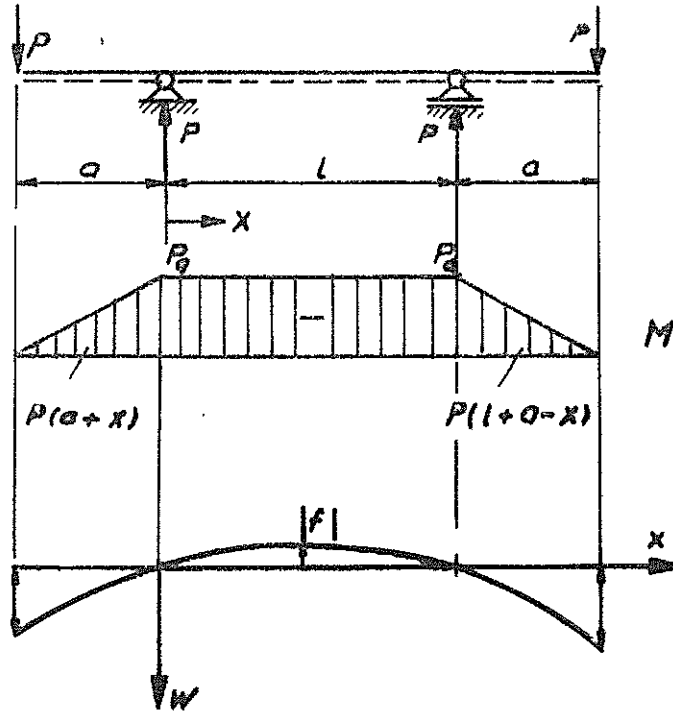
$$w_2(x) = \frac{P}{E I} \left[(l+a) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \left(\frac{2}{3} a l + \frac{l^2}{2} \right) x + \frac{l^2}{6} (a+l) \right]$$

مثال 105 :

حمل جانز بسيط ممتد الاطراف بمحاملتين وحيدتين (شكل 9-12) .

المعطى : $El = \text{const.}$, l , a , P .

المطلوب : حساب ورسم معادلة الانعطاف للمجال الموجود بين المسندين (المجال الوسطي من الجائز) .



شكل 9-12

الحل :

معادلات عزوم الانعطاف :

$$M(x) = \begin{cases} M_1(x) = -P(a+x) & ; -a \leq x \leq 0 \\ M_2(x) = -Pa & ; 0 \leq x \leq l \\ M_3(x) = -P(l+a-x) & ; l \leq x \leq l+a \end{cases}$$

المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف في المجال الوسطي وتكاملاتها :

$$\begin{aligned} EI w''(x) &= +Pa & &= +M_0 \\ EI w'(x) &= +Pax + C_1 & &= +M_0 x + C_1 \\ EI w(x) &= +\frac{Pa}{2}x^2 + C_1 x + C_2 & &= +\frac{M_0}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

لتعيين الثوابت C_1 , C_2 تلزم معادلتين . شروط الاطراف الهندسية للمجال الوسطي :

$$w(x=0) = 0 ; w(x=l) = 0$$

بتحقيق المعادلات السابقة لشروط الاطراف يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = - \frac{Pa l}{2} = - \frac{M_0 l}{2} ; C_2 = 0$$

معادلة خط الانعطاف للمجال الوسطي :

بتبديل قيم ثوابت التكامل في معادلة خط الانعطاف ينتج :

$$w(x) = - \frac{Pa l^2}{2EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = - \frac{M_0 l^2}{2EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

اما الانتقال الشاقولي الاعظمي الذي يتشكل في منتصف الجائز ، لتناظره فيبانع :

$$w\left(x = \frac{l}{2}\right) = f = - \frac{Pa l^2}{8EI} + \frac{M_0 l^2}{8EI}$$

وأما ميل المماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد فيأخذ القيمة التالية :

$$\varphi(x=0) = - \varphi(x=l) = - \frac{Pa l}{2EI} = - \frac{M_0 l}{2EI} \quad (2-20a)$$

مثال 106 :

حمل جائز بسيط بحمولة وحيدة P (شكل 9-13) .

المعطى : $EI = \text{const}$, l , a , P .

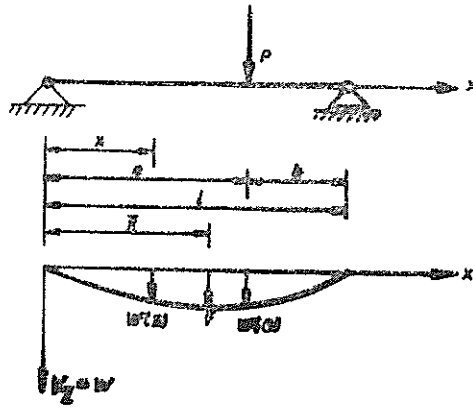
المطلوب : تعيين معادلة خط الانعطاف مع الرسم .

الحل :

ردود أفعال المساند :

بتطبيق شروط التوازن يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$\Sigma M_a = 0 : B_v = \frac{1}{l} Pa = \frac{1}{l} P (l-b)$$



شكل 9-13

$$\Sigma V = 0 : A_v = \frac{1}{l} P b = \frac{1}{l} P (l-a)$$

عزوم الانعطاف :

يتألف الجائز في هذه الحالة من مجالين . باجراء قطع في كل مجال وتطبيق شرط توازن العزوم على أحد الجزئين المقطعين ينتج :

$$M(x) = \begin{cases} M_1(x) = \frac{Pb}{l} x & ; 0 \leq x \leq a \\ M_2(x) = \frac{Pa}{l}(l-x) & ; a \leq x \leq l \end{cases}$$

يفقد تابع العزم ، عند نقطة تطبيق القوة P ، استمراره مما يلزم تقسيم خط الانعطاف أثناء التكامل الى مجالين .

مجال I : $(0 \leq x \leq a)$

مجال II : $(a \leq x \leq l)$

$$EI w''_1(x) = - \frac{Pb}{l} x;$$

$$EI w''_2(x) = - \frac{Pa}{l}(l-x)$$

$$EI w'_1(x) = - \frac{Pb}{l} \frac{x^2}{2} + C_1; \quad EI w'_2(x) = + \frac{Pa}{l} \frac{(l-x)^2}{2} + C_2$$

$$EI w_1(x) = - \frac{Pb}{l} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_3; \quad EI w_2(x) = - \frac{Pa}{l} \frac{(l-x)^3}{6} - C_2(l-x) + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الأربع تلزم أربعة معادلات يتم الحصول عليها بتحقيق هذه المعادلات لشروط الاطراف وشروط التحول (شروط الاستمرار) التالية :

شروط الاطراف الهندسية :

$$w_1 (x=0) = 0$$

$$w_2 (x=l) = 0$$

شروط التحول (شروط الاستمرار) :

$$w_1 (x=a) = w_2 (x=a)$$

$$w'_1 (x=a) = w'_2 (x=a)$$

بتحقيق المعادلات التفاضلية لشروط الاطراف يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$w_1 (x=0) = 0 = \frac{C_2}{EI} \quad , \quad w_2 (x=l) = 0 = \frac{C_4}{EI}$$

$$w_1 (x=a) - w_2 (x=a) = 0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Pba^3}{6l} + C_1 a + C_2 + \frac{Pab^3}{6l} + C_3 b - C_4 \right)$$

$$w'_1 (x=a) - w'_2 (x=a) = 0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Pba^2}{2l} + C_1 - \frac{Pab^2}{2l} - C_3 \right)$$

بحل هذه المعادلات يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = \frac{Pab}{6l} (2b+a) \quad ; \quad C_2 = 0 \quad ; \quad C_3 = -\frac{Pab}{6l} (2a+b) \quad ; \quad C_4 = 0$$

بتبديل هذه القيم في معادلات خط الانعطاف يتم الحصول على المعادلات المطلوبة :

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) = \frac{Pbl^2}{6EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad ; \quad 0 \leq x \leq a \\ w_2(x) = \frac{Pa l^2}{6EI} \frac{(l-x)}{l} \left[1 - \frac{a^2}{l^2} - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right] \quad ; \quad 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (9.20)$$

يبلغ الانتقال الشاقولي عند نقطة تطبيق القوة الوحيدة :

$$w(x=a) = \frac{Pa^2 b^2}{3EI l}$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي (السهم) في حالة كون $a > b$ في الـ 11. كان :

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{a(l+b)}$$

وهو يبلغ :

$$w(x = \bar{x}) = f = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EI} [a(l+b)]^{3/2}$$

وفي حالة كون $b > a$ يتشكل في الـ 12. كان :

$$\bar{x} = l - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{b(l+a)}$$

وهو يبلغ :

$$w(x = \bar{x}) = f = \frac{Pa}{9\sqrt{3}EI} [b(l+a)]^{3/2}$$

في حالة كون $a=b=l/2$ فان الانتقال الشاقولي الاعظمي يتشكل في منتصف الجائز (في نقطة تطبيق القوة الوحيدة) وهو يبلغ :

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

مثال 107 :

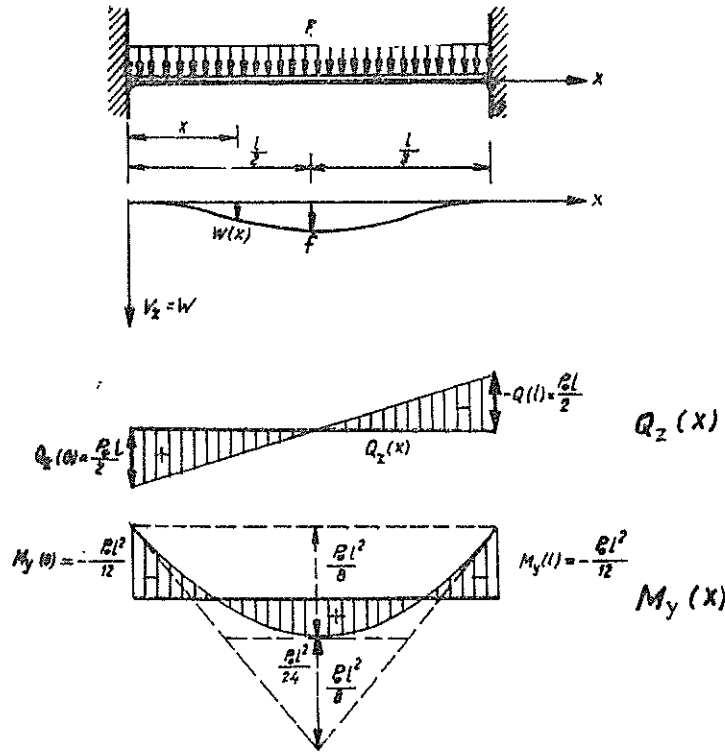
حمل جائز موثوق من كلا طرفيه ، بحمولة خطية موزعة بانتظام (حمولة خطية ثابتة) (شكل 9-14) .

المعطى : l , p_0 , $EI = \text{const}$.

المطلوب : حساب ورسم خط الانعطاف وخطوط قيم القمع .

الحل :

باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف وباجراء عدة مكاملات متكررة عليها ينتج :



شكل 9-14

$$E I w''''(x) = p_0$$

$$E I w'''(x) = -Q(x) = p_0 x + C_1$$

$$E I w''(x) = -M(x) = \frac{p_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$E I w'(x) = \frac{p_0}{6} x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$E I w(x) = \frac{p_0}{24} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل الاربعة تلزم اربع معادلات .

شروط الاطراف الهندسية :

$$w(x=0) = 0 ; w'(x=0) = 0 ; w(x=l) = 0 ; w'(x=l) = 0$$

في هذا المثال تكفي شروط الاطراف الهندسية لتعيين ثوابت التكامل . بتحقيق المعادلة التفاضلية

السابقة وتكملاتها لشروط الاطراف يتم الحصول على ثوابت التكامل :

$$C_1 = -\frac{p_0 l}{2} ; C_2 = \frac{p_0 l^2}{12} ; C_3 = 0 ; C_4 = 0$$

بتبديلها في معادلة خط الانعطاف ينتج :

$$w(x) = \frac{p_0 l^4}{24 EI} \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

يبلغ الانتقال الشاقولي ، في منتصف الجائز قيمته الاعظمية التي تساوي :

$$w\left(x = \frac{l}{2}\right) = f = \frac{p_0 l^4}{384 EI}$$

تعطى القوة العرضية من خلال المعادلة التالية :

$$Q(x) = \frac{p_0 l}{2} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

وكذلك يعطى عزم الانعطاف بواسطة العلاقة الآتية :

$$M(x) = -\frac{p_0 l}{12} + \frac{p_0 l^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

بتبديل $x=0$ و $x=l$ في معادلتين M, Q يتم الحصول على القوى العرضية وعزوم الانعطاف التي تساوي ردود أفعال المساند .

قوى ردود أفعال المساند :

$$Q(x=0) = \frac{p_0 l}{2} , \quad -Q(x=l) = \frac{p_0 l}{2}$$

عزوم الوثاقعة :

$$M(x=0) = -\frac{p_0 l^2}{12} , \quad M(x=l) = -\frac{p_0 l^2}{12}$$

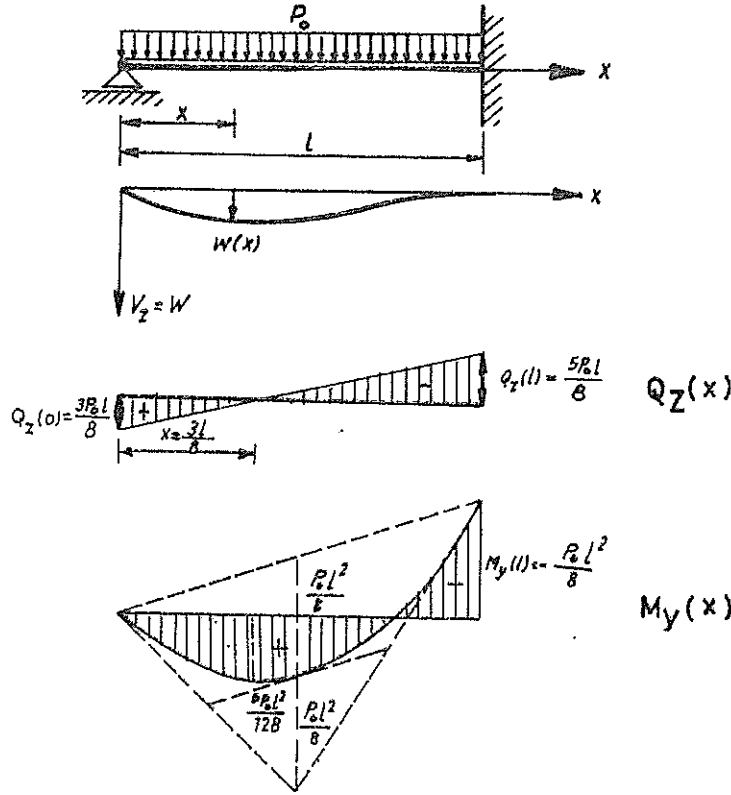
لقد تم في الشكل (9-14) تمثيل خط الانعطاف وخطوط قيم القطع ، مما يؤكد إمكانية إيجاد قيم القطع في الجائز غير المقرر ستاتيكيًا بواسطة العلاقات التفاضلية ودون استخدام شروط التوازن.

مثال 108 :

حمل جانز موثوق من طرف ومفصلي متحرك من الطرف الآخر ، بحموله خطية موزعة بانتظام (شكل 9-15) .

المعطى : l , p_0 , $EI = \text{const}$.

المطلوب : حساب ورسم خط الانعطاف وخطوط قيم القطع .



شكل 9-15

الحل :

لتمين خط الانعطاف وكذلك خطوط قيم القطع سوف يسلك طريق استخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط الانعطاف .

$$EI w''''(x) = p_0$$

$$EI w''''(x) = -Q(x) = p_0 x + C_1$$

$$EI w''(x) = -M(x) = \frac{p_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EI w'(x) = \frac{p_0}{6} x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w(x) = \frac{p_0}{24} x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

لتعيين ثوابت التكامل نلزم أربع معادلات يتم الحصول عليها بتحقيق المعادلات السابقة لشروط الاطراف التالية :

شروط الاطراف الهندسية :

$$w(x=0) = 0 ; w(x=l) = 0 ; w'(x=l) = 0$$

شروط الاطراف الستاتيكية :

$$M(x=0) = 0$$

بتحقيق المعادلة التفاضلية وتكاملاتها لشروط الاطراف يتم الحصول على المعادلات التالية :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_4$$

$$M'(x=0) = 0 = -C_2$$

$$w(x=l) = 0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{p_0 l^4}{24} + \frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} + C_3 l + C_4 \right)$$

$$w'(x=l) = 0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{p_0 l^3}{6} + \frac{C_1 l^2}{2} + C_2 l + C_3 \right)$$

التي يعطي حلها ثوابت التكامل :

$$C_1 = -\frac{3 p_0 l}{8} , C_2 = 0 , C_3 = \frac{p_0 l^3}{48} , C_4 = 0$$

بتبديل هذه القيم في العلاقات التفاضلية يتم التوصل الى معادلة خط الانعطاف المطلوبة :

$$w(x) = \frac{p_0 l^4}{48 EI} \frac{x}{l} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right)$$

بما أن معادلة القوة العرضية تمثل بالعلاقة التالية :

$$Q(x) = \frac{p_0 l}{8} \left(3 - 8 \frac{x}{l} \right)$$

فان ردود أفعال المساند تبلغ :

$$Q(x=0) = \frac{3 p_0 l}{8} , \quad -Q(x=l) = \frac{5 p_0 l}{8}$$

تنعدم القوة العرضية في المكان $\bar{x} = \frac{3}{8} l$ أما عزم الانعطاف :

$$M(x) = \frac{p_0 l^2}{8} \frac{x}{l} \left(3 - 4 \frac{x}{l} \right)$$

فيأخذ في ذلك المكان قيمة الأعظمية الموجبة :

$$M\left(x = \frac{3}{8} l\right) = \frac{9 p_0 l^2}{128}$$

مثال 109 :

عاني جائزان متساويان في الطول وغير محملان أحدهما ذو استناد مفصلي بسيط وثانيهما موثوق من كلا الطرفين ، هبوطاً مسندياً شاقولياً في نقطة الاستناد $x=l$ مقدارها Δ (شكل 9,16).

المعطى : l , Δ , $EI = \text{const}$

المطلوب : حساب ورسم خط الانطفاف وخطوط القوة العرضية وعزم الانعطاف لكل من الجائزين :

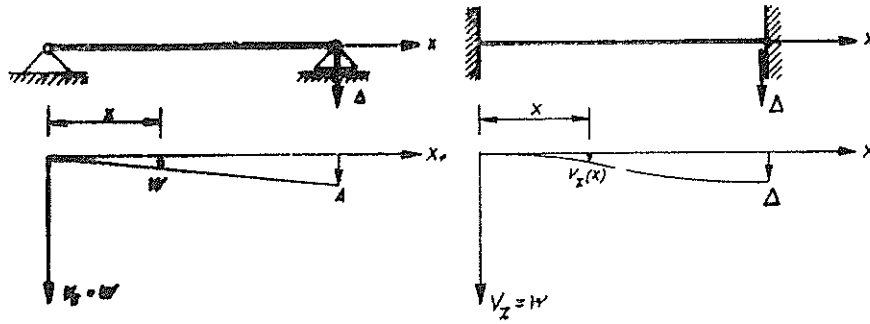
الحل :

بتحقيق العلاقات التفاضلية التي تصاح لكلا الجائزين (لعدم وجود حمولة عليها) :

$$EI w''''(x) = 0$$

$$EI w'''(x) = -Q(x) = C_1$$

$$EI w''(x) = -M(x) = C_1 x + C_2$$



شكل 9.16

$$EI w'(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

في المرة الاولى لشروط الاطراف الهندسية والستاتيكية للجائز البسيط :

$$w(x=0) = 0 \quad ; \quad w(x=l) = \Delta$$

$$M(x=0) = 0 \quad ; \quad M(x=l) = 0$$

وفي المرة الثانية لشروط الاطراف الهندسية للجائز الموثوق من كلا طرفيه :

$$w(x=0) = 0 \quad ; \quad w(x=l) = \Delta$$

$$w'(x=0) = 0 \quad ; \quad w'(x=l) = 0$$

يتم التوصل للمعادلات التابعة للجائز البسيط التالية :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_4 \quad ; \quad w(x=l) = \Delta = \frac{1}{EI} \left(\frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} + C_3 l + C_4 \right)$$

$$M(x=0) = 0 = -C_2 \quad ; \quad w(x=l) = 0 = -C_1 l - C_2$$

كما يتم التوصل للمعادلات التابعة للجائز الموثوق من كلا طرفيه :

$$w(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_4 \quad ; \quad w(x=l) = \Delta = \frac{1}{EI} \left(\frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} + C_3 l + C_4 \right)$$

$$w'(x=0) = 0 = \frac{1}{EI} C_3 \quad ; \quad w'(x=l) = 0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{C_1 l^2}{2} + C_2 l + C_3 \right)$$

بحل مجموعتي المعادلات يتم الحصول على ثوابت التكامل من أجل الجانز البسيط : —

$$C_1 = C_2 = 0 \quad , \quad C_3 = \frac{EI\Delta}{l} \quad ; \quad C_4 = 0$$

ومن أجل الجانز الموثوق من كلا الطرفين :

$$C_1 = - \frac{12 EI \Delta}{l^3} \quad ; \quad C_2 = \frac{6 EI \Delta}{l^2} \quad ; \quad C_3 = C_4 = 0$$

بتمويض قيم الثوابت في المعادلة التفاضلية وتكاملاتها يتم الحصول على المعادلات المطلوبة ، من أجل الجانز البسيط :

$$w(x) = \frac{\Delta}{l} x$$

$$Q(x) = 0$$

$$M(x) = 0$$

ومن أجل الجانز الموثوق من كلا الطرفين :

$$w(x) = \Delta \frac{x^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

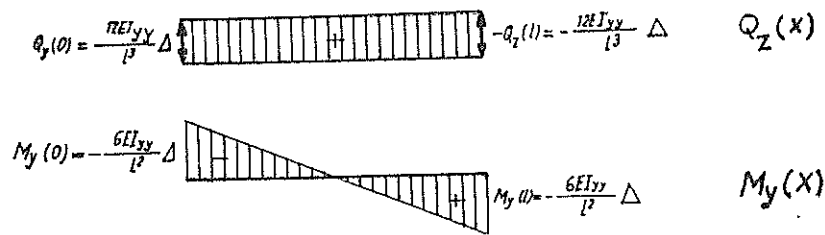
$$Q(x) = \frac{12 EI}{l^3} \Delta$$

$$M(x) = - \frac{6 EI}{l^2} \Delta \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

تشير هذه العلاقات إلى أن هبوط المساند لا يؤدي في الجيزان المقررة ستاتيكيًا (ومن بينها الجانز البسيط) إلا لدوران في محور القضيبي دون أن تتشكل فيه نتيجة لذلك قوى داخلية ، كما تشير أيضا إلى أن هبوط المساند يؤدي في الجيزان غير المقررة ستاتيكيًا (ومن بينها الجانز الموثوق من كلا طرفيه) إلى تغيرات مرنة مصحوبة بقوى داخلية (هنا قوى عرضية $Q(x)$ وعزوم إنعطاف $M(x)$) . يشير الشكل (9.17) إلى توزيع قيم القطع والتي تأخذ على العموم ، بسبب تناسبها مع صلابة الانعطاف ، قيما كبيرة .

مثال 110 :

حمل جانز موثوق من طرف ومفصلي متحرك أفقيًا من الطرف الآخر بحمولة خطية وقوة وحيدة (شكل 9.18) .



شكل 9.17

المعطى : الأبعاد a, l , $El = \text{const.}$ والحملات q_1, q_2, p .
الطالوب : حساب ردود أفعال المساند وخط الانعطاف .

أ - باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

ب - باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .

الحل :

أ - باستخدام المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية .

تختار مجموعة الاحداثيات الممثلة في الشكل (9.18) وبذلك تصلح من أجل كلا المجالين ،
المعادلة التالية :

$$w'' = - \frac{M}{EI}$$

إن الجائز المدروس هو جائز غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة الاولى (مرة واحدة غير مقرر ستاتيكيًا) .

تواجه $M(x)$, $W''(x)$:

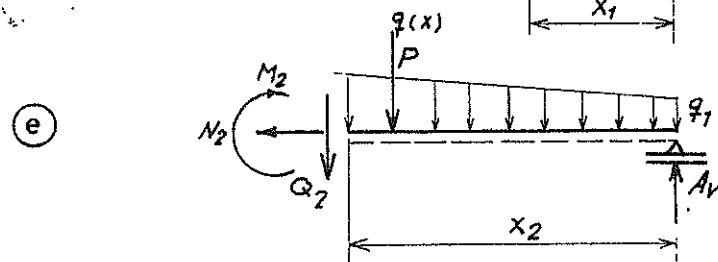
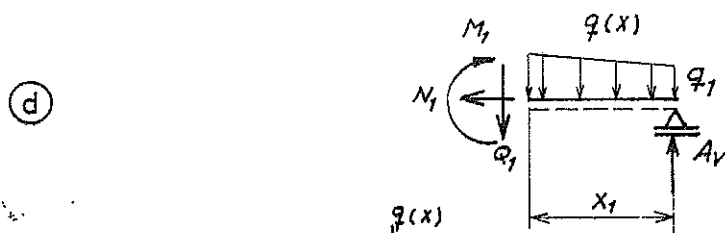
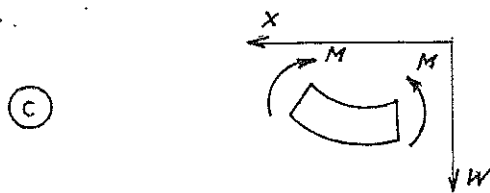
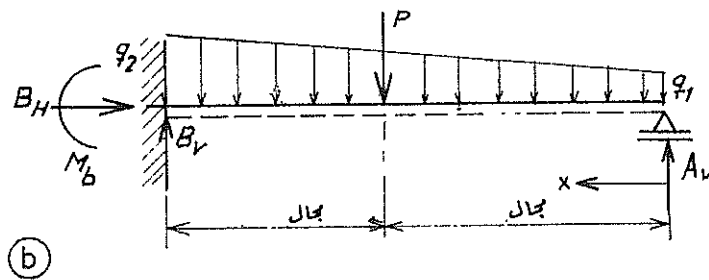
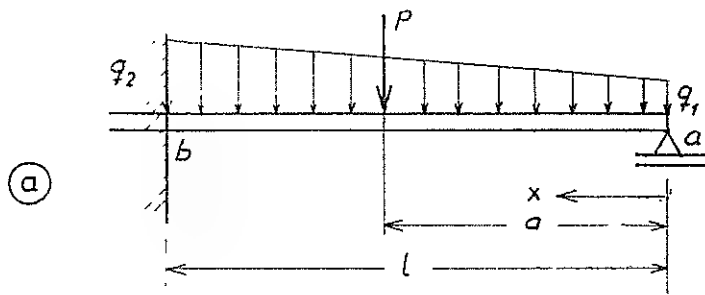
$$q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l} x$$

$$M_1(x) = +A_v x_1 - \int_0^{x_1} q(x) (x_1 - x) dx = A_v x_1 - \left[\frac{q_1}{2} x_1^2 + \frac{(q_2 - q_1)}{6l} x_1^3 \right] = -El w_1''$$

$$M_2(x) = +A_v \cdot x_2 - \left[\frac{q_1}{2} x_2^2 + \frac{(q_2 - q_1)}{6l} x_2^3 \right] - P(x_2 - a) = -El w_2''$$

التكاملات :

$$El w_1' = - \frac{A_v}{2} x_1^2 + \left[\frac{q_1}{6} x_1^3 + \frac{(q_2 - q_1)}{24l} x_1^4 \right] + C_1$$



شكل 9.18

٩٣٠

$$El w_2' = -\frac{A_v}{2} x_2^2 + \left[\frac{q_1}{6} x_2^3 + \frac{(q_2 - q_1)}{24l} x_2^4 \right] + \frac{1}{2} P (x_2 - a)^2 + C_3$$

$$El w_1 = -\frac{A_v}{6} x_1^3 + \left[\frac{q_1}{24} x_1^4 + \frac{(q_2 - q_1)}{120l} x_1^5 \right] + C_1 x_1 + C_2$$

$$El w_2 = -\frac{A_v}{6} x_2^3 + \left[\frac{q_1}{24} x_2^4 + \frac{(q_2 - q_1)}{120l} x_2^5 \right] + \frac{1}{6} P (x_2 - a)^3 + C_3 x_2 + C_4$$

ملاحظة من أجل التكامل : يفضل في حالة الاحداثيات المستمرة المستعملة هنا (كافة الاحداثيات x تبدأ من نقطة واحدة ولها نفس الاتجاه) محاولة زلق متغيرات التكامل بشكل مناسب ولبعض الحدود (هنا يتم التكامل لحدود P بالنسبة لـ d(x₂-a) عوضاً عن dx₂) وذلك للتوصل إلى امكانية تسهيل شكل الثوابت عند امكانية التحول بشكل واضح .

شروط الأطراف وشروط التحول (من مجال لمجال آخر) وحل المعادلات :

$$w_1(x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

$$w_1'(x_1 = a) = w_2'(x_2 = a) \quad ; \quad C_1 = C_3$$

$$w_1(x_1 = a) = w_2(x_2 = a) \quad ; \quad C_2 = C_4$$

$$w_2'(x_2 = l) = 0 \quad ; \quad -A_v \frac{l^2}{2} + q_1 \frac{3}{24} l^3 + q_2 \frac{1}{24} l^3 + P \frac{1}{2} (l-a)^2 + C_3 = 0$$

$$w_2(x_2 = l) = 0 \quad ; \quad -A_v \frac{l^3}{6} + q_1 \frac{4}{120} l^4 + q_2 \frac{1}{120} l^4 + P \frac{1}{6} (l-a)^3 + C_3 l + C_4 = 0$$

$$C_1 = C_3 = +q_1 l^3 \frac{3}{240} + q_2 l^3 \frac{2}{240} + P l^2 \left(1 - \frac{a}{4l}\right)^2 \frac{a}{l}$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$A_v = +q_1 l \frac{11}{40} + q_2 l \frac{4}{40} + P \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{a}{2l}\right)$$

يتم تعيين ردود أفعال المساند في النقطة b بتطبيق شروط التوازن على الجسم لكل :

$$B_H = 0$$

$$B_v = + (q_1 + q_2) \frac{l}{2} + P - A_v = +q_1 l \frac{9}{40} + q_2 l \frac{16}{40} + P \left[1 - \left(1 + \frac{a}{2l}\right) \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \right]$$

$$M_b = -M_2(x_2=l) = +q_1 l^2 \frac{2}{6} + q_2 l^2 \frac{1}{6} + Pl \left(1 - \frac{a}{l}\right) - A_v l$$

$$M_b = +q_1 l^2 \frac{7}{120} + q_2 l^2 \frac{8}{120} + A_v l \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{a}{2l}\right) \left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

خط الانعطاف (الخط المرن) :

$$w_1 = + \frac{q_1 l^4}{240EI} \left[3\left(\frac{x_1}{l}\right) - 11\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + 10\left(\frac{x_1}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x_1}{l}\right)^5 \right] +$$

$$+ \frac{q_2 l^4}{240EI} \left[2\left(\frac{x_1}{l}\right) - 4\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x_1}{l}\right)^5 \right]$$

$$+ \frac{Pl^3}{12EI} \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left[3\frac{a}{l}\left(\frac{x_1}{l}\right) - 2\left(1 + \frac{a}{2l}\right)\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 \right],$$

(من أجل $0 \leq x_1 \leq a$)

$$w_2 = + \frac{q_1 l^4}{240EI} \left[3\left(\frac{x_2}{l}\right) - 11\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 + 10\left(\frac{x_2}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x_2}{l}\right)^5 \right] +$$

$$+ \frac{q_2 l^4}{240EI} \left[2\left(\frac{x_2}{l}\right) - 4\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x_2}{l}\right)^5 \right] +$$

$$+ \frac{Pl^3}{12EI} \left[\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left[3\frac{a}{l}\left(\frac{x_2}{l}\right) - 2\left(1 + \frac{2}{2l}\right)\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 \right] + 2\left(\frac{x_2}{l} - \frac{a}{l}\right)^3 \right]$$

(من أجل $0 \leq x_2 \leq l$)

ب - باستخدام المعادلة التفاضلية من الرتبة الرابعة .

نختار مجموعة ابتدائيات جديدة هي (x, \bar{w}) حسب الشكل (9.18c) .
العلاقة التي تربط بين w و \bar{w} :

$$\bar{w} = -w$$

الحالة الخطية الموزعة :

$$q(x) = -q_2 - (q_l - q_1) \frac{x}{l}$$

(تصالح هذه المعادلة من أجل x_2, x_1) .

العلاقات التفاضلية وتكاملاتها :

المجال 1 ($0 \leq x_1 \leq a$) :

$$(EI \bar{w}_1'')'' = -q_1 - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} x_1 = +q(x)$$

$$(EI \bar{w}_1'')' = -q_1 x_1 - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_1^2}{2} + D_1 = +Q(x)$$

$$EI \bar{w}_1'' = -q_1 \frac{x_1}{2} - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_1^3}{6} + D_1 x_1 + D_2 = +M(x)$$

$$EI \bar{w}_1' = -q_1 \frac{x_1^3}{6} - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_1^4}{24} + D_1 \frac{x_1^2}{2} + D_2 x_1 + D_3$$

$$EI \bar{w}_1 = -q_1 \frac{x_1^4}{24} - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_1^5}{120} + D_1 \frac{x_1^3}{6} \frac{x_1^2}{2} + D_3 x_1 + D_4$$

المجال $l \parallel (a \leq x_2 \leq l)$:

$$(EI \bar{w}_2'')'' = -q_1 - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} x_2 = +q_2$$

$$(EI \bar{w}_2'')' = -q_1 x_2 - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_2^2}{2} + D_5 = +Q_2$$

$$EI \bar{w}_2'' = -q_1 \frac{x_2^2}{2} - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_2^3}{6} + D_5 (x_2 - a) + D_6 = +M_2$$

$$EI \bar{w}_2' = -q_1 \frac{x_2^3}{6} - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_2^4}{24} + D_5 \frac{1}{2} (x_2 - a)^2 + D_6 (x_2 - a) + D_7$$

$$EI \bar{w}_2 = -q_1 \frac{x_2^4}{24} - (q_2 - q_1) \frac{1}{l} \frac{x_2^5}{120} + D_5 \frac{1}{6} (x_2 - a)^3 + D_6 \frac{1}{2} (x_2 - a)^2 + D_7 (x_2 - a) + D_8$$

(من اجل تكاملات D_5 و D_6 ينبغي العودة ثانية للملاحظة المنوه عنها في الطلب آ - من هذه المسألة) .

شروط الاطراف وشروط التحول وحل المعادلات :

$$M_1 (x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad D_2 = 0$$

$$\bar{w}_1 (x_1 = 0) = 0 \quad ; \quad D_4 = 0$$

$$Q_1 (x_1 = a) = Q_2 (x_2 = a) + P \quad ; \quad D_1 = D_5 + P$$

$$M_1(x_1=a) = M_2(x_2=a) \quad ; \quad D_1 a + D_2 = D_6$$

$$\bar{w}_1'(x_1=a) = \bar{w}_2'(x_2=a) \quad ; \quad D_1 \frac{a^2}{2} + D_2 a + D_3 = D_7$$

$$\bar{w}_1(x_1=a) = \bar{w}_2(x_2=a) \quad ; \quad D_1 \frac{a^3}{6} + D_2 \frac{a^2}{2} + D_3 a + D_4 = D_8$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2'(x_2=l) = 0 \quad & ; -q_1 l^3 \frac{3}{24} - q_2 l^3 \frac{1}{24} + D_5 \frac{1}{2} (l-a)^2 + \\ & D_6 (l-a) + D_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2(x_2=l) = 0 \quad & ; \quad q_1 l^4 \frac{4}{120} - q_2 l^4 \frac{1}{120} + D_5 \frac{1}{6} (l-a)^3 + \\ & + D_6 \frac{1}{2} (l-a)^2 + D_7 (l-a) + D_8 = 0 \end{aligned}$$

$$D_1 = + q_1 l \frac{11}{40} + q_2 l \frac{4}{40} + P \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{a}{2l}\right) \quad ; \quad D_2 = 0$$

$$D_3 = - q_1 l^3 \frac{3}{240} - q_2 l^3 \frac{2}{240} - P l^2 \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \frac{a}{4l} \quad ; \quad D_4 = 0$$

$$D_5 = D_1 - P \quad ; \quad D_6 = D_1 a$$

$$D_7 = D_1 \frac{a^2}{2} + D_3 \quad ; \quad D_8 = D_1 \frac{a^3}{6} + D_3 a$$

بهذه الثوابت يتم الحصول مرة ثانية على نفس نتيجة الطالب آ - ، لكن بإشارة معاكسة :

$$\bar{w}_1 = - w_1 \quad ; \quad \bar{w}_2 = - w_2$$

بواسطة الاشتقاق يمكن الحصول على ردود أفعال المساند كما يمكن الحصول عليها أيضاً ، وهو الأهم ، بتبديل الثوابت في العلاقات الموجودة :

$$A_v = + Q(x_1=0) = + (EI w_1'')'(x_1=0) = D_1$$

$$B_v = - Q(x_2=l) = + (q_1 + q_2) \frac{1}{2} + P - D_1$$

$$M_b = - M_2(x_2=l) = + q_1 l^2 \frac{2}{6} + q_2 l^2 \frac{1}{6} + P l \left(1 - \frac{a}{l}\right) - D_1 l$$

تتطابق هذه النتيجة أيضاً مع النتيجة التي تم الحصول عليها في آ - .

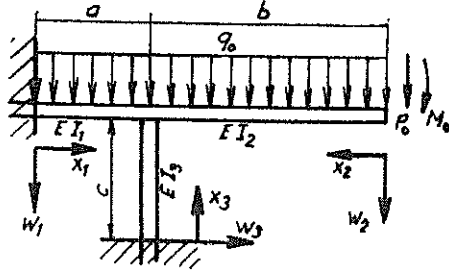
مثال 111 :

حمل الجائز المتفرع بحموله خطية موزعة بانتظام وبقوة وعزم وحيدين شكل (9.19) .

المعطى : الأبعاد a, b, c , والصلاطات $EI_1 = EI_2$, EI_3 , والحملات q_0, M_0, P_0 .

المطلوب :

كتابة شروط الاطراف التابعة للقيم w, w' في مجموعة الاحداثيات المعطاة .



شكل 9.19

الحل :

$$\begin{aligned} w_1(x_1=0) &= 0 & ; & \quad w_1'(x_1=0) = 0 \\ w_1(x_1=a) &= 0 & ; & \quad w_1'(x_1=a) = +w_3'(x_3=c) \\ w_2(x_2=b) &= 0 & ; & \quad w_2'(x_2=b) = -w_3'(x_3=c) \\ w_3'(x_3=0) &= 0 & ; & \quad w_3(x_3=0) = 0 \\ w_3(x_3=c) &= 0 \end{aligned}$$

تكفي هذه المعادلات لتحديد التسعة المجاهيل التالية :

٢ ثوابت تكامل لكل مجال v مجاهيل .

(نقطة الانطلاق : معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية من أجل $w(x)$) .

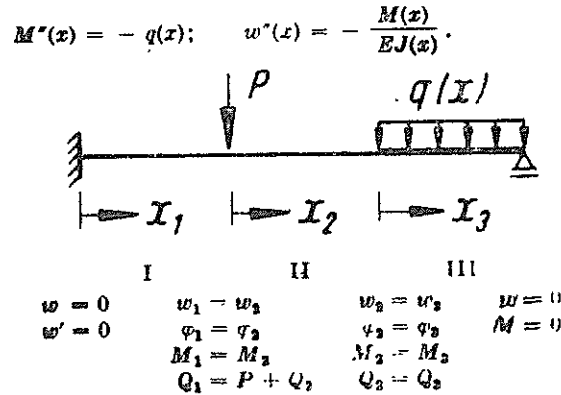
٣ ردود افعال غير مقررة مستاتيكية $= 3$ مجاهيل .

مثال 112 :

حمل جانز موقوف من طرف ومفصلي متحرك أفقياً من الطرف الآخر بحمولة وحيدة P وبحمولة موزعة q تؤثر على رقعة منه (شكل 9.20) .

المطلوب : كتابة شروط الاطراف اللازمة لمعالجة خط الانعطاف بواسطة المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة .

الحل :



شكل 9.20

مثال 113 :

يلزم تغطية الفراغ الموجود بين جدارين يبعدان عن بعضها البعض مسافة $l_0 = 5,00 \text{ m}$ (شكل 9.21) ، بعوارض خشبية مقطوعها العرضي مستطيل الشكل ، وتبعد الواحدة عن الأخرى مسافة $e = 0,80 \text{ m}$. ينبغي تصميم سقف التغطية المذكور من أجل (لتحمل) حمولة موزعة على المسقط الأفقي (Grundriß) توزيعاً منتظماً تبلغ شدتها $q_1 = 300 \text{ kp/m}^2$ (تتألف هذه الحمولة من حمولة استفادة مضافا إليها الوزن الذاتي) .

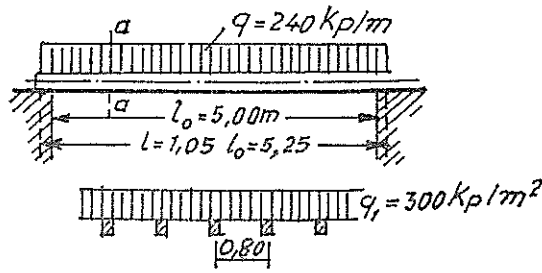
المعطى :

$$E = 100\,000 \text{ kp/cm}^2, \text{ zul } \sigma_b = 115 \text{ kp/cm}^2; q_1 = 300 \text{ kp/m}^2; e = 0,80; l_0 = 5,00 \text{ m}$$

المطلوب : تعيين ابعاد المقطع العرضي للعوارض الخشبية شريطة :

١ - ان لا يتعدى الاجهاد الموجود (الفعلي) σ قيمة اجهاد الانعطاف المسموح لخشب الزان $\text{zul } \sigma_b$.

٢ - ان لا يتعدى الانتقال الاعظمي f قيمة الانتقال المسموح $\text{zul } f = l/300$.



a-a

شكل 9.21

الحل :

في حالة وضع الجيزان على الجدران مباشرة وبسبب عدم تحقيق تلك السطوح لشروط الاستناد بشكل جيد فإن طول الاستناد l ينبغي ان يزيد على فتحة الجائز l_0 بمقدار 5 % (هذا ما تمليه النظم والمواصفات الألمانية) . ففي الحالة المبحوثة في هذا المثال يبلغ إذاً طول الاستناد القيمة التالية :

$$l = 1,05 l_0 = 1,05 \cdot 5,00 = 5,25 \text{ m}$$

تنقل كل من العوارض الداخلية اليها حمولة موزعة بانتظام على شكل شريحة طولها l وعرضها $e = 0,80 \text{ m}$. بذلك تبلغ الحمولة التي تؤثر على متر واحد من طول الجائز القيمة التالية :

$$q = q_0 \cdot l \cdot e = 300 \cdot 1 \cdot 0,80 = 240 \text{ kp/m}$$

بالاستفادة من هذه القيمة فإن عزم الانعطاف الاعظمي الذي يتشكل في العارضة (التي تعتبر جائزاً بسيطاً) يبلغ القيمة التالية :

$$\max M = \frac{ql^2}{8} = \frac{240 \cdot 5,25^2}{8} = 827 \text{ kp m} = 82700 \text{ kp cm}$$

يلعب الانتقال الشاقولي الاعظمي في الجيزان الطويلة الدور الاول في تصميم المقطع العرضي ، حيث تتخطى فيها الانتقالات الشاقولية الاعظمية الموجودة (الفعلية) قيمة الانتقال المسموح قبل ان تبلغ الاجهادات الموجودة (الفعلية) قيمة الاجهاد المسموح ، كما في هذا المثال .

لكن الاجهاد الاعظمي الموجود في الجيزان القصيرة هو الذي يلعب الدور الاول في تصميم المقطع العرضي حيث تتخطى فيه الاجهادات الاعظمية الموجودة (الفعلية) قيمة الاجهاد المسموح وذلك قبل ان تبلغ الانتقالات الشاقولية الموجودة قيمة الانتقال المسموح .

بما ان هذا الجائز يعتبر بالنسبة للخشب طويلا لذلك سوف يتم في البداية تحقيق المطلب الثاني ومن اجل ذلك ينبغي ان تتحقق العلاقة التالية :

$$f \leq \text{zul } f = \frac{l}{300} = \frac{525}{300} = 1,75 \text{ cm}$$

لقد تم في المثال (103) حساب الانتقال الاعظمي للجائز بسيط محمل بحمولة موزعة بانتظام والمبالغ:

$$f = \frac{5 \max M \cdot l^2}{48 E I} \leq 1,75 \text{ cm}$$

من هذه العلاقة يتم تعيين عزم عطالة المقطع العرضي اللازم :

$$\text{erf } I = \frac{5 \max M \cdot l^2}{1,75 \cdot 48 \cdot E} = \frac{5 \cdot 8,27 \cdot 10^4 \cdot 5,25^2 \cdot 10^4}{1,75 \cdot 48 \cdot 10^5} = 13600 \text{ cm}^4$$

باختيار المقطع العرضي 12/24 الذي يبلغ عزم عطالته :

$$I = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13800 \text{ cm}^4$$

يرى ان المطلب الثاني اصبح محققاً . يعاد الآن حساب الانتقال الشاقولي الأعظمي الموجود بعد ان تم اختيار المقطع العرضي الذي يبلغ عزم عطالته $I = 13800 \text{ cm}^4$ ، ويتم ذلك اعتماداً على النسبة والتناسب وذلك لان الانتقالات الشاقولية تتناسب عكساً مع عزوم العطالة . من اجل $I = 13600 \text{ cm}^4$ فان الانتقال الشاقولي يبلغ $\text{zul } f = 1,75 \text{ cm}$ والآن يفتش عن الانتقال الشاقولي الأعظمي الذي يتبع عزم العطالة $\text{vorh } I = 13800 \text{ cm}^4$ وهو يبلغ :

$$\text{vorh } f = \frac{\text{zul } I}{\text{vorh } I} \cdot \text{zul } f = \frac{13600}{13800} \cdot 1,75 = 1,73 \text{ cm} < \text{zul } f$$

والآن سوف يتم التأكد من تحقيق المقطع العرضي للمطلب الاول . بالاستعانة بالعزم المقاوم :

$$w_{yy} = \frac{I_{yy}}{h/2} = \frac{13800}{12} = 1150 \text{ cm}^2$$

يتم التوصل لمعرفة قيمة اجهاد الانعطاف الأعظمي الموجود :

$$\text{vorh } \sigma = \frac{\max M}{w_{yy}} = \frac{82700}{1150} = 72 \text{ kp/cm}^2 < \text{zul } \sigma_b$$

وهذا يؤكد ايضا ان المقطع العرضي 12/24 كاف لتحمل الجولات المذكورة .

٩ - ٤ التأثير الحراري (الفعل الحراري)

عرض قضيب موجود في بداية الأمر تحت تأثير درجة حرارة ثابتة t الى تأثير حراري غير منتظم ، حيث عرضت جهته السفلى الى درجة الحرارة t_u وجهته العليا الى درجة الحرارة t_o عندئذ يتشكل باتجاه المحور z (عرضياً على محور القضيب) توزيعاً حرارياً خطياً يعبر عنه ، بالاستعانة بالقيم التالية :

$$T_o = \frac{t_o + t_u}{2} , \quad \Delta t = t_u - t_o \quad (9-21)$$

بواسطة المعادلة الآتية (شكل 9.22) :

$$\bar{t}(z) = T_o + \frac{\Delta t}{h} z \quad (9-22)$$

وبذلك فان التغير الحراري ، الناتج عن الانتقال من حالة البداية t الى حالة النهاية $\bar{t}(z)$ لأي سطح $z=\text{const}$ يبلغ :

$$\bar{t}(z) - t = (T_o - t) + \frac{\Delta t}{h} z \quad (9-23)$$

عندما تكون $\Delta t = 0$ فان الحرارة في كل مكان من القضيب تكون ثابتة ، عندئذ تعاني محاور القضيب (الياض) استطالات او انكماشات (تقاصرات) مستقلة عن z وذلك حسبما تكون درجة الحرارة المؤثرة أكبر أو أصغر من الصفر . وعندما لا تتغير درجة الحرارة في المستوي $z=0$ ، اي ان $T_o = t$ عندئذ يصبح الفرق الحراري :

$$\bar{t}(z) - t = \frac{\Delta t}{h} z \quad (9-24)$$

كما أن الاستطالة تبلغ :

$$d\bar{x} - dx = \alpha_t [\bar{t}(z) - t] dx = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z dx \quad (9-25)$$

تعاني محاور القضيب (آليات القضيب) ، الواقعة في المستوي $z=\text{const}$ التي كان طولها dx ، تغيراً نسبياً طويلاً (تمدداً) مقداره :

$$\bar{\epsilon}_{zs}(z) = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z \quad (9-26)$$

من هذه العلاقة وبعد اخذ المعادلة (9.1) بعين الاعتبار يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \quad (9-27)$$

التي تربط بين انحناء القضيب $1/\bar{\rho}$ وبين الفرق الحراري Δt . تبقى التغيرات (المرنة) من اجل التغيرات الحرارية الصغيرة صغيرة ايضاً بحيث يمكن الكتابة :

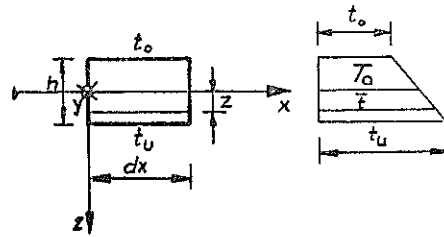
$$\frac{1}{\rho} = -w'' \quad (9-28)$$

وبذلك يتم التوصل لخط الانعطاف الناتج عن تأثير الفرق الحراري ، من خلال المعادلة التفاضلية التالية :

$$\bar{w}''(x) = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \quad (9-29)$$

عندما يكون عامل التمدد الحراري الخطي (عامل التغير النسبي الخطي الحراري) α_1 ثابتاً فان العلاقة السابقة تعطي ، بعد المكاملة المتكررة ، ما يلي :

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}'(x) &= -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} x + C_1 \\ \bar{w}(x) &= -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (9-30)$$



شكل 9.22

في الجيزان ذات الاستناد المقرر مستاتيكيًا يمكن بشكل معين إيجاد ثوابت التكامل التي تظهر في تلك المعادلة . سيتم ايضاح ما ذكر في خلال مثالين . اما خط الانعطاف الناتج عن عزم الانعطاف والتغيرات الحرارية دفعة واحدة فيتم الحصول عليه بجمع العلاقتين (9.11) و (9.29) هكذا :

$$w''(x) = -\frac{M}{EI} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \quad (9-31)$$

٢ - ٢ أمثلة

مثال 114 :

عرض جملز بارز (ظفر) لتغير حراري خطي غير منتظم (شكل 9.23) .

المعطى : h , Δt , α_1 , l .

المطلوب ، إيجاد خط الانعطاف .

الحل :

معادلة خط الانعطاف وتكاملاتها :

$$\bar{w}'' = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h}$$

$$\bar{w}' = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} x + C_1$$

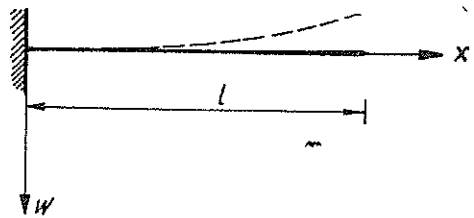
$$\bar{w} = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

شروط الاطراف الهندسية :

$$\bar{w}(x=0) = 0 \quad ; \quad \bar{w}'(x=0) = 0$$

بتحقيق العلاقات لشروط الاطراف يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$



شكل 9.23

خط الانعطاف :

بتبديل ثوابت التكامل يتم الحصول على خط الانعطاف :

$$\bar{w}(x) = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} \quad (9.32)$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي عند النهاية الحرة للقضيب وهو يبلغ :

$$\bar{w}(x=l) = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \quad (9.33)$$

مثال 115 :

عرض جائز بسيط لتأثير تغيير حراري خطي غير منتظم (شكل 9-24) .

المعطى : $h, \Delta t, \alpha_1, l$.

المطلوب : حساب خط الانعطاف .

الحل :

المعادلة التفاضلية لخط الانعطاف وتكاملاتها :

$$\bar{w}''(x) = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h}$$

$$\bar{w}'(x) = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} x + C_1$$

$$\bar{w}(x) = -\alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

شروط الأطراف الهندسية :

$$\bar{w}(x=0) = 0 \quad , \quad \bar{w}(x=l) = 0$$

بتحقيق العلاقات السابقة لشروط الأطراف يتم تعيين ثوابت التكامل :

$$C_1 = \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \quad , \quad C_2 = 0$$

بتبديل ثوابت التكامل يتم الحصول على علاقة خط الانعطاف :

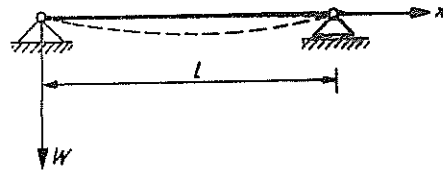
$$\bar{w}(x) = \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي في منتصف الجائز وهو يالغ :

$$\bar{w} \left(x = \frac{l}{2} \right) = \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{8}$$

أما ميل الماس عند كل من نقطتي الاستناد فيساوي :

$$\bar{w}'(x=0) = -\bar{w}'(x=l) = \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \quad (9-34)$$



شكل 9 24

يلاحظ من هذين المثالين بأن تعرض الجيزان ذات الاستناد المقرر ستاتيكياً الى تأثير تغيير حراري يؤدي الى تشكل خط انعطاف ولكنها تبقى بالرغم من ذلك خالية من الاجهادات . نتيجة اعاقاة التغيرات الناتجة عن التأثير الحراري تتشكل في الجيزان ذات الاستناد غير المقرر ستاتيكياً اجهادات حرارية . سيشار لطريقة تعيينها من خلال المثالين التاليين .

مثال 116 :

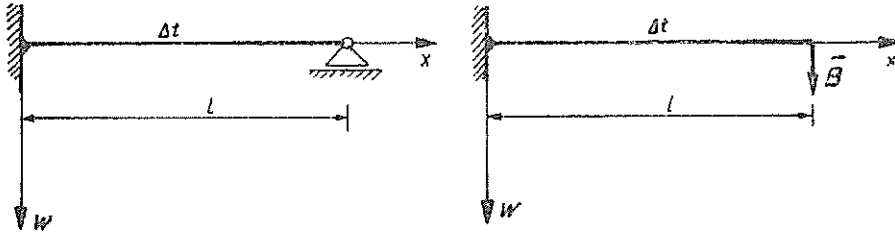
عرض جائز موثوق من طرف ومنفصلي متحرك أفقياً من الطرف الآخر ومقطعه العرضي ثابت ، الى تأثير تغيير حراري غير منتظم على طوله . ان الفرق الحراري بين الجهة السفلى والجهة العليا هو Δt (شكل 9-25a) .

المعطى : $h, \Delta t, \alpha_1, l$.

المطلوب : حساب الاجهادات المتشكلة عن التأثير الحراري غير المنتظم (الاجهادات الحرارية) .

الحل :

لحساب الاجهادات الحرارية المتشكلة ، يحذف المسند الأيمن المتحرك أفقياً ويستعاض عنه برد فعله الشاقولي \bar{B} (شكل 9 25b) ، عندئذ يبلغ الانتقال الشاقولي لنهاية القضيب التي



شكل 9-25

أصبحت الآن حرة (نهاية جأز بارز) نتيجة للتأثير الحراري Δt حسب العلاقة (9-33) كما يلي :

$$- \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2}$$

كما أن هذه النهاية (نقطة النهاية الحرة) سوف تقوم أيضاً بانتقال شاقولي نتيجة لتأثير قوة رد الفعل \bar{B} لوحدها على الجأز البارز وهو يساوي حسب العلاقة (C من المآل 100) القيمة التالية :

$$\bar{B} \frac{l^3}{3 E I_{yy}}$$

لعدم سماح المسند المتحرك أفقياً لنهاية القضيب (الفعلي) المتصلة فيه من القيام بالحركة الشاقولية يتم التوصل لشرط الهندسي التالي :

$$- \alpha_1 \frac{\Delta t}{h} \frac{l^2}{2} + \bar{B} \frac{l^3}{3 E I_{yy}} = 0$$

من هذه العلاقة يتم تعيين رد الفعل \bar{B} :

$$\bar{B} = \frac{3}{2} \frac{E I_{yy}}{l} \alpha_1 \frac{\Delta t}{h}$$

بتطبيق شرط توازن العزوم على الجزء الأيمن المقطع من الجأز يتم الحصول على العلاقة الآتية :

$$\bar{M}_y(x) + \bar{B} (l-x) = 0$$

منها يتم التوصل لعزم الانعطاف (ممثلاً على شكل تابع) :

$$\bar{M}_y(x) = -\frac{3}{2} \frac{E I_{yy}}{l} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} (l-x)$$

وبذلك تبلغ الاجهادات الحرارية القيمة التالية :

$$\bar{\sigma}_{xx}(x, z) = \frac{\bar{M}_y(x)}{I_{yy}} z = -\frac{3}{2} \frac{E \alpha_t}{l} \frac{\Delta t}{h} (l-x) z$$

من هذه العلاقة يستخلص الى ان جهة القضيب ذات درجة الحرارة المنخفضة تتشكل فيها اجهادات شد . بجمع خط الانعطاف الناتج عن القوة \bar{B} :

$$\frac{\bar{B} l^3}{6 E I_{yy}} \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{x}{l}\right)$$

والانتقال الشاقولي الناتج عن التأثير الحراري Δt :

$$-\alpha_t \frac{\Delta t}{2} \frac{x^2}{h}$$

يتم التوصل الى خط انعطاف الجائر النهائي ممثلا بالعلاقة التالية :

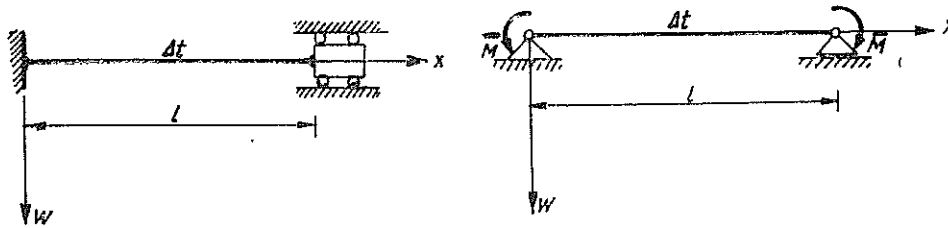
$$w(x) = \frac{l^2}{4} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

مثال 117 :

عرض جائز موثوق من كلا طرفيه ومقطعه العرضي ثابت الى تأثير تغيير حراري خطي غير منتظم بحيث يكون Δt هو الفرق الحراري بين الجهة السفلى والجهة العليا (شكل 9.26a) .

المعطى : h , Δt , α_t , l .

المطلوب : ايجاد خط الانعطاف وتعيين الاجهادات الحرارية .



شكل 9.26

الحل :

حل هذه المسألة غير المقررة ستاتيكيًا يستعاض عن الوثائق بمفاصل ثم تؤثر في تلك المفاصل بعزوم الوثافة \bar{M} الفعلية (شكل b 9-26) . نتيجة للتأثير الحراري الخطي غير المنتظم لوحده تقوم المماسات لنهايات القضيب حسب العلاقة (9-36) بالدورانات :

$$\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \quad \text{وكذلك} \quad - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2}$$

بينما تقوم نفس المماسات نتيجة تأثير عزوم الوثافة \bar{M} لوحدها ، حسب العلاقة (a 9 20) بالدورانات .

$$- \frac{\bar{M} l}{2 E I_{yy}} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\bar{M} l}{2 E I_{yy}}$$

لعدم سماح المساند الموثوقة في الحائز الفعلي لنهايات القضبان بالدوران ينبغي إذاً أن يتحقق الشرط الهندسي :

$$\alpha_t \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} - \frac{\bar{M} l}{2 E I_{yy}} = 0$$

ومنه يتم التوصل لعزوم الوثافة :

$$\bar{M} = E I_{yy} \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

التي تؤدي في القضيب الى توزيع عزم انعطاف ثابت :

$$\bar{M}_y (x) = - \bar{M} = - E I_{yy} \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

وبذلك فان الاجهادات الحرارية تبلغ :

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = - E \alpha_t \frac{\Delta t}{h} z$$

ان هذه الاجهادات مستقلة عن x . تشكل في الجهة ذات الحرارة المنخفضة اجهادات شادة بجمع (بتضد) الانتقالات الشاقولية :

$$- \frac{\bar{M} l^2}{2 E I_{yy}} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta t}{h} \frac{l}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

وبذلك يتم التوصل لخط الانعطاف :

$$w(x) = 0$$

٩ - ٦ طريقة التحميل بمخططات العزوم (استخدام مطابقة مور لإيجاد خط الانعطاف حسابياً)

لقد استخرجت في علم مسكون الاجسام الحاملة علاقات تربط بين شدة الجوة الموزعة وبين القوة العرضية وعزم الانعطاف والتي سيتم فيما يلي اعادة كتابتها :

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) ; \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

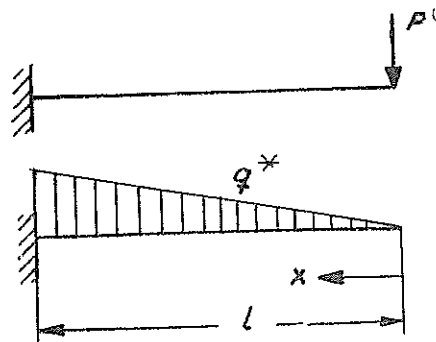
كما قد تم هناك أيضاً بحث طرائق إيجاد القوة العرضية وعزم الانعطاف انطلاقاً من الجوة ، حسابياً (تحليلياً) وتخطيطياً . بامعان النظر في العلاقتين التاليتين :

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (9-34)$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (9-35)$$

يتبين بوضوح التطابق الرياضي بينهما عندما توجد هناك طريقة سهلة يمكن بواسطتها انطلاقاً من الجوة q حساب القوة العرضية Q وعزم الانعطاف M ، فلا بد اذاً من وجود طريقة يمكن تطبيقها لحساب خط الانعطاف (الخط المرن) اعتماداً على M/EI المعلومة . تنص هذه الطريقة على انه يكفي الاستعاضة في المعادلة (9.34) عن الجوة q بحمولة وهمية $q^* = M/EI$ ثم اتباع نفس الطريق الذي تم اتباعه في علم السكون ، للتمكن هنا أيضاً من حساب قيم القطع الوهمية Q^* و M^* التي تتشكل في النقطة ذات الاحداثي x من الجائز (والتي نتج كما ذكر عن تطبيق الجوة الوهمية q^*) . ان العزم الوهمي M^* الذي يتم الحصول عليه ، هو حسب

العلاقة (9-35) نفس الانتقال الشاقولي في النقطة x من الجائز ، كما ان القوة العرضية الوهمية Q^* في النقطة x تساوي ميل المماس على خط الانعطاف في تلك النقطة . يسمى التطابق الموجود بين المعادلتين (9-34) و (9-35) بتطابق مور وعليه يرتكز بناء الطريقة الحسابية والطريقة التحليلية لتعيين خط الانعطاف . ستم في البداية معالجة الطريقة الحسابية فقط . يفضل استخدام هذه الطريقة عندما يكون الانتقال الشاقولي في أمكنة معينة من الجائز هو المطلوب ايجاده ، لكن عندما يكون خط الانعطاف بكامله هو المطلوب تعيينه يفضل اتباع الطريق التحليلي . لتسهيل تعلم طريقة مطابقة مور سوف يلجأ لبعض الأمثلة مع اعطاء بعض الاضافات والملاحظات التي تخص شروط الاطراف . لايجاد خط انعطاف الجائز الممثل في الشكل (9-27) سوف يلجأ مبدئياً لتحميل الجائز الفعلي بالحمولة الوهمية $q^* = M/EI$. حسب ما ذكر أنفاً ينبغي ان يكون العزم M^* في النقطة x الذي يشكل نتيجة لتطبيق هذه الحمولة ، مساوياً للانتقال الشاقولي w في تلك النقطة .



شكل 9.27

لانعدام العزم الوهمي M^* في النقطة $x=0$ من الجائز الممثل في الشكل (9.27) ، ينبغي ايضاً ان ينعدم الانتقال الشاقولي في تلك النقطة ، لكن هذا مناف للواقع وهو غير صحيح وبما أن للعزم الوهمي M^* في النقطة $x=l$ قيمة (أي لا يساوي الصفر) ينبغي اذاً وجود انتقال شاقولي هناك وهذا أيضاً مناف للواقع وغير صحيح . بسبب هذه التناقضات يستنتج أن تحميل الجائز الفعلي بالحمولة الوهمية q^* لا يؤدي لخط الانعطاف مما يتطلب إعادة النظر فيه والتفتيش عن الطريق الصحيح ما دام المبدأ صحيحاً . ان السبب في كل هذه التناقضات والاختلاف يعود الى ان شروط اطراف المعادلة (9.34) تختلف عن شروط اطراف المعادلة (9-35) ، لذلك ينبغي تطبيق الحمولة الوهمية q^* على جائز وهمي تتطابق شروط أطرافه مع شروط اطراف خط

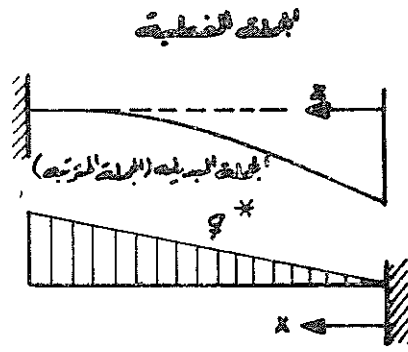
الانعطاف (ويسمى جائز الاستعاضة أو الجائز البديل). مثلاً ينبغي ان تتحقق في جائز الاستعاضة العائد للجائز الممثل في الشكل (9-27) شروط الاطراف التالية :

$$x = 0 : M^* \neq 0 \quad \text{أي} \quad w \neq 0$$

$$x = 0 : Q^* \neq 0 \quad \text{أي} \quad w' \neq 0$$

$$x = l : M^* = 0 \quad \text{أي} \quad w = 0$$

$$x = l : Q^* = 0 \quad \text{أي} \quad w' = 0$$



شكل 9-28

يرى بوضوح ان جائز الاستعاضة الممثل في الشكل (9-28) يحقق شروط الاطراف المذكورة . يشير الشكل (9-29) لبعض جيزان الاستعاضة .

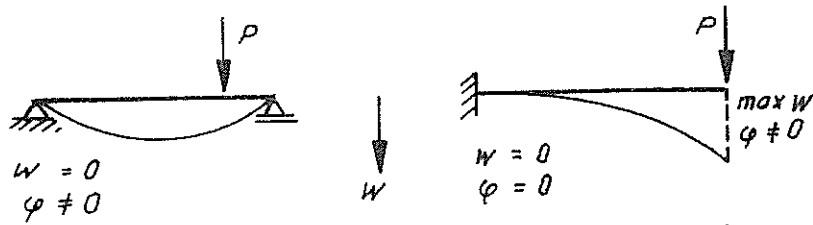
نتيجة :

ان خط انعطاف قضيب مستقيم يساوي خط عزم الانعطاف لجملة الاستعاضة (M^*) عندما تحمل بحمولة وهمية (q^*) تتألف من حاصل قسمة عزم انعطاف القضيب على صلابته على الانعطاف . ($q^* = M/EI$)

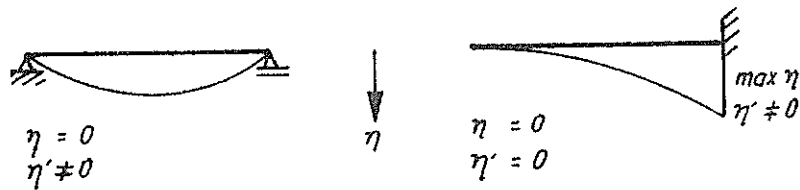
لتعيين جائز الاستعاضة يفضل اتباع الملاحظات التالية :

الحملة الفعلية	حملة الاستعاضة (الحملة البديلة)
الانتقال الشاقولي w	عزم الانعطاف M
ميل المماس على خط الانعطاف w'	القوة العرضية $Q = M'$
القيمة السالبة لتغيير المماس لكل واحد طول من القضيب	حمولة محور القضيب لكل واحد طول من محور القضيب
$-w'' = \frac{M}{EI}$	$-M'' = q$
قفزة في الانتقال الشاقولي	تأثير عزم وحيد

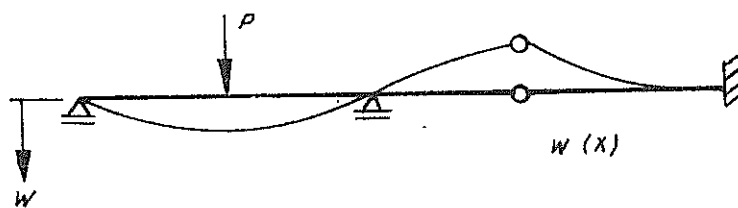
خط الانعطاف w للحملة الفعلية



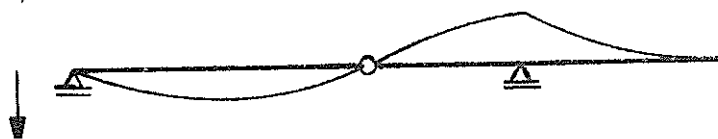
خط عزم الانعطاف η للحملة البديلة



الحملة الفعلية

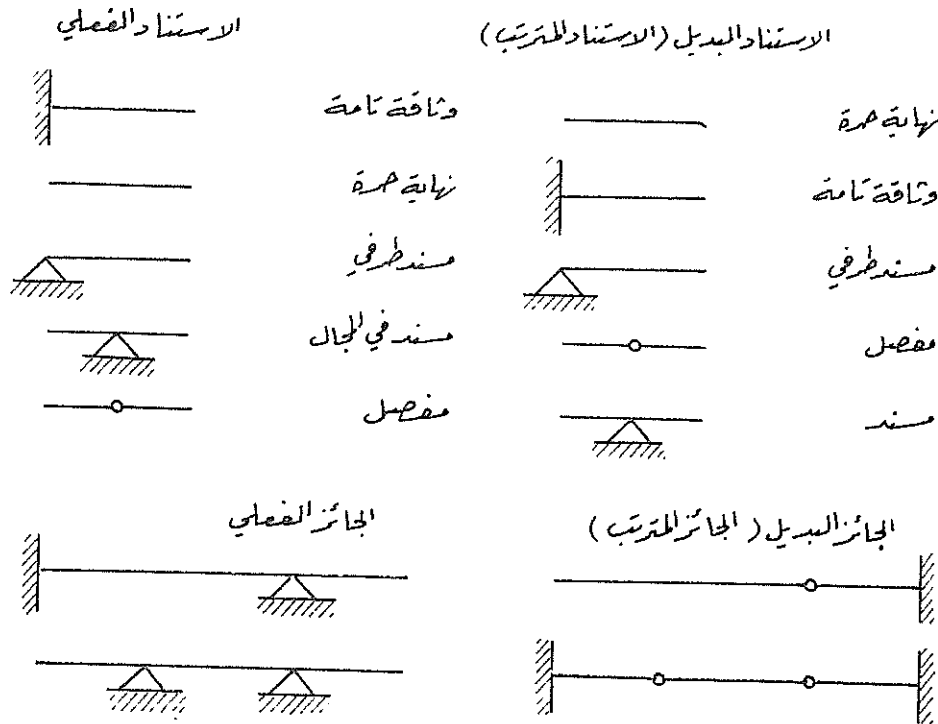


الحملة البديلة



شكل 9-29

يتم تعيين شروط الاطراف بشكل عام من خلال نوع مساند الجائز وبذلك يمكن القول بأن مسنداً معيناً من الجائز الفعلي يقابل مسنداً معيناً من جائز الاستعاضة . لقد تم في الشكل (9.30) تمثيل أهم مساند جائز الاستعاضة كما تم هناك أيضاً رسم بعض حمل الاستعاضة .



شكل 9.30

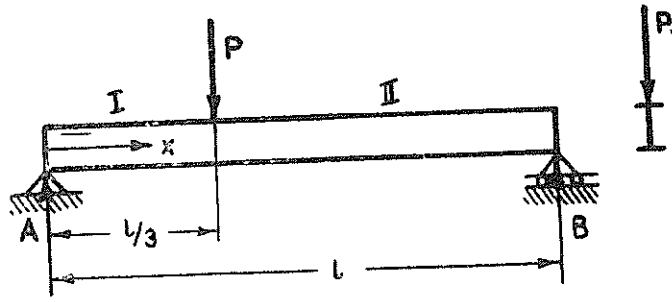
ينبغي دائماً الانتباه الى ان المحولة الوهمية q^* لا تطبق على الجملة الفعلية بل على جملة الاستعاضة . لتنظيم إشارة العزم تستخدم هنا أيضاً نفس الطريقة المتبعة في علم السكون . اذا تم الحصول على عزم انعطاف موجب عندئذ ينبغي أن تتجه q^* باتجاه الانتقال الشاقولي w الموجب وهذا يعني ، حسب الطريقة المتبعة في هذا الكتاب ، أنها تتجه الى الاسفل . لتفادي الوقوع في خطأ يفضل رسم إشارة (إتجاه) q^* على مخطط جائز الاستعاضة .

مثال 117 :

حمل جائز بسيط مسند في النقطتين a , b بحمولة وحيدة P (شكل 9.31a) .

المعطى : $EI = \text{const.}$, l , P .

المطلوب : حساب الانتقال الشاقولي عند نقطة تطبيق القوة الوحيدة باتباع طريقة التحميل بمخطط العزم (طريقة مطابقة مور) .



شكل 9.31a

الحل :

يحسب في البداية توزيع عزم الانعطاف في الجائز الفعلي :

$$A = \frac{2}{3} P \quad , \quad B = \frac{1}{3} P$$

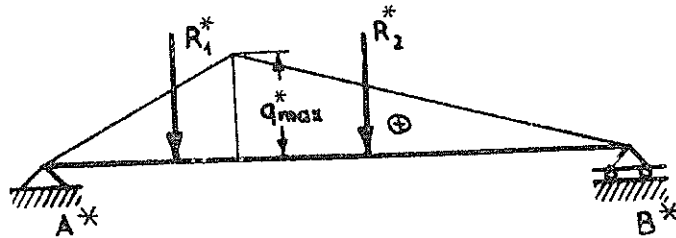
$$M_1 = \frac{2}{3} P x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{3}$$

$$M_2 = Ax - P \left(x - \frac{l}{3} \right) = \frac{Pl}{3} - \frac{Px}{3} \quad ; \quad \frac{l}{3} \leq x \leq l$$

بالطبع يتشكل عزم الانعطاف الاعظمي عند نقطة تطبيق القوة $x=l/3$ وهو يساوي :

$$\max M = \frac{2}{9} P l$$

يحمل جائز الاستعاضة (الجائز البديل) بسطح العزم وتعتبر عليه كحمولة جديدة (شكل b 9.31).



شكل 9.31 b

تبلغ القيمة العظمى لشدة الحمولة الوهمية :

$$\max q^* = \frac{\max M}{E I} = \frac{2 P l}{9 E I}$$

لحساب ردود أفعال المساند في جائز الاستعاضة ، تستبدل الحمولة الخطئية المثالية بالخصلات
: R_1^* , R_2^*

$$R_1^* = \frac{1}{3} \frac{\max q^*}{2} = \frac{P l^2}{27 E I}$$

$$R_2^* = \frac{2 l}{3} \frac{\max q^*}{2} = \frac{2 P l^2}{27 E I}$$

اما ردود افعال المساند فيتم الحصول عليها بتطبيق شروط التوازن :

$$\Sigma M_a = 0 : B^* l - R_2^* \frac{5 l}{9} - R_1^* \frac{2 l}{9} = 0$$

$$\Sigma V = 0 : A^* + B^* - R_1^* - R_2^* = 0$$

بحل هاتين المعادلتين ينتج :

$$B^* = \frac{4}{81} \frac{P l^2}{E I} = w_b$$

$$A^* = \frac{5}{81} \frac{P l^2}{E I} = w_a$$

هذه القيم تمثل في نفس الوقت ميل المماسات على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد . ان الانتقال الشاقولي في النقطة $x=l/3$ من الجائز الفعلي الحمل بالحمولة q يساوي عزم الانعطاف في النقطة المقابلة لتلك النقطة من جائز الاستعاضة الحمل بالحمولة q^* :

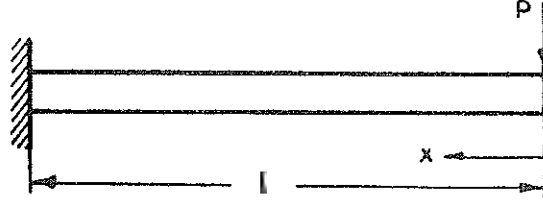
$$w \left(x = \frac{l}{3} \right) = M^* \left(x = \frac{l}{3} \right) = A^* \frac{l}{3} - R_1^* \frac{l}{9} = \frac{5}{213} \frac{P l^3}{E I} - \frac{1}{213} \frac{P l^3}{E I}$$

$$w \left(x = \frac{l}{3} \right) = \frac{4}{213} \frac{P l^3}{E I}$$

مثال 118 :

حمل جائز بارز (ظفر) بقوة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.32) .

المعطى : $EI = \text{const.}$, l , P .
المطلوب : إيجاد معادلة خط الانعطاف (الخط المرن) بالاستعانة بمطابقة مور .



شكل 9.32

الحل :

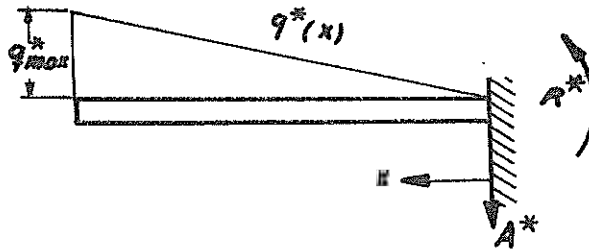
ان الانتقال الشاقولي في النقطة x ، حسب مطابقة مور ، يساوي عزم الانعطاف المتشكل في تلك النقطة من جائز الاستعاضة والنتائج عن تحميله بالحمولة الوهمية :

$$q^*(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

بالاستعانة بالعزم $M(x) = -Px$ يتم التوصل للحمولة الوهمية :

$$q^*(x) = -\frac{Px}{EI}$$

تطبق هذه الحمولة على جائز الاستعاضة العائد للجائز الفعلي (شكل 9.33) .



شكل 9.33

يتم اجراء بقية الحساب تماماً كما في المسائل الستاتيكية المدروسة في علم السكون . لتعيين تابع خط انعطاف الجائز الفعلي ، ينبغي حساب توزيع عزم الانعطاف الناتج عن الحمولة الوهمية q^*

لجائز الاستعاضة الممثل في الشكل (9 33) . أما الناتج عن ذلك الحساب فهو الانتقال الشاقولي .
تبلغ ردود أفعال المساند في جائز الاستعاضة :

$$A^* = \frac{1}{2} \max q^* l , \quad M_a^* = \max q^* \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l$$

بتبديل :

$$\max q^* = \frac{P l}{E I}$$

في العلاقات السابقة يتم الحصول على ردود أفعال المساند :

$$A^* = \frac{P l^2}{2 E I} , \quad M_a^* = \frac{P l^3}{3 E I}$$

بما أن M_a^* هو عزم الانعطاف عند النقطة $x=0$ من جائز الاستعاضة الناتج عن تحميله بالحمولة q^* فهو يمثل إذاً في نفس الوقت الانتقال الشاقولي في تلك النقطة . وبما أن A^* هي القوة العرضية عند النقطة $x=0$ الناتجة عن تحميل جائز الاستعاضة بالحمولة q^* فهي تمثل إذاً في نفس الوقت ، حسب مطابقة مور ، ميل المماس على خط الانعطاف عند النهاية الحرة للجائز الفعلي . يبلغ توزيع العزم (تابع العزم) الناتج عن تأثير q^* :

$$M^*(x) = M_a^* - A^* x + q^* \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = w(x) , \quad q^* = \frac{P x}{E I}$$

$$w(x) = \frac{P l^3}{3 E I} - \frac{P l^2}{2 E I} x + \frac{P x^3}{6 E I}$$

٩ - ١٠ اجراء مطابقة مور تخطيطياً

يفضل تعيين خط انعطاف الجيزان المعقدة بواسطة الطريقة التخطيطية . ان وجه الاختلاف الوحيد بين هذه الطريقة وبين الطريقة التحليلية المشتقة عن مطابقة مور هو أن عزوم الانعطاف هنا تعيين بواسطة مضع القوى والمضع الجبلي بينما تعيين هناك بواسطة الطرق التحليلية المعتادة (طريقة القطع أو طريقة العلاقات التفاضلية) . لقد أضحت الطريقة التخطيطية لايجاد خط الانعطاف التي منقوم بشرحها آنفاً بالنسبة لطريقة الماتريسات (التي يفضل استعمالها في حالة توفر حاسب الكتروني) طريقة قديمة ولكنها بالرغم من ذلك ما تزال تستعمل بكثرة . تقترض

هنا معرفة انشاء المضلع الحبيبي ومضلع القوى بشكل جيد . فاما يلي سوف يتم تمثيل خطوات الحل وبالإمكان تتبعها من خلال الامثلة (119 حتى 123) :

١ - يرسم الجائز المعطى بمقياس معين . يستعاض عن الحمولات الموزعة بحمولة أو عدة حمولات وحيدة . يختار مقياس للاطوال يرمز له بالرمز m_L (المقياس = الطول المرسوم / الطول الفعلي) على سبيل المثال فان المقياس $m_L = 1/10$ يعني أن 1 cm في الرسم يسكافيء 10 cm في الحقيقة .

٢ - يرسم مضلع القوى للحمولات المعطاة . ترسم هذه القوى بمقياس قـ.وى يرمز له بالرمز m_k على سبيل المثال $m_k = 1 \text{ cm}/100 \text{ kp}$.

٣ - يختار لمخطط القوى قطباً ، بعد ذلك ترسم الاشعة القطبية . يرمز لبعـد القطب عن القوى بالرمز H_1 . ترقيم الاشعة القطبية ابتداء من الصفر وإلى الاعلى .

٤ - يرسم المضلع الحبيبي ، هذا يعني أن الاشعة القطبية تنقل الى مخطط المكان .

ملاحظة : كل شعاع قطبي يصل ، في مخطط المكان ، بين حاميي قوين مع بعض فانه يمر ، في مضلع القوى ، من نقطة تقاطعها .

أخيراً يرسم خط الاغلاق . اثناء القيام بذلك ينبغي الانتباه إلى وجوب كون عزم الانعطاف في نهايات الجائز (عندما لا تؤثر هناك عزوم وحيدة) وفي المفاصل مساوياً للصفر ، أي أن ترتيب المضلع الحبيبي الواقعة تحتها (والتي تكافئها) مساوية للصفر ، كما ينبغي الانتباه إلى أن خط الاغلاق بين المساند يتم دائماً بشكل خطي . إن السطح المحصور بين خط الاغلاق وبين الاشعة القطبية هو سطح العزم . لتعيين إشارة العزم تختار نقطة ما من الجائز يسهل معرفة إشارتها بالايضاح ، ثم ترسم هذه الاشارة على المخطط .

٥ - يحمل جائز الاستعاضة بـسطح العزم الذي تم الحصول عليه ويعتبر كحمولة وهمية q^* . يعين الآن توزيع العزم في جائز الاستعاضة الناتج عن تحميله بالحمولة الوهمية q^* وهو يساوي حسب مطابقة مور الانتقال الشاقولي w للجائز الفعلي . سوف يدخل العامل EI فيما بعد بين الاعتبار .

٦ - يقسم سطح الحمولة الوهمية الى سطوح جزئية ثم تعين مساحتها . يختار مقياس للسطوح m_F . تؤخذ مساحة كل سطح جزئي وتعتبر كقوة وحيدة تؤثر على جائز الاستعاضة ، في مركز ثقل ذلك السطح الجزئي (على سبيل المثال مساحة السطح الاول F_1 تطبق كقوة وحيدة

في مركز ثقل السطح الجزئي الاول والخ) . إذا كان العزم موجباً (حمولة جائز الاستعاضة الوهمية) ينبغي ان تكون القوى الوحيدة المكافئة لها موجبة ايضاً وهذا يعني أن ترسم أشعة القوى بالاتجاه الموجب للانتقال w .

٧ - يرسم مضلع قوى ، للقوى الوهمية الوحيدة ، تماماً كما تم في الخطوة ٢ - ويختار له قطباً بعده هو $H_2(H^*)$ ثم ترسم الاشعة القطبية وترقم .

٨ - يرسم المضلع الجلي وخط الاغلاق تماماً كما تم في الخطوة ٤ - .

٩ - ان ترتيب المضلع الجلي الذي تم الحصول عليه في الخطوة السابقة هي الانتقالات الشاقولية للجائز (دون النظر لمقاييس الرسم) .

يظهر الخط المرن في الرسم كمضلع منكسر وذلك بسبب الاستعاضة عن المحولات الوهمية الموزعة بمحولات وحيدة . يزداد التطابق بين المضلع الذي يتم الحصول عليه وبين خط الانعطاف كلما ازداد عدد السطوح الجزئية الناتجة عن تقسيم سطح التحميل الوهمي .

يتحقق الانتقال الشاقولي بدقة على حدود السطوح الجزئية (الحدود الواقعة بين السطوح الجزئية) وذلك لتساوي العزم الناتج عن الحمولة الموزعة والعزم الناتج عن المحولات الوحيدة هناك . كما تتحقق هناك ايضاً ميول المماسات على خط الانعطاف . يرمز للانتقال الشاقولي المقروء من الرسم بالرمز s_w وبذلك يتم الحصول على الانتقال الشاقولي الفعلي بتقسيم تلك القيمة على مقياس الرسم m_w :

$$\left. \begin{aligned} m_w &= \frac{m_L^3 m_k m_M E I}{H_1 H_2} = (m_M^*) \\ w &= \frac{s_w}{m_w} \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

يتم الحصول على الميل الحقيقي للماس على خط الانعطاف بتقسيم القوة العرضية المقروءة من الرسم والتي سيرمز لها بالرمز s'_w بمقياس الرسم m'_w :

$$\left. \begin{aligned} m'_w &= \frac{m_L^2 m_k m_F E I}{H_1} \\ w' &= \frac{s'_w}{m'_w} \end{aligned} \right\} \quad (9.37)$$

سوف يتم البرهان على صحة المعادلات (9.36) و (9.27) في المثال 123 .

مثال 119 :

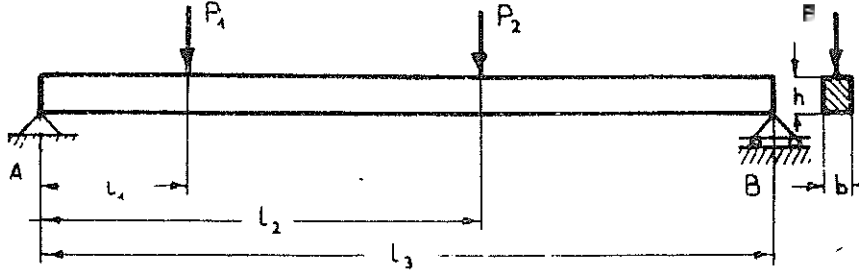
حل جائز بسيط ، مقطعه العرضي مستطيل الشكل ومسند في القعتين a , b بحمولتين P_1 و P_2 شكل (9 34a).

المعطى :

$$b = 2 \text{ cm} , P_2 = 350 \text{ kp} , P_1 = 250 \text{ kp} , l_2 = 60 \text{ cm} , l_1 = 20 \text{ cm} , l = 100 \text{ cm} , \\ E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 , h = 3 \text{ cm} ,$$

المطلوب : تعيين

- ١ - خط الانعطاف (الخط المرن) .
 - ٢ - الانتقال الشاقولي الاعظمي .
 - ٣ - ميل الماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد .
- باستخدام طريقة مور التخيلية .



شكل 9-34a

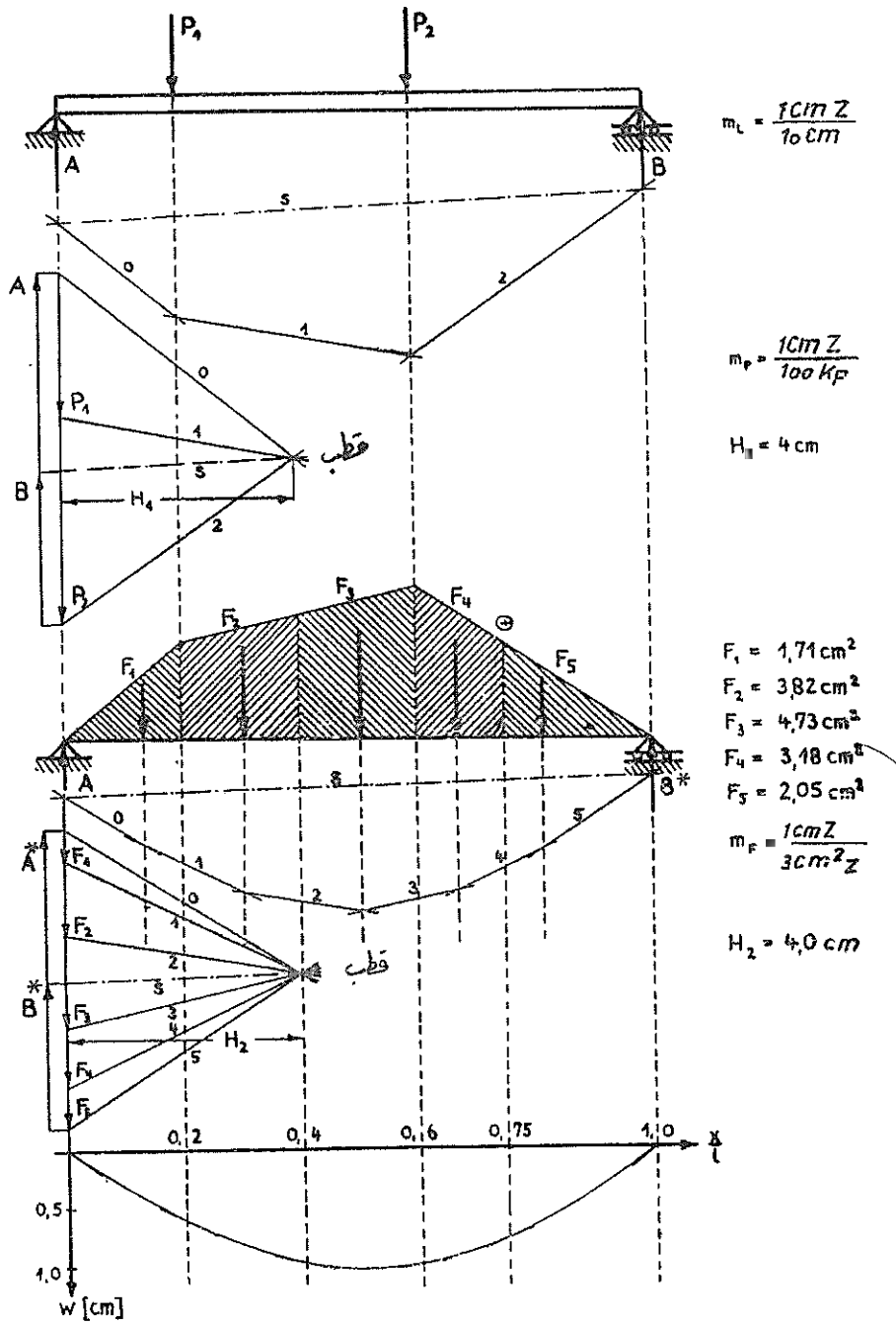
الحل :

لقد تم في الشكل (9.34) انشاء خط الانعطاف باستخدام مطابقة مور . يبلغ مقياس الانتقال الشاقولي في هذه الحالة (العلاقة 9 36) القيمة التالية :

$$m_w = \frac{m_L^3 m_k m_F E I}{H_1 H_2} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 3^3}{10^3 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 12} \frac{\text{cm Z}}{\text{cm}}$$

(حيث تعني cm Z واحد سنتيمتر في الرسم) . كما يبلغ مقياس ميل الماس على خط الانعطاف (العلاقة 9 37) القيمة الآتية :

$$m'_w = \frac{m_L^2 m_k m_F E I}{H_1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 3^3}{10^2 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 12} \text{ cm Z}$$



شكل 9-34

من الشكل (9.34) تقرأ قيمة الانتقال الشاقولي الاعظمي :

$$\max s_w = 2,05 \text{ cm Z}$$

وبذلك يبلغ الانتقال الشاقولي الاعظمي القيمة التالية :

$$\max w = \frac{\max s_w}{M_w} = 2,05 \cdot 0,51 = 1,04 \text{ cm}$$

ان ميل الماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد يساوي القوة العرضية الوهمية في تلك النقاط مقسومة على مقياس الرسم m_w . كما ان القوى العرضية الوهمية عند النقاط a , b تساوي ردود افعال المساند الوهمية . تؤخذ ردود افعال المساند A^* , B^* من مضاعج القوى الوهمي الذي تم رسمه من أجل القوى الوهمية F_1 حتى F_5 . يبلغ ميل الماس على خط الانعطاف عند النقاط a , b القيمة التالية :

$$s_{wa'} = 2,6 \text{ cm Z} ; s_{wb'} = 2,5 \text{ cm Z}$$

بالاستعانة بمقياس الرسم m_w يتم اذاً الحصول على ميل الماس على خط الانعطاف عند نقاط الاستناد :

$$w_{a'} = \frac{s_{wa'}}{m_w} = 2,6 \cdot 0,0127 = 0,033 ; w_{a'} = 1,89^\circ$$

$$w_{b'} = \frac{s_{wb'}}{m_w} = 2,5 \cdot 0,0127 = 0,032 ; w_{b'} = 1,83^\circ$$

فـشـال 120 :

حمل الجائز الفصلي الممثل في الشكل (9.35) بحمولتين وحيدتين P_1 , P_2 وبحمولة موزعة بانتظام q تؤثر على رقبة من الجائز .

المعطى :

$$l_5 = 300 \text{ cm} , l_4 = 240 \text{ cm} , l_3 = 165 \text{ cm} , l_2 = 45 \text{ cm} , l_1 = 30 \text{ cm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 , q = 13,5 \text{ kp/cm} , P_2 = 1000 \text{ kp} , P_1 = 500 \text{ kp} ,$$

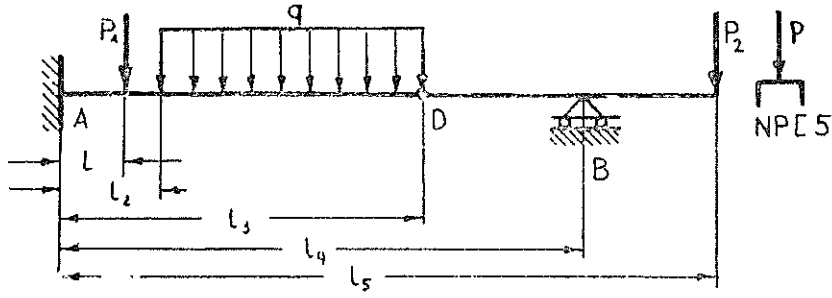
المطلوب : تبين

١ - خط الانعطاف (الخط المرن) .

٢ - الانتقال الشاقولي عند نقطة التمثيل d .

٣ - ميل الماس على خط الانعطاف عند نقطة التمثيل d .

باستخدام طريقة مور التخطيطية .



شكل 9 35

الحل :

تبلغ محصلة القوة الموزعة q القيمة التالية :

$$R = q (l_3 - l_2) = 13,5 \cdot 120 = 1620 \text{ kp}$$

سوف يتم تقسيم هذه الحمولة الى قوتين وحيدتين متساويتين هما :

$$R_1 = 810,0 \text{ kp} ; \quad R_2 = 810,0 \text{ kp}$$

بالاستعانة بالقوى P_1 , P_2 , R_1 , R_2 سوف يتم رسم خط الانعطاف باستخدام مطابقة مور (شكل 9.36) .

بتبديل مقياس الرسم المستخدمة في الشكل (9.36) في العلاقات (9.36) , (9.37) يتم تعيين مقياس الانتقال الشاقولي ومقياس ميل المماس :

$$m_w = \frac{m_L^3 m_k m_F EI}{H_1 H_2} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 9,12}{30^3 \cdot 500 \cdot 0,33 \cdot 3,5 \cdot 3,5} \frac{\text{cm Z}}{\text{cm}}$$

$$m_w = \frac{1}{2,85} \frac{\text{cm Z}}{\text{cm}}$$

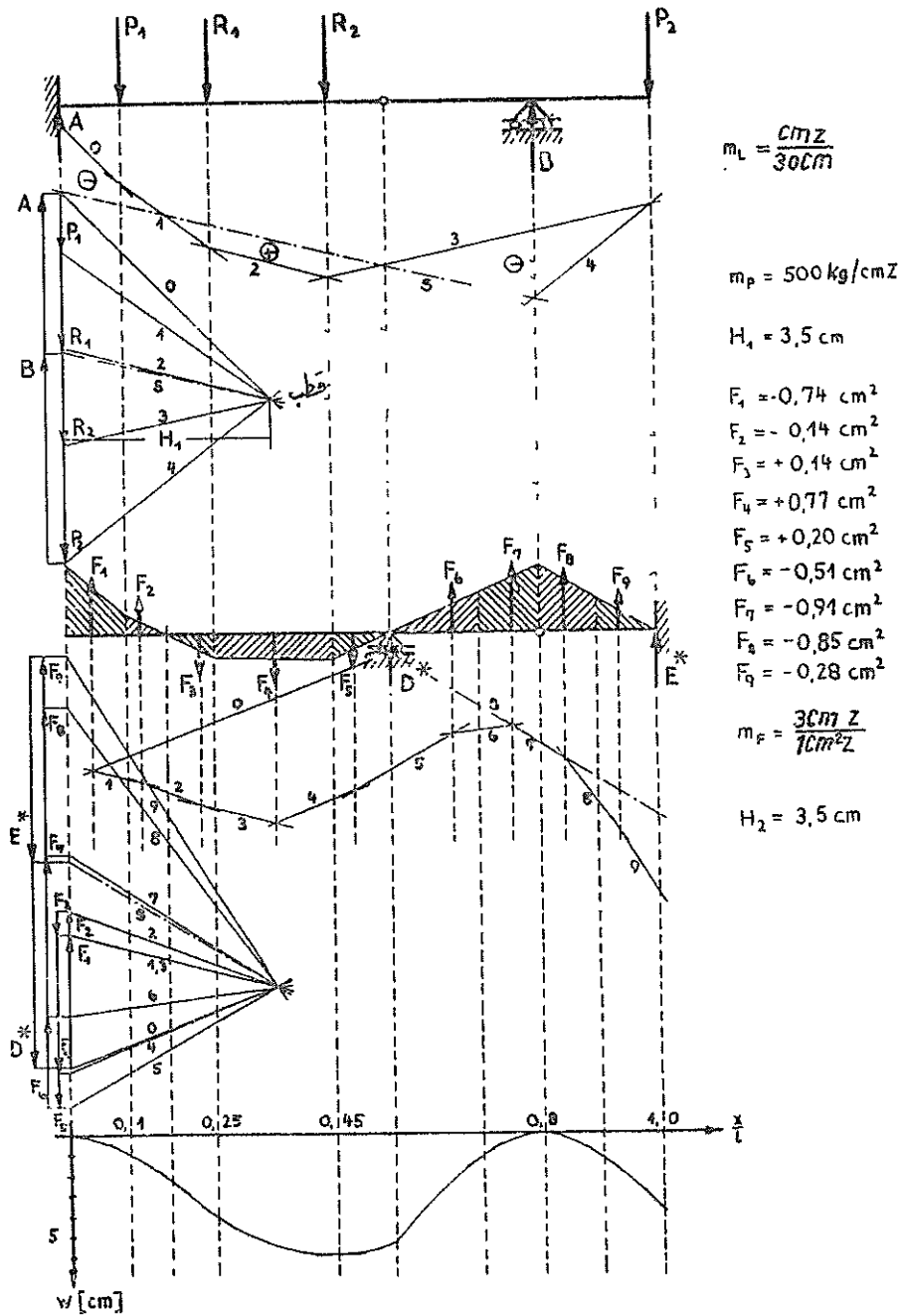
$$m_w' = \frac{m_L^2 m_k m_F EI}{H_1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 9,12}{30^2 \cdot 500 \cdot 0,33 \cdot 3,5} \text{ cm Z}$$

$$m_w' = \frac{1}{0,0274} \text{ cm Z}$$

من الشكل (9 36) تتم قراءة الانتقال الشاقولي لنقطة التمثيل d التالية :

$$s_{wd} = 1,81 \text{ cm Z}$$

مقاومة المواد م ٦١



شكل 6.35

وبذلك فإن الانتقال الشاقولي لنقطة التمثيل d يبلغ :

$$w_d = \frac{s_{wd}}{m_w} = 1,81 \cdot 2,85 = 5,16 \text{ cm}$$

تبلغ القوة العرضية الوهمية الواقعة على يسار المفصل d مباشرة، الذي أصبح حسب مطابقة مور مسنداً وحيد القيمة (مسند متحرك أفقياً) في جائز الاستعاضة ، القيمة التالية :

$$s_{wdl}' = (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) \cdot m_F = 0,23 \cdot 3 = 0,69 \text{ cm Z}$$

أما القوة العرضية الوهمية الواقعة على يمين المفصل d (أو بالأحرى المسند المتحرك الوهمي) فتبلغ :

$$s_{wdr}' = (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5) \cdot m_F + s_D^* = 0,23 \cdot 3 + 3,50 = 4,19 \text{ cm Z}$$

وبذلك يبلغ ميل المماس على خط الانعطاف في نقطة التمثيل :
 آ - النقطة الواقعة على يسار المفصل مباشرة :

$$w_{dl}' = \frac{s_{wdl}'}{m_w} = 0,69 \cdot 0,0274 = 0,0189 ; w'_{dl} = 1,08^\circ$$

ب - النقطة الواقعة على يمين المفصل مباشرة :

$$w_{dr}' = \frac{s_{wdr}'}{m_w} = 4,19 \cdot 0,0274 = 0,115 ; w'_{dr} = 6,56^\circ$$

من الملاحظ ان للمماس على خط الانعطاف عند نقطة التمثيل d قيمتين وهما شيء صحيح ومعمول وذلك لأن خط انعطاف الجائز ، يحتوي على العمود عند نقطة التمثيل على انكسار .

مثال 121 :

حمل جائز بسيط مقطعه العرضي دائري الشكل ولكنه متغير على طول الجائز ، بحمولة وحيدة P (شكل 9.37) .

المعطى :

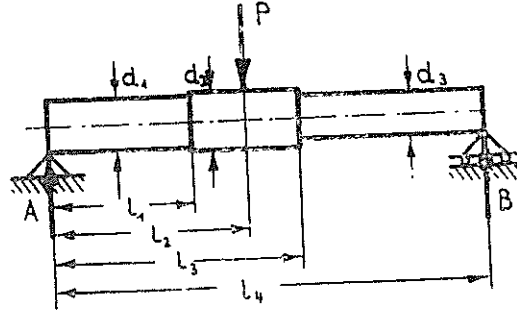
$$l_2 = 27,5 \text{ cm} , l_1 = 20 \text{ cm} , d_3 = 3,0 \text{ cm} , d_2 = 4,0 \text{ cm} , d_1 = 3,5 \text{ cm} , P = 500 \text{ kp} \\ E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 , l_4 = 60 \text{ cm} , l_3 = 35 \text{ cm}$$

المطلوب : تعيين

١ - خط الانعطاف (الخط المرن) .

٢ - الانتقال الشاقولي الاعظمي .

٣ - ميل المماس على خط الانعطاف عند تقاطعي الاستناد .
وذلك باستخدام مطابقة مور التخطيطية .



شكل 9 37

الحل :

بانشاء المضلع الجبلي الاول الممثل في الشكل (9.38) يتم التوصل لتوزيع عزم الانعطاف على طول الجائز الفعلي . للحصول على خط الانعطاف ينبغي الآن تحميل جائز الاستعاضة بالجولة الوهمية $q^* = M/EI$. بما ان صلابة انعطاف الجيزان التي تمت معالجتها في الامثلة 119 و 120 كانت ثابتة على طول الجائز لذلك لم يلزم ، اثناء تعيين مقاييس رسم الانتقال الشاقولي وميل المماس على خط الانعطاف ، اخذها بعين الاعتبار . لكن عزم عطالة الجائز المدروس في هذا المثال متغير لذلك ينبغي اعتبار ذلك وتم معالجته بالشكل التالي :

يفترض بكل بساطة ان للجائز نفس المقطع العرضي « عزم عطالة الجائز ثابت » . وبهذا الافتراض تكون عزوم العطالة قد غيرت بشكل كبير وبما يساوي العوامل التالية :

$$x_1 = \frac{I_c}{I_1} , x_2 = \frac{I_c}{I_2} , x_3 = \frac{I_c}{I_3}$$

بتغيير عزوم العطالة هذا التغير الكبير فان الجولات الوهمية q^* التي يحمل بها جائز الاستعاضة تتغير بشكل كبير ايضاً ($q^* = M/EI$) . ان تغيير عزوم العطالة والجولة الوهمية الناتج عن الافتراض القوي السابق غير مسموح به ولذلك ينبغي اعادة اعتبار ذلك ثانية . سوف يتم هنا اعتبار التغير ضمن مخطط عزم الانعطاف وذلك بنفس المقدار وفي الامكنة التي تغيرت فيها عزوم العطالة بما يساوي العامل x . في هذا المثال سوف يعاد الجائز المعطى الذي يتغير

عزم عطالته الى جائز ذو مقطع عرضي ثابت وقطره d_2 « عزم عطالته I_2 ثابت » وبذلك تبلغ عوامل التحويل القيم التالية :

$$x_1 = \frac{\pi d_2^4 \cdot 64}{64 \pi d_1^4} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 = \left(\frac{4}{3,5} \right)^4 = 1,72$$

$$x_2 = \frac{\pi d_2^4 \cdot 64}{64 \pi d_2^4} = \left(\frac{d_2}{d_3} \right)^4 = \left(\frac{4}{3} \right)^4 = 3,18$$

بواسطة هذه القيم يمكن الآن رسم سطح عزم الانعطاف المختزل الذي يمثل المحولة الوهمية لجائز الاستعاضة والذي يتم بالاعتماد عليه إيجاد خط الانعطاف المطلوب (شكل 9-38) .

لحساب مقاييس رسم الانتقال الشاقولي وميل المماس على خط الانعطاف ينبغي استخدام عزم العطالة I_2 .

$$m_w = \frac{m_L^3 m_k m_F E I^2}{H_1 H_2} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 4^4}{5^3 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4,5 \cdot 64} = \frac{1}{0,064} \frac{\text{cmZ}}{\text{cm}}$$

$$m_w' = \frac{m_L^2 m_k m_F E I_2}{H_1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 4^4}{5^2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 64} = \frac{1}{0,0028} \frac{\text{cmZ}}{\text{cm}}$$

من الرسم تقرأ ، بالنسبة للانتقال الشاقولي ، القيمة التالية :

$$\max s_w = 2,2 \text{ cmZ}$$

وبذلك فان الانتقال الشاقولي الفعلي يبلغ :

$$\max w = \frac{\max s_w}{m_w} = 2,2 \cdot 0,064 \text{ cm} = 0,141 \text{ cm}$$

لحساب ميل المماسات على خط الانعطاف عند المساند تلزم معرفة القوى العرضية الوهمية في تلك النقاط والتي تساوي في نفس الوقت ردود أفعال المساند الوهمية التي يتم من أجلها من الشكل (9.38) قراءة القيم التالية :

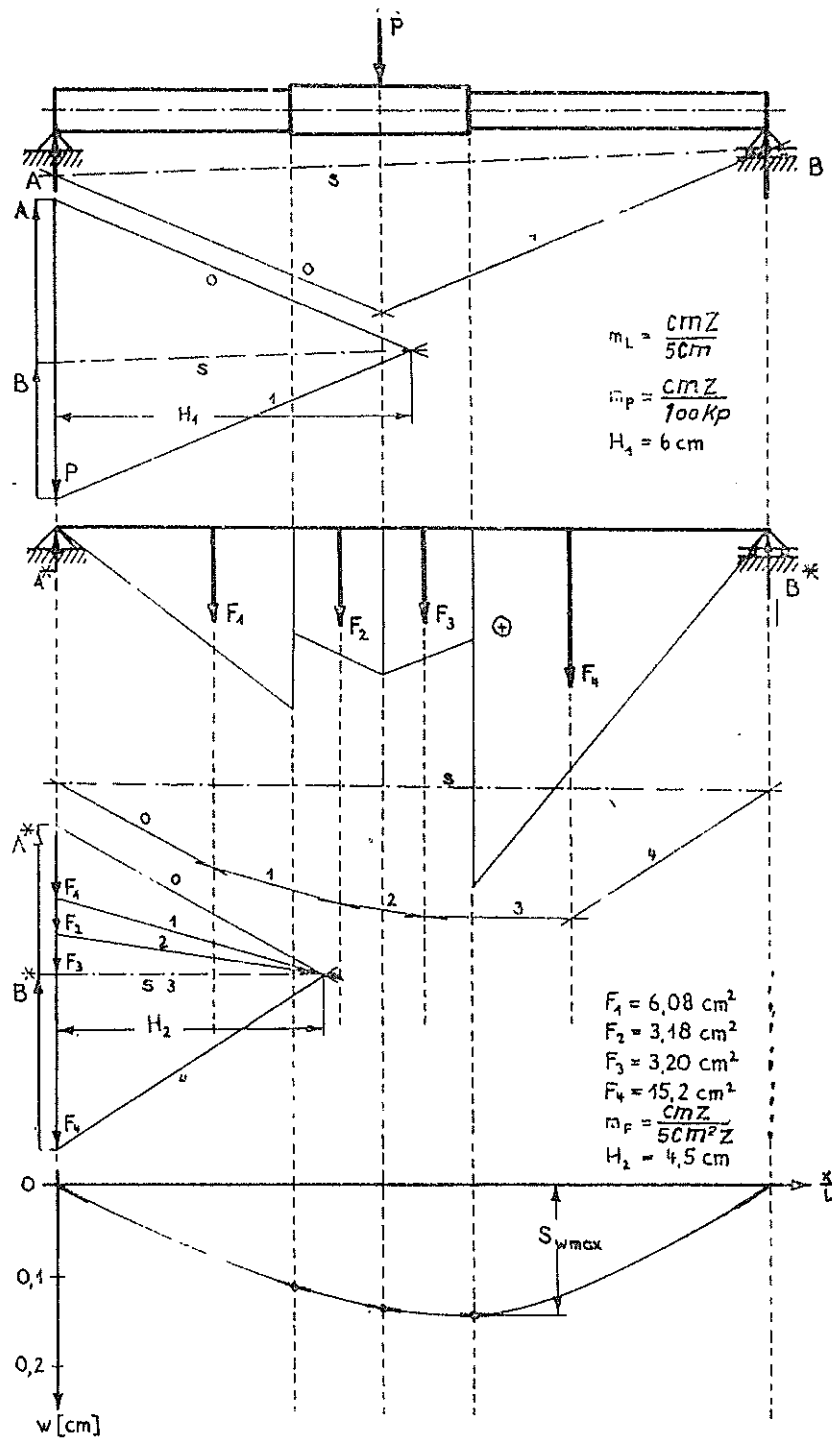
$$s_{wa}' = 2,5 \text{ cmZ}$$

$$s_{wb}' = 3,0 \text{ cmZ}$$

بادخال مقياس الرسم بعين الاعتبار يتم تعيين القيم الفعلية :

$$w_a' = 2,5 \cdot 0,0028 = 0,0070 ; w_a' = 0,40^\circ$$

$$w_b' = 3,0 \cdot 0,0028 = 0,0084 ; w_b' = 0,48^\circ$$



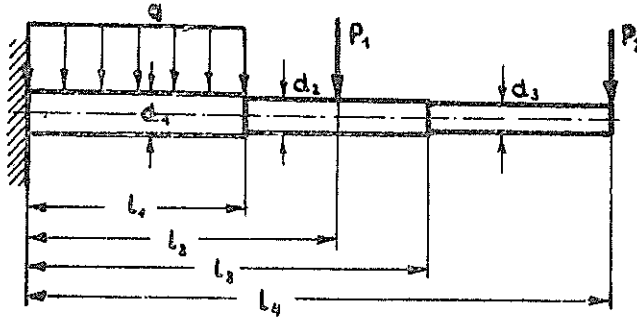
9.38 شکل

مثال 122 :

حمل جائز بارز (ظفر) مقطعه العرضي دائري الشكل ويتغير ثلاث مرات على طول الجائز ،
بحمولة موزعة q تؤثر على رقعة منه وحولتين وحيدتين p_1 ، p_2 (شكل 9.39) .

المعطى : $d_2 = 2,5 \text{ cm}$ ، $d_1 = 3 \text{ cm}$ ، $q = 0,8 \text{ kp/cm}$ ، $P_2 = 10 \text{ kp}$ ، $P_1 = 15 \text{ kp}$
، $l_4 = 125 \text{ cm}$ ، $l_3 = 95 \text{ cm}$ ، $l_2 = 75 \text{ cm}$ ، $l_1 = 50 \text{ cm}$ ، $d_3 = 2 \text{ cm}$ ،
، $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$

المطلوب : تعيين خط الانعطاف وكذلك الانتقالات الشاقولي الاعظمي بالاستعانة بمطابقة مور
التخطيطية .



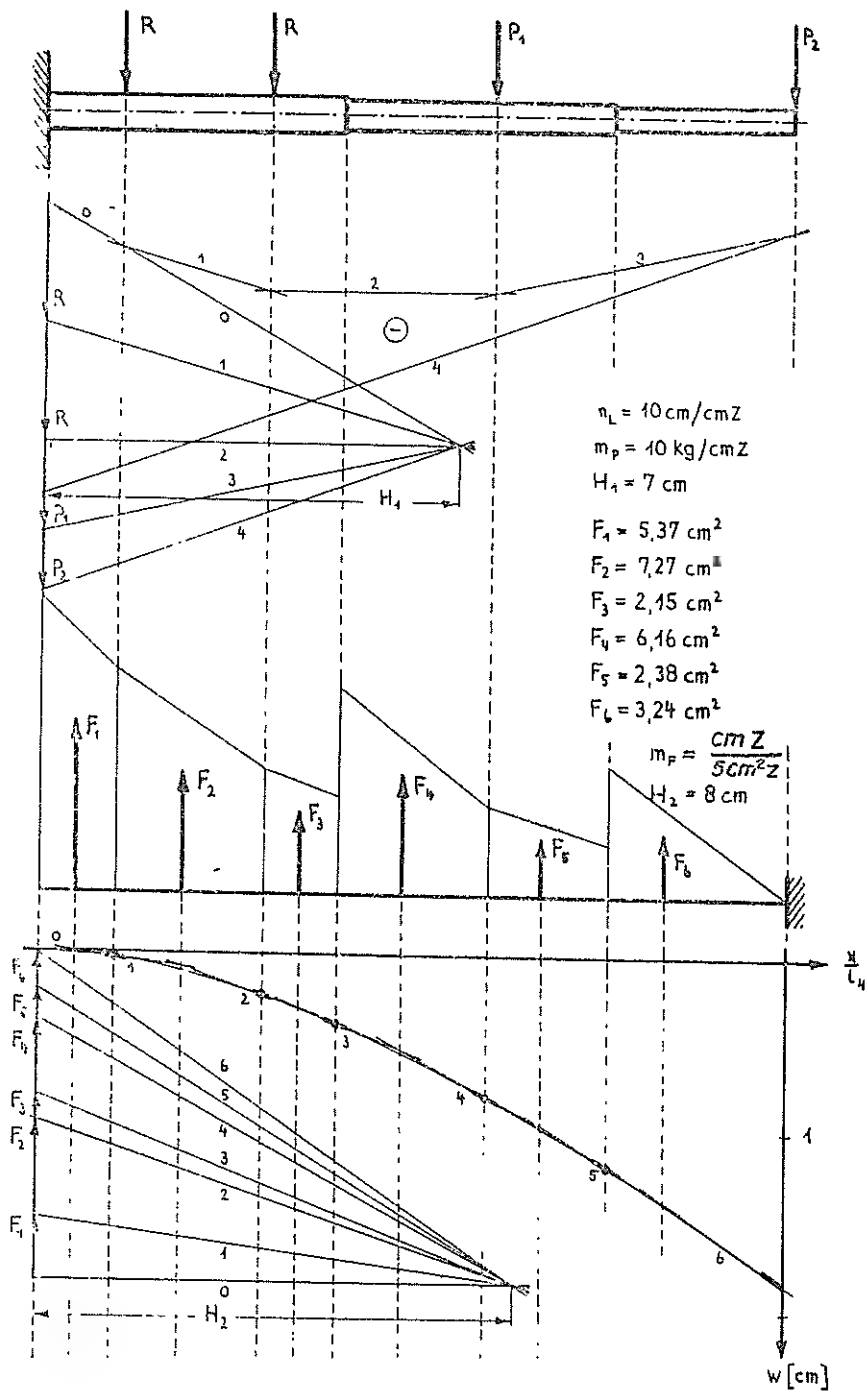
شكل 9.39

الحل :

يستعاض في هذا المثال عن الحمولة الموزعة بحمولتين وحيدتين قيمة كل منهما R . تبلغ قيمة
محصلة الحمولة الموزعة $q \cdot l_1 = 40 \text{ kp}$ وبذلك تبلغ كل من قوتي الاستعاضة $R = 20 \text{ kp}$. وبهذا
يصبح تعيين سلع عزم الانعطاف بالطريقة التخطيطية ممكناً (شكل 9.40) . بما ان عزوم
عطالة الجائز متغيرة لذا سوف يختزل الجائز ويستعاض عنه بجائز عزم عطالته ثابت وقطره d_1
(سوف يعاد الجائز الى جائز عزم عطالته ثابت ونصف قطره d_1) . لذا ينبغي تكبير سطوح
عزوم الانعطاف في كل من المجالين 3,2 وذلك بقدر العوامل :

$$x_2 = \frac{\pi d_1^4 \cdot 64}{64 \cdot \pi \cdot d_2^4} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 = \left(\frac{3}{2,5} \right)^4 = 2,08$$

$$x_3 = \frac{\pi d_1^4 \cdot 64}{64 \cdot \pi \cdot d_3^4} = \left(\frac{d_1}{d_3} \right)^4 = \left(\frac{3}{2} \right)^4 = 5,1$$



شکل 9.40

ينبغي الآن حساب مقاييس الرسم بالاستعانة بعزم المطالة $\bar{I}_1 = \pi d_1^4 / 64$:

$$m_w = \frac{m_L^3 m_k m_F E I_1}{H_1 H_2} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 3^4}{10^3 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 64} = \frac{1}{0,34} \frac{\text{cm Z}}{\text{cm}}$$

من الشكل (9.40) يستطاع قراءة الانتقال الشاقولي الاعظمي :

$$\max s_w = 5,4 \text{ cm Z}$$

الذي يبلغ في الحقيقة :

$$\max w = 5,4 \cdot 0,34 = 1,84 \text{ cm}$$

لقد تم في الشكل (9.40) تمثيل خط الانعطاف بدقة .

مثال 123:

حمل جائز ممتد الطرف بحمولتين وحيدتين متساويتين P (شكل 9.41) .

المعطى : P , $E I_0$, a .

المطلوب : تعيين خط انعطاف الجائز بالطريقة التخطيطية .

الحل :

تختار القيم التالية :

$$H_1 = 3,0 \text{ cm} ; m_L = \frac{1,5 \text{ cm}}{a} , m_k = \frac{2,0 \text{ cm}}{p}$$

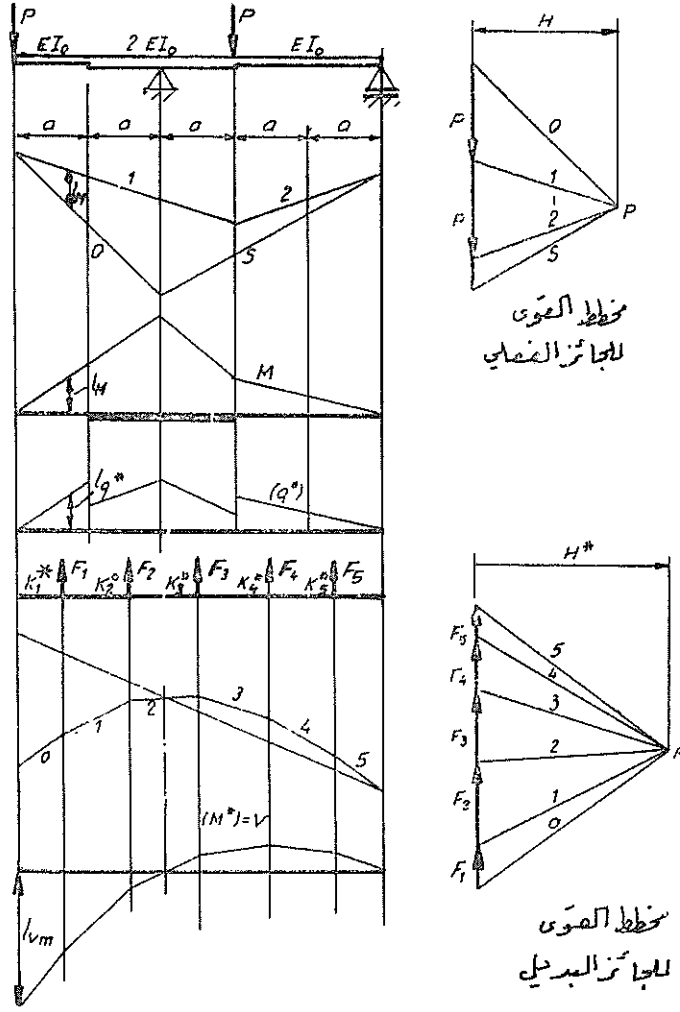
بواسطة هذه القيم يتم الحصول على مخطط القوى ومسطح العزم الذي سيعاد رسمه ثانية بشكل مستقيم لزيادة الايضاح . استناداً الى القيم السابقة فان مقياس العزم يبلغ :

$$m_M = \frac{1,0 \text{ cm}}{p a}$$

بما أن القيمة $E I_0$ معلومة لذلك يمكن رسم سطح الحملولة الوهميه q^* مباشرة . أما مقياسه فيبلغ :

$$m q^* = 1,0 \text{ cm} \frac{E I_0}{P a}$$

يقسم السطح q^* الى سطوح جزئية ثم تحسب مساحة كل منها وتعوض كقوة في مركز ثقل السطح الجزئي التابع لها . بعد ذلك يعاد اختيار القيم التالية :



شكل 9.41

$$H_2 = 4,0 \text{ cm} ; m_F = \frac{1,5 \text{ cm}}{\text{cm}^2}$$

بواسطة هذه القيم يتم رسم مخطط القوى و سطح العزم للجوائز الاستعاضة . بعد ذلك يعاد رسم سطح العزم بشكله المستقيم والذي يمثل بالتقريب خط الانعطاف . أما مقياس الانتقال الشاقولي فيبلغ القيمة التالية :

$$m_w = \frac{E I_0}{3,0 \text{ cm} \cdot 4,0 \text{ cm}} \frac{2,0 \text{ cm}}{P} \frac{1,5 \text{ cm}}{\text{cm}^2} \frac{(1,5 \text{ cm})^3}{a^3} = 0,845 \frac{E I_0}{P a^3}$$

يتشكل الانتقال الشاقولي الاعظمي في النهاية الحرة للجوائز . من الشكل (9-11) تقرأ القيمة التالية :

$$\max s_w \approx 2,75 \text{ cm}$$

بتقسيم هذه القيمة على مقياس الرسم يتم الحصول على القيمة الفعلية:

$$\max w = \frac{\max s_w}{m_w} \approx 3,26 \frac{\text{Pa}^3}{\text{El}_0}$$

مثال 124 :

يطلب البرهان على صحة مقاييس الرسم للانتقالات الشاقولية (العلاقة 9-36) وميول المماسات على خط الانعطاف (العلاقة 9-37) .

الحل :

سوف يرمز لكافة القيم المقروءة من الرسم ، هذا يعني القيم الممثلة في الشكل بالـ cm Z (في الرسم) بالاحرف s مذبذبة بالدليل المناسب . يبلغ عزم الانعطاف في النقطة x من الجائز البسيط الممثل في الشكل (a 9-42) والحمل بحمولة وحيدة القيمة التالية :

$$M(x) = A \cdot x$$

بالامكان التعبير عن القيم A , x الموجودة في المعادلة السابقة من خلال القيم المقروءة من الرسم ومقاييس الرسم وهي تبلغ :

$$A = m_k s_A ; x = m_L s_L$$

بذلك يأخذ عزم الانعطاف الشكل التالي :

$$M(x) = s_A s_x m_k m_x \quad (9-38)$$

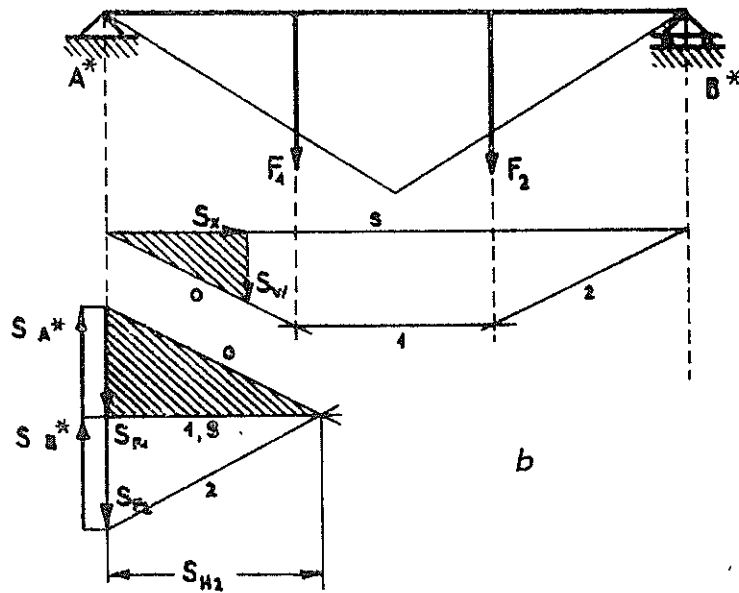
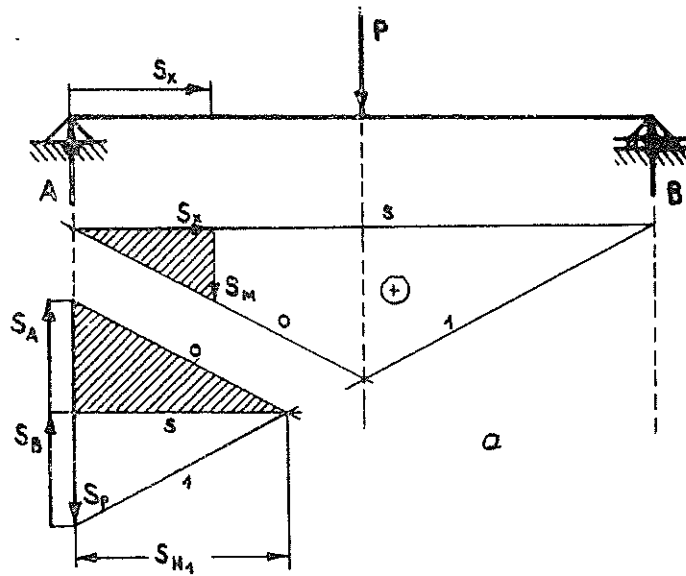
ان كلا المثلثين المبرهنين في الشكل (9.42) متشابهين ومن ذلك ينتج :

$$\frac{s_A}{s_{H1}} = \frac{s_M}{s_x} , s_A = \frac{s_M s_{H1}}{s_x} \quad (9-39)$$

بتبديل s_H حسب العلاقة (9-39) في العلاقة (9-38) ينتج :

$$M(x) = s_M s_{H1} \frac{1}{m_k} \frac{1}{m_l}$$

يعطي ترتيب المضلع الجبلي الممثل في الشكل (9.42) عزم الانعطاف . بتعريف مقياس لرسم عزوم الانعطاف :



شکل 9-42

$$M = s_w \frac{1}{m_M}$$

يتم الحصول على ما يلي :

$$m_M = m_k m_L \frac{1}{s_{H1}}$$

حسب مطابقة مور فان الانتقال الشاقولي في النقطة x (شكل 9-4) يبلغ :

$$w(x) = A^* \cdot x$$

يستعاض عن القيم A^* , x الموجودة في العلاقة السابقة بالقيم المقروءة من الرسم ومقاييس الرسم:

$$A^* = s_A^* \frac{1}{m_j}$$

$$x = s_x \frac{l}{m_L}$$

وبذلك ينتج :

$$w(x) = s_A^* s_x \frac{1}{m_L} \frac{1}{m_j}$$

ان المائتين المشرين في الشكل (9 43 b) متشابهين . وبذلك ينتج :

$$\frac{s_A^*}{s_{H2}} = \frac{s_w}{s_x}$$

$$s_A^* = \frac{s_{H2} s_w}{s_x}$$

بالاستعاضة عن s_A^* في معادلة w(x) الاخيرة ينتج :

$$w(x) = s_{H2} s_w \frac{1}{m_L} \frac{1}{m_j}$$

بواسطة العلاقة التالية :

$$w(x) = s_w \frac{1}{m_w}$$

والعلاقة التي سبقتها يتم تعريف مقياس رسم الانتقالات الشاقولية :

$$m_w = m_L m \frac{1}{s_{H2}}$$

يظهر في هذه العلاقة مقياس الرسم m_j ، وهو يصلح مقياساً لرسم المحولات الوهمية المتحدة F_i . تحسب قيم F_i بعد غرض النظر عن العامل عديم الواحدة كجاء الاطوال x والمحولات الوهمية q^* :

$$F = s_F \frac{1}{m_j} = s_x \frac{1}{m_L} s_M \frac{1}{m_H} / E I$$

من هذه المعادلة يتم الحصول على العلاقة التالية :

$$\frac{1}{m_j} = \frac{s_x s_M}{s_F i} : \frac{E I}{m_L m_M}$$

يمثل الاصطلاح $s_x s_M / s_F i$ الذي تتضمنه العلاقة السابقة مقياس السطوح m_F الذي تم استخدامه حتى الآن وبذلك تأخذ العلاقة السابقة شكلها النهائي التالي :

$$m_j = \frac{m_L^3 m_k m_F E I}{m_F s_{H1}}$$

أما مقياس رسم الانتقالات الشاقولية فيصبح بالشكل التالي :

$$m_w = \frac{m_L^3 m_k m_F E I}{s_{H1} s_{H2}}$$

وأما مقياس رسم ميل المماس على خط الانعطاف فهو يساوي نفس القيمة التي تم الحصول عليها تحت الرمز m_L :

$$m_w' = \frac{m_L^2 m_k m_F E I}{s_{H1}}$$

لقد تم في الأمثلة 119 حتى 123 تسمية الأبعاد القطبية الاختصار بـ H_1 , H_2 .

٩ - ١١ طريقة الاستمرار وطريقة الماتريسات للانعطاف المستقيم في القضبان الموشورية

سوف يتم في هذه الفقرة استخدام مجموعة الاحداثيات المعرفة في الشكل (95) . في حالة كون $E I = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ فإن المعادلة التفاضلية من الدرجة الرابعة لخط الانعطاف تأخذ الشكل التالي :

$$\left. \begin{aligned} E I w'''' &= q = +q \\ E I w''' &= -Q = +q x + C_1 \\ E I w'' &= -M = +q \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \\ E I w' &= E I \varphi = +q \frac{1}{6} x^3 + C_1 \frac{1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \\ E I w &= +q \frac{1}{24} x^4 + C_1 \frac{1}{6} x^3 + C_2 \frac{1}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

سوف تطلق على مجال صلاحية المعادلات (المكان المحصور بين وضعي عدم استمرار) باختصار كلمة مجال فقط وهو يحدد بواسطة الاحداثيات $x=0$, $x=l$ سوف يذيل المقطع العرضي $x=0$ باعتباره بداية المجال (مدخل المجال) بالدليل e كما سيذيل المقطع العرضي $x=l$ باعتباره نهاية المجال (مخرج المجال) بالدليل a . يطلق على القيم الاربعة w, φ, λ, Q اسم قيم الحالة (قيم القطع + قيم التغير) للقضيب المعطى وذلك لانها تعين حالة التغير وحالة الاجهاد في ذلك القضيب .

يمكن بسهولة التعبير عن الثوابت $C_1 \dots C_4$ بواسطة قيم الحالة التابعة لبداية المجال (مدخل المجال) :

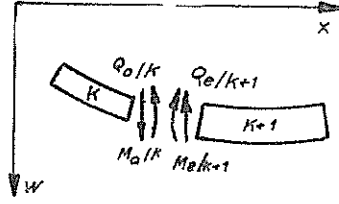
$$C_1 = -Q_e ; C_2 = -M_e ; C_3 = EI\varphi_e ; C_4 = EIw_e$$

وبذلك يستطاع التعبير عن قيم الحالة الثابتة لنهاية المجال (قيم النهاية او قيم المخرج) بواسطة قيم الحالة التابعة لبداية المجال (قيم البداية او قيم المدخل) هكذا :

$$\left. \begin{aligned} w_a &= w_e + \varphi_e l - M_e \frac{l^2}{2EI} - Q_e \frac{l^3}{6EI} + q \frac{l^4}{24EI} \\ \varphi_a &= \varphi_e + M_e \frac{l}{EI} + Q_e \frac{l^2}{2EI} + q \frac{l^3}{6EI} \\ M_a &= M_e + Q_e l + q \frac{1}{2} l^2 \\ Q_a &= Q_e + q l \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

على العموم يقع على جوار نهاية المجال (مخرج المجال) المدروس مجال آخر تتطابق قيم بدايته (قيم مدخله) مع قيم النهاية (قيم المخرج) المحسوبة مؤخراً . لو رمز للمجال المدروس في البداية بالحرف k والمجال المجاور له بالحرف $k+1$ تم الحصول على العلاقات التالية (شكل 944) :

$$\left. \begin{aligned} w_{e/k+1} &= w_{a/k} \\ \varphi_{e/k+1} &= \varphi_{a/k} \\ M_{e/k+1} &= M_{a/k} \\ Q_{e/k+1} &= Q_{a/k} \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$



شكل 9.4.1

عندما يتكرر استعمال المعادلات (9.41) ، (9.42) يستطاع تمثيل قيم الحالة كاملة لاي مجال من خلال قيم الحالة الاربعة التابعة لبداية المجال (لمدخل المجال) الاول ويتم ذلك بالتنقل بواسطة المعادلات (9.41) ، (9.42) من مجال لمجال آخر وبذلك تنقل قيم بداية المجال الأول الى المجالات الاخرى . تحدد اثنتان من قيم البداية الاربعة للمجال الاول بواسطة شروط الاطراف اما القيمتين المتبقيتين فتنتقل كعوامل مجهولة الى المجال الاخير مارة بكل المجالات ومخططة كافة الحسابات . حين بلوغ المجال الاخير تعين هاتين القيمتين بواسطة شرطي الاطراف هناك . غالباً ما تسبب الشروط الجانبية (على سبيل المثال مكان امتداد) اثناء الحل الى تناوب العوامل المجهولة ، لذلك ينبغي في نهاية الحساب حل معادلتين بمجهولين (لا علاقة لعدد المجالات بدرجة عدم التقرب الستاتيكي وكذلك لا علاقة لها بعدد المجالات) . تصالح تلك العلاقات من أجل الانعطاف المستقيم في القضبان المستمرة غير المتفرعة فقط اما في الحالات الاخرى فينبغي اجراء التعديل اللازم على المعادلات ، لكن طبيعة الطريقة وخطواتها تبقى كما هي بدون تغير . يطلق على هذه الطريقة المستخدمة لحساب قيم الحالة اسم طريقة الاستمرار . لكن اذا استخدمت فيها الكتابة الماتريسية لتعبير عن المعادلات (9.41) و (9.42) من أجل ترتيبها وتنسيقها عندئذ يطلق عليها اسم الطريقة الماتريسية (طريقة المربعات ، طريقة المصفوفات) . الماتريس هي عبارة عن مخطط عددي مستطيل الشكل (وفي بعض الحالات الخاصة مربعة الشكل) ولها ، في الرياضيات ، قواعد حسابية خاصة .

ان قاعدة ضرب الماتريسات المستعملة هنا بكثرة والتي يعبر عنها بشكل مختصر كالتالي : ضرب السطر (الخط الافقي) بالعمود (الخط الشاقولي) ، تفهم بالشكل الآتي : يضرب الحد n من سطر (خط افقي) عائد للماتريس الاولى مع الحد n من عمود (خط شاقولي) عائد للماتريس الثانية بعد ذلك تجمع كل الجداءات الجزئية الناتجة من ضرب السطر (الخط الافقي) مع العمود (السطر الشاقولي) . لزيادة الايضاح موفى يحل مثال بسيط يشرح ضرب ماتريسين عددين مع بعض :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 3 \cdot 1) & (1 \cdot 0 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2) \\ (2 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 8 \cdot 1) & (2 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 8 \cdot 2) \\ (5 \cdot 4 + 9 \cdot 0 + 6 \cdot 1) & (5 \cdot 0 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.48 \\ 16 & 40 \\ 26 & 66 \end{pmatrix}$$

تأخذ المعادلات (9-41) بطريقة الكتابة الماتريسية الشكل التالي :

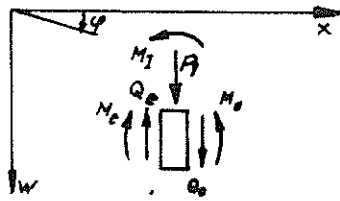
$$\begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ -M_a \\ -Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/2EI & l^3/6EI \\ 0 & 1 & l/EI & l^2/6EI \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_e \\ \varphi_e \\ -M_e \\ -Q_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l^4/24EI \\ l^3/6EI \\ l^2/2 \\ l \end{bmatrix} q \quad (9.43)$$

ماتريس العمود ماتريس النقل ماتريس العمود ماتريس العمود

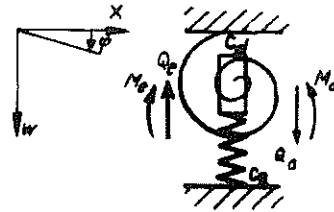
Spaltenmatrix Uebertragungsmatrix Spaltenmatrix Spaltenmatrix

تشير تسميه ماتريس النقل الى ان هذه الماتريس تقوم بنقل قيم البداية (قيم المدخل) الى نهاية المجال (قيم المخرج) . تتعلق ماتريس النقل من صفات الجائز فقط ولكنها لا تتعلق مطلقاً من الحمولات (اي انها مستقلة عن الحمولات) . بواسطة المعادلة الماتريسية (9-43) يتم حساب كل الجيزان المستقيمة المحملة بانعطاف مستقيم والتي لا تحتوي على حمولات وحيدة (حمولات مركزة) . لكن في حالة وجود حمولات وحيدة نلزم ، علاوة على المعادلة الماتريسية ، إضافة معادلات إضافية .

يشير الشكل (9.45) الى قطعة صغيرة جداً من الجائز وتؤثر عليها حمولات وحيدة P_1 , M_1 .



شكل 9.45



شكل 9.46

من الشكل (9.45) يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$w_a = w_e , \quad \varphi_a = \varphi_e , \quad M_a = M_e - M_1 , \quad Q_a = Q_e - P_1$$

التي يعبر عنها بشكل ماتريسي ، هكذا :

$$\begin{bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c \\ \varphi_c \\ M_c \\ Q_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_1 \\ -P_1 \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

في كثير من الحالات تلازم المعادلة الماتريسية التابعة للمسند المرن . يشير الشكل (9.46) الى مسند مرن قصير جداً (تخطيطي)، ثابت نابضه C_q (نابض عرضي) و C_d (نابض دوراني)، وبامعان النظر فيه يتم التوصل للمعادلات التالية :

$$\begin{bmatrix} w_a \\ Q_a \\ M_a \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_d & 1 & 0 \\ C_q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c \\ \varphi_c \\ M_c \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

من اجل الحالات الاخرى التي يحتمل ان تصادف المهندس في حياته العملية يمكن الحصول على المعادلة الماتريسية انثابة لها باتباع نفس الطريق . يفضل اثناء التطبيق العملي للطريقة الماتريسية اتباع التمثيل عديم الواحدة . للتمكن من القيام بذلك يلزم إختيار قيم نسب ، تنسب القيم اليها ، هنا مستختر القيم التالية كقيم نسب :

الطول l_c وصلابة الانعطاف $(EI)_c$ ، بعد ذلك يستعاض عن القيم ذات الواحدات بقيم عديدة الواحدات :

$$\bar{w} = \frac{w}{l_c}, \quad \bar{\varphi} = \varphi, \quad \bar{M} = \frac{M l_c}{(EI)_c}, \quad \bar{Q} = \frac{Q l_c^2}{(EI)_c}, \quad \bar{q} = \frac{q l_c^3}{(EI)_c}$$

أما بقية القيم عديدة الواحدة (التي تظهر في ماتريس النقل عديدة الواحدة) فهي :

$$\lambda = \frac{l}{l_c}, \quad \varepsilon = \frac{(EI)_c}{EI}, \quad \bar{C}_d = \frac{C_d l_c}{(EI)_c}, \quad \bar{C}_q = \frac{C_q l_c^3}{(EI)_c}$$

بعد القيام بما ذكر فان المعادلات (9.43)، (9.44)، (9.45) تأخذ الشكل التالي :
قطعة مرنة من جائز :

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_a \\ \bar{\varphi}_a \\ -\bar{M}_a \\ -\bar{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \varepsilon \frac{\lambda^2}{2} & \varepsilon \frac{\lambda^3}{6} \\ 0 & 1 & \varepsilon \lambda & \varepsilon \frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_c \\ \bar{\varphi}_c \\ -\bar{M}_c \\ -\bar{Q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \frac{\lambda^4}{24} \\ \varepsilon \frac{\lambda^3}{6} \\ \frac{\lambda^2}{2} \\ \lambda \end{bmatrix} \bar{q} \quad (9.46)$$

حمولة وحيدة :

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_a \\ \bar{\varphi}_a \\ \bar{M}_a \\ \bar{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_e \\ \bar{\varphi}_e \\ \bar{M}_e \\ \bar{Q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{M}_1 \\ -\bar{P}_1 \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

مسند مرن :

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_a \\ \bar{\varphi}_a \\ \bar{M}_a \\ \bar{Q}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_d & 1 & 0 \\ C_q & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_e \\ \bar{\varphi}_e \\ \bar{M}_e \\ \bar{Q}_e \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

مثال 125 :

حمل الجائز الممثل في الشكل (9.47) بحمولة وحيدة وحمولة موزعة تؤثر على رقعة منه .
المعطى :

$$l_1 = 0,8 l_2 , l_3 = 1,2 l_2$$

$$E I_1 = 0,4 E I_2 = E I_3$$

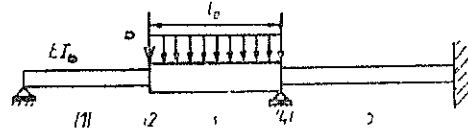
$$q l_2 = 0,6 P$$

المطلوب : حساب قيم الحالة (قيم القطع وقيم التنير) عند نقاط عدم الاستمرار في الجائز .

الحل :

إختيار قيم النسب $E I_e = E I_1$, $l_e = l_2$
تقسيم الجائز الى مجالات وترقيمها حسب الشكل (9.48) .
سيتم اجراء الحل بواسطة الجدولين التاليين .

سوف تكتب القيم المعلومة λ , ε , q او بالاحرى \bar{M}_1 و \bar{P}_1 وماتريسات النقل التابعة للمجالات في الطرف الايسر من الجدول . اما ترتيب السطور (الخطوط الافقية) والاعمدة (الخطوط الشاقولية) فيتطابق تماما مع الترتيب الموجود في المعادلات (9.46) حتى (9.48) .
يستخدم السطر الخامس من الجدول لتدقيق الحسابات وهو يساوي مجموع الاعداد الموجودة في



1	مجال	1	0.800000	+ 0.320000	+ 0.085333	0
	$\lambda = 0.800$	0	1	+ 0.800000	+ 0.320000	0
	$\varepsilon = 1.000$	0		1	+ 0.800000	0
	$\bar{q} = 0$	0			1	0
		- 1.000000	+ 1.800000	- 2.120000	+ 2.205333	0
2	مؤلفة	1	0	0	0	0
	$\bar{M}_1 = 0$	0	1	0	0	0
	$\bar{P}_1 = 1 \cdot \bar{P}$	0	0	1	0	0
		0	0	0	1	+ 1.000000 \bar{P}
		+ 1.000000	+ 1.000000	+ 1.000000	+ 1.000000	+ 1.000000 \bar{P}
3	مجال	1	+ 1.000000	+ 0.200000	+ 0.066667	+ 0.010000 \bar{P}
	$\lambda = 1.000$	0	1	+ 0.400000	+ 0.200000	+ 0.040000 \bar{P}
	$\varepsilon = 0.400$	0	0	1	+ 1.000000	+ 0.300000 \bar{P}
	$\bar{q} = 0.600 \bar{P}$	0	0	0	1	+ 0.600000 \bar{P}
		- 1.000000	+ 2.000000	+ 1.600000	+ 2.266667	+ 0.950000 \bar{P}
4	مستند	$\bar{W}_e = \bar{W}_q = 0 \quad Q_{el} = - 2.848101 \bar{\varphi}_{e1} - 0.121308 \bar{P}$				
5	مجال	1	+ 1.200000	+ 0.720000	+ 0.288000	0
	$\lambda = 1.200$	0	1	+ 1.200000	+ 0.720000	0
	$\varepsilon = 1.000$	0	0	1	+ 1.200000	0
	$\bar{q} = 0$	0	0	0	1	0
		+ 1.000000	+ 2.200000	+ 2.920000	+ 3.208000	0

جدول 1 9

السطور الاربعة التي فوقه (= مجموع الاعمدة) . سوف تكتب قيم الحالة لنهاية المجالات (قيم المخرج) في الطرف الايمن من الجدول .

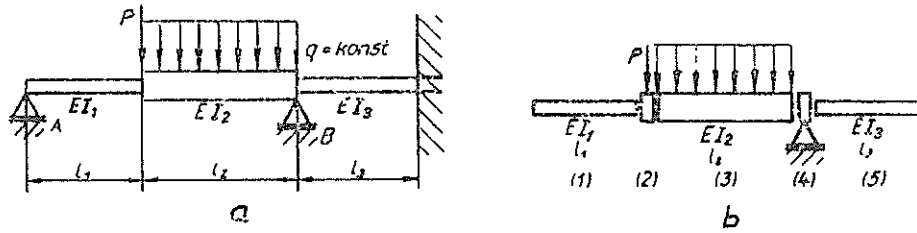
تتطابق قيم البداية (قيم المدخل) للمجال k مع قيم النهاية (قيم المخرج) للمجال (k-1) . لقد دونت قيم البداية للمجال الاول في أعلى الجدول على اليمين وذلك بالشكل التالي (دون ان يكون كل شيء مكتوباً) :

$$\bar{w}_{e1} = 0 \cdot \bar{\varphi}_{e1} + 0 \cdot \bar{Q}_{e1} + 0 \cdot \bar{P}$$

$$\bar{\varphi}_{e1} = 1 \cdot \bar{\varphi}_{e1} + 0 \cdot \bar{Q}_{e1} + 0 \cdot \bar{P}$$

$$\bar{M}_{e1} = 0 \cdot \bar{\varphi}_{e1} + 0 \cdot \bar{Q}_{e1} + 0 \cdot \bar{P}$$

$$\bar{Q}_{e1} = 0 \cdot \bar{\varphi}_{e1} + 1 \cdot \bar{Q}_{e1} + 0 \cdot \bar{P}$$



\bar{P}_{e1}	Q_{el}	\bar{P}	التدقيق	\bar{P}
0	0	0	0	0
1	0	0	1	+ 0,1679
0	0	0	0	0
0	1	0	1	- 0,5709
+ 0,800000	+ 0,085333	0	+ 0,885333	+ 0,0776
+ 1,000000	+ 0,320000	0	+ 1,320000	- 0,0248
0	+ 0,800000	0	+ 0,800000	- 0,4567
0	+ 1,000000	0	+ 1,000000	- 0,5709
+ 1,005333				
+ 0,800000	+ 0,085333	0	+ 0,885333	+ 0,0776
+ 1,000000	+ 0,320000	0	+ 1,320000	- 0,0248
0	+ 0,800000	0	+ 0,800000	- 0,4567
0	+ 1,000000	+ 1,000000	+ 2,000000	+ 0,4291
+ 5,005333				
+ 1,800000	+ 0,632000	+ 0,076667	—	0
+ 1,000000	+ 0,840000	+ 0,240000	—	- 0,0817
0	+ 1,800000	+ 1,300000	—	+ 0,2724
0	+ 1,000000	+ 1,600000	—	+ 1,0201
\bar{P}_{e1}	\bar{B}	\bar{P}	+ 10,288667	\bar{P}
0	0	0	0	0
- 1,392405	0	+ 0,138101	- 1,254304	- 0,0817
- 5,126582	0	+ 1,081646	- 4,044936	+ 0,2724
- 2,848101	+ 1	+ 1,478092	- 0,369409	- 0,3404
- 6,182278	+ 0,288000	+ 1,370370	- 4,523908	0
- 9,594936	+ 0,720000	+ 2,500734	- 6,374202	0
8,544303	+ 1,200000	+ 2,856076	- 4,488227	- 0,1362
2,848101	+ 1,000000	+ 1,478092	- 0,369409	- 0,3404
- 15,755746				

جدول 9.2

بينما يكون عامل التحولة (معامل التحولة) $\bar{P} = P l_c^2 / (EI_c)$ معلوماً فإن القيم \bar{P}_{e1} و \bar{Q}_{e1} ما تزال في البداية مجهولة . ويستخدم العمود (الخط الشاقولي) الرابع من الطرف الايمن للجدول لتدقيق النتائج ويحتوي في مسطوره الاربعه الاولى « مجموع السطور » (لكل مجال) . بعد ذلك سوف تكتب النتائج (معبراً عن ذلك من خلال \bar{P} فقط) في العمود الخامس من

الطرف الايمن للجدول . اما الحساب الفعلي فيبدأ الان . وهو يتألف بصورة رئيسية من تتابع للماتريسات . حسب القاعدة الحسابية المتبعة في ضرب الماتريسات والتي تنص على : ضرب السطر (من الطرف الايسر) بالعمود (من الطرف الايمن) ، سوف يتم في البداية حساب قيم النهايات للمجال الاول ثم تكتب (حسب الترتيب المتبع هنا) عند نقطة تقاطع السطر والعمود المستخدمين. على سبيل المثال يتم الحصول على العدد 0,320 000 من :

$$0 . 0 + 1 . 0 + 0,800\ 000 . 0 + 0,320\ 000 . 1$$

يتألف تدقيق الحساب الذي تم التنويه عنه فيما سبق والذي تم انبائه اثناء حساب قيم النهاية من ضرب كل عدد من مجموع الاعمدة (الطرف الايسر من الجدول) مع اعداد مجموع السطور (الطرف الايمن من الجدول) شريطة الانتباه في كل الحالات الى ان العدد الخامس من مجموع السطور هو العدد 1 . تكتب النتيجة (كما هو الحال دائماً) عند نقطة تقاطع اتجاهات الحساب. ينبغي الحصول على نفس النتيجة فيما لو جمعت كافة حدود مجموع قيم النهاية التي تم حسابها وخرراً. من أجل المجال الاول من المثال فان ذلك الكلام يعني :

$$+ 1,000\ 000 . 0 + 1,800\ 000 . 1 + 2,120\ 000 . 0 + 2,205\ 333 . 1 = + 4,005\ 333$$

و

$$+ 0,885\ 333 + 1,320\ 000 + 0,800\ 000 + 1,000\ 000 = + 4,005\ 333$$

يؤكد تطابق النتيجةين صحة ضرب الماتريسات (لكن هذا التدقيق ليس بالكاف ، فالوقوع في خطئين متعاكسين يزول في النتيجة ، أما احتمال الوقوع في مثل هذا الخطأ وخاصة في الاعداد ذات الارقام الكثيرة المستخدمة هنا فضئيل جداً) . بحساب مطابق للذي تم في المجال الاول يتم الحساب في المجالات 2 . 3 . لكن المجال 4 يأخذ وضعاً خاصاً لان العملية في المجال المذكور لم تعد مجرد ضرب ماتريسي بل اصبحت استعاضة مجهول بمجهول آخر . يوجد في متناول اليد للمجال الرابع الشرط :

$$\bar{w}_{e4} = \bar{w}_{i3} = 0$$

وهذا يعني ان :

$$+ 1,800\ 000 . \bar{\varphi}_{e1} + 0,632\ 000 . Q_{e1} + 0,076667 . \bar{P} = 0$$

وبهذا يتم استقصاء Q_{e1} (كما يمكن ايضاً استقصاء $\bar{\varphi}_{e1}$) :

$$\bar{Q}_{e1} = - 2,848101 . \bar{\varphi}_{e1} - 0,121\ 308 . \bar{P}$$

لكن باختفاء المجهول \bar{Q}_{e1} يظهر بنفس الوقت مجهولاً جديداً ألا وهو رد الفعل B الممثل بالشكل
عديم الواحدة التالي :

$$\bar{B} = B \frac{l_c^2}{EI_c}$$

بهذا تصبح جميع قيم النهاية لهجال 4 قابلة للتمثيل من خلال القيم $\bar{\varphi}_{e1}$, \bar{B} , \bar{A} . لتدقيق هذه
العملية الحسابية لا توجد هناك أية ولهذا السبب ينبغي معالجتها بكل حذر .

يتم حساب المجال 5 كما تم في المجالات 1 , 2 , 3 . في نهاية المجال الاخير يتم ، بفضـل
شروط الاطراف ، التوصل لمعادلتين من أجل $\bar{\varphi}_{e1}$, \bar{B} .

$$\bar{w}_{a5} = 0 = - 6,182\,278 \cdot \bar{\varphi}_{e1} + 0,288\,000 \cdot \bar{B} + 1,370\,370 \cdot \bar{P}$$

$$\bar{\varphi}_{a5} = 0 = - 9,594\,536 \cdot \bar{\varphi}_{e1} + 0,729\,000 \cdot \bar{B} + 2,500\,731 \cdot \bar{P}$$

بحل هاتين العلاقتين يتم تعيين المجهولين المطلوبين :

$$\bar{\varphi}_{e1} = + 0,157862 \cdot \bar{P}$$

$$\bar{B} = - 1,369\,525 \cdot \bar{P}$$

وبالاستعاضة عن $\bar{\varphi}_{e1}$ بقيمتها ينتج :

$$\bar{Q}_{e1} = - 0,570915 \cdot \bar{P}$$

هكذا يستطاع ، في كل الامكنة ، الاستعاضة عن العوامل $\bar{\varphi}_{e1}$, \bar{Q}_{e1} , \bar{B} بالقيمة المعلومة
 \bar{P} وبذلك يتم التوصل للنتائج الموجودة في العمود الاخير من الجدول . بعد الانتهاء من العمليات
الحسابية يصبح ، على سبيل المثال ، الميل على خط إنعطاف الجائز عند نقطة الاستناد b
بالشكل التالي :

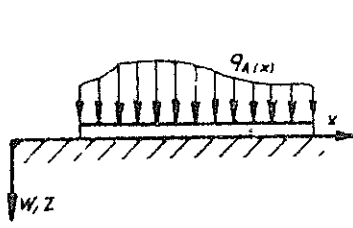
$$\varphi_b = \bar{\varphi}_b = \bar{\varphi}_{a3} = \bar{\varphi}_{a4} = - 0,0817$$

ملاحظات على تقنية الحساب :

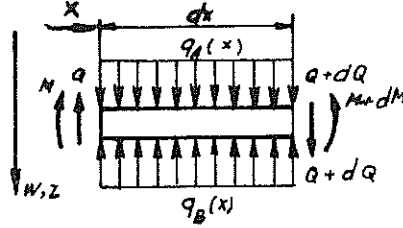
يتطلب الضرب الماتريسي القيام بعمليات الضرب والجمع بصورة مستمرة ، فاذا استغمت لهذه
الغاية آلة حاسبة كهربائية فلا حاجة للكتابة اكثر مما يحتوي هذا الجدول (فلقد صمم الجدول
لهذه الغاية) أما اذا لم تتوفر في متناول اليد إلا مسطرة حاسبة فقط فلا مفر من الكتابة
الجانبية . ان اسرع طريقة لحساب الجيزان المعقدة جداً هي الطريقة الماتريسية في حالة توفر
حاسب الكتروني (وهذا ما يستخدم بكثرة في الوقت الحاضر) فبفضلها يزول كل عمل كتابي .

٤ - ١٢ الجائز ذو الاستناد المرن (ذو الاضطجاع المرن)

إذا استند جائز مستقيم استناداً مرناً ، عندئذ تتألف الجولة الكلية التي تؤثر على الجائز من حدين أولهما q_A ويمثل الجولة الموزعة التي تؤثر من الخارج وثانيهما q_B ويمثل الجولة الموزعة التي يعيدها الاستناد .



شكل 9-48



شكل 9.49

بمقارنة الاشكال (9.48) ، (9 49) مع بعض ينتج :

$$q = q_A - q_B \quad (9-49)$$

بتبديل هذه العلاقة في المعادلة (9 19) يتم الحصول ، من اجل الاستناد المرن، على العلاقة التالية:

$$(EIw'')'' + q_B(x) = q_A(x) \quad (9-50)$$

تتعلق الجولة الموزعة q_B من الخواص المرنة للاستناد ومن انتقال الجائز $w(x)$ ومن شكل سطح التماس بين الجائز والاستناد . في بعض الحالات يمكن استخدام تقريب بسيط جداً ولكنه يصلح للاستعمال ، هكذا :

$$q_B = k w \quad (9-51)$$

(تعتبر هذه العلاقة أكثر العلاقات استخداماً وتفترض ان الانتقال الشاقولي والجولة الموزعة تتناسب طردياً مع بعض) . حيث ان k هو ثابت الاستناد (ثابت الاضطجاع ، عدد الاستناد). بتطبيق هذه الفرضية فان المعادلة التفاضلية للجائز ذو الاستناد المرن (ذو الاضطجاع المرن) تأخذ الشكل التالي :

$$(EIw'')'' + kw = q_A \quad (9-52)$$

بمعرفة الانتقال الشاقولي لها يتم تعيين قيم القطع وذلك باستخدام العلاقات (9.18) و (9.19) .

مثال 126 :

يستند الجائز الممثل في الشكل (9 50) على نابض تبعد عن بعضها نفس المسافة (الصغيرة) بحيث يمكن الكتابة $k = N \cdot c / l$.
المعطى :

$$q_A = q_0 = \text{const.} , \quad EI = \text{const.} , \quad k = \frac{N \cdot c}{l}$$

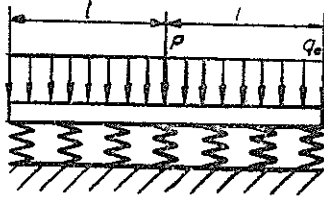
المطلوب : حساب الانتقال الشافولي $w(x)$.

الحل :

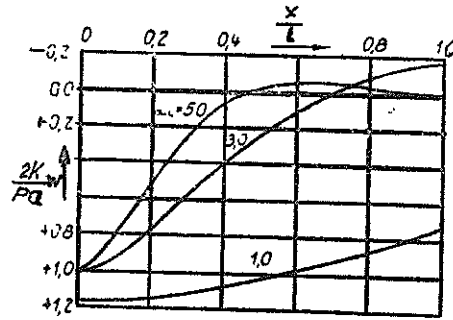
تأخذ المعادلة التفاضلية (9 52) عندما تكون $EI = \text{const}$ الشكل التالي :

$$w'''' + \frac{k}{EI} w = \frac{q_0}{EI}$$

(هذه المعادلة تمثل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الرابعة) .



شكل 9.50



شكل 9 51

باستخدام الاختصار التالي :

$$\frac{k}{EI} = \alpha^4$$

يصبح حل المعادلة التفاضلية السابقة ، هكذا :

$$w = C_1 \cos h \alpha x \cos \alpha x + C_2 \cosh \alpha x \sin \alpha x + \\ + C_3 \sin h \alpha x \cos \alpha x + C_4 \sinh \alpha x \sin \alpha x + \frac{q_0}{k}$$

(يتم التأكد من صحة هذه النتيجة بالتعويض في المعادلة التفاضلية) .
شروط الاطراف (x تبدأ من المنتصف) :

$$w'(x=0) = 0 \quad , \quad Q(x=0) = + \frac{1}{2} P \quad , \quad M(x=l) = 0 \quad , \quad Q(x=l) = 0$$

بتحقيق حل المعادلة التفاضلية لشروط الاطراف وبالأستعانة بالعلاقات (9.17) , (9.18) يتم التوصل لأربعة معادلات ، يعطي حلها قيم ثوابت التكامل :

$$C_1 = + \frac{P}{8\alpha^3 EI} \frac{\cosh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l}{\cosh \alpha l \sinh \alpha l + \cos \alpha l \sin \alpha l}$$

$$C_2 = + \frac{P}{8\alpha^3 EI}$$

$$C_3 = - \frac{P}{8\alpha^3 EI}$$

$$C_4 = - \frac{P}{8\alpha^3 EI} \frac{\sinh^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l}{\cosh \alpha l \sinh \alpha l + \cos \alpha l \sin \alpha l}$$

بإدخال ما يلي :

$$\frac{P}{8\alpha^3 EI} = \frac{P\alpha}{2k}$$

في حل المعادلة التفاضلية بعين الاعتبار وتبديل الثوابت يتم الحصول على علاقة الانتقال الشاقولي التالية :

$$w = \frac{q_0}{k} + \frac{P\alpha}{2k} [$$

$$\frac{(\cosh^2 \alpha l + \cos^2 \alpha l) \cosh \alpha x \cos \alpha x - (\sinh^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l) \sinh \alpha x \sin \alpha x}{\cosh \alpha l \sinh \alpha l + \cos \alpha l \sin \alpha l}$$

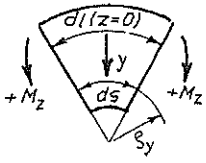
$$+ \cosh \alpha x \sin \alpha x - \sinh \alpha x \cos \alpha x]$$

لزيادة الإيضاح فلقد تم في الشكل (9.51) تمثيل منحنيات $w(x)$ التابعة للقيم $\alpha l = 1, 0, 3, 0, 5, 0; q_0 = 0$.
ليلاحظ انه في حالة الامتداد (الاضطجاع) القاسي (harter Bettung) (بالنسبة لصلابة الجائز) (هذا يعني انه عندما تكون قيم αl كبيرة) فان التغيرات الكبيرة تظهر على مقربة من الجولة فقط .

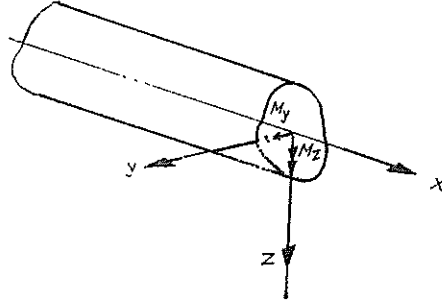
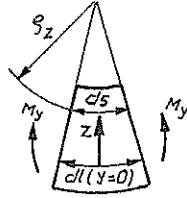
٩ - ١٣ الانعطاف المنحرف للقضبان الموشورية

تصلح الفقرات السابقة (٩ - ١ حتى ٩ - ١٣) لحساب التغيرات في حالة الانعطاف المستقيم أما الآن فسوف تتم دراسة الانعطاف المنحرف للقضبان الموشورية . تتفق علاقات هذا الفصل مع العلاقات المقابلة لها التي تتضمنها الفقرة ٩-١ باختلاف واحد هو ان مجموعة المحاور الاحداثية z, y لا تحتاج لان تكون هنا محاور عطالة رئيسية .

المقطع $z=0$



المقطع $y=0$



شكل 9.52

حسب الشكل (9.52) تصلح :

من أجل $y=0$ العلاقة التالية :

$$dl (y = 0) = ds \left(1 + \frac{z}{\rho_z} \right)$$

ومن أجل $z=0$ تصلح العلاقة الآتية :

$$dl (z = 0) = ds \left(1 + \frac{y}{\rho_y} \right)$$

أما من أجل أية محاور احداثية z, y فتصلح العلاقة التالية :

$$dl = ds \left(1 + \frac{y}{\rho_y} + \frac{z}{\rho_z} \right) \quad (9-53)$$

التغير النسبي الطولي (التمدد) :

$$\epsilon_x = \frac{dl - ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 = \frac{y}{\rho_y} + \frac{z}{\rho_z} \quad (9-54)$$

الاجهاد (قانون هوك) :

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \left(\frac{v}{\rho_y} + \frac{z}{\rho_z} \right) \quad (9-55)$$

عزوم الانعطاف :

$$M_y = + \int \int_F \sigma_x z dF = + E \left[\frac{1}{\rho_y} \int \int_F y z dF + \frac{1}{\rho_z} \int \int_F z^2 dF \right] \quad (9-56a)$$

$$M_z = + \int \int_F \sigma_x y dF = E \left[\frac{1}{\rho_y} \int \int_F y^2 dF + \frac{1}{\rho_z} \int \int_F y z dF \right] \quad (9-56b)$$

بحل هاتين المعادلتين بالنسبة للقيم $1/\rho_z$, $1/\rho_y$ يتم التوصل للعلاقات التالية :

$$+ \frac{1}{\rho_y} = \frac{-M_y I_{yz} - M_z I_{yy}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (9-57a)$$

$$+ \frac{1}{\rho_z} = \frac{+M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (9-57b)$$

حيث ان I_{yz} , I_{zz} , I_{yy} هم عزوم العطالة للسطح F وهي قيم معلومة .

ان العلاقات السابقة هي معادلات خط الانعطاف (الخط المرن) للقضيب الموشوري في حالة الانعطاف المنحرف وهي تتضمن داخلها على معادلة الانعطاف المستقيم (9.4) باعتباره حالة خاصة.

تعريف الانتقالات :

v هو انتقال محور القضيب بالاتجاه الموجب للمحور y و

w هو انتقال محور القضيب بالاتجاه الموجب للمحور z .

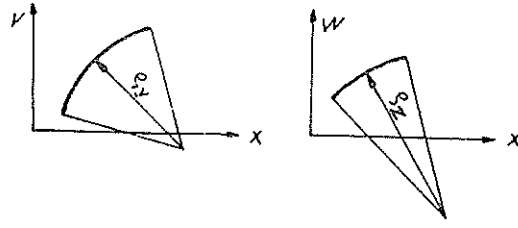
بهذا وحسب الشكل (9.52) ينتج الشكل (9.53) وبذلك ينتج :

$$v'' \approx - \frac{1}{\rho_y} = \frac{+M_y I_{yz} + M_z I_{yy}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (9-58a)$$

$$w'' \approx - \frac{1}{\rho_z} = \frac{-M_y I_{zz} - M_z I_{yz}}{E(I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2)} \quad (9-58b)$$

مثال 127 :

حمل جائز بارز (حامل بارز ، ظفر) مقطعه العرضي على شكل حرف L ، بمحمولة وحدة واحدة تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.54) .

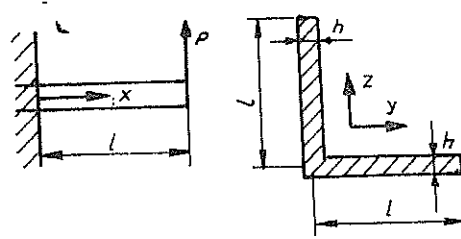


شكل 9.53

المعطى : الأبعاد حسب المخطط والحوالة P وعامل المرونة E .

المطلوب : حساب انتقال نقطة تأثير القوة P.

ملاحظة : القوة P تؤثر في مركز قص المقطع العرضي ، اي لا يتشكل في المقطع العرضي قتل. وكذلك تتحقق في المقطع العرضي $h < 1$.



شكل 9.54

الحل :

تثبت المحاور الاحداثية z , y كما يشير الشكل 9.54 .

عزوم الانعطاف :

$$M_y = - P (l - x) ; M_z = 0$$

عزوم العطالة :

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{5}{24} l^3 h ; I_{yz} = - \frac{3}{24} l^3 h$$

بذلك تأخذ المعادلات التفاضلية (9 58) الشكل التالي :

$$v'' = + \frac{9}{2} \frac{P}{E l^3 h} (l - x) ; w'' = + \frac{15}{2} \frac{P}{E l^3 h} (l - x)$$

شروط الاطراف :

$$v'(x=0) = 0 ; v(x=0) = 0 ; w'(x=0) = 0 ; w(x=0) = 0$$

تعطي مكاملة المعادلات التفاضلية ، بعد تحقيقها لشروط الاطراف ، النتائج التالية :

$$v = + \frac{9}{2} \frac{P}{E l^3 h} \left[\frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]$$

$$w = + \frac{15}{2} \frac{P}{E l^3 h} \left[\frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]$$

من هذه العلاقات يتم التوصل ، بعد تبديل $x=l$ ، الى انتقال نقطة تطبيق القوة :

$$v_p = + \frac{9}{2} \frac{P l^3}{3 E l^3 h} = + \frac{9}{2} \frac{P}{3 E h}$$

$$w_p = + \frac{15}{2} \frac{P l^3}{3 E l^3 h} = + \frac{15}{2} \frac{P}{3 E h}$$

من هذه النتيجة يتبين ان الانتقال الناضمي على مستوي التحميل والانتقال باتجاه المحولة هما من نفس المرتبة . للمقارنة سوف يتم حساب الانتقالات التي يعانها بروفيل فولاذي على شكل حرف T له نفس ابعاد المقطع العرضي السابق . بواسطة $I_{yy} = (5 \ 24) l^3 h$ يتم التوصل للقيم التالية :

$$w_p = \frac{24}{5} \frac{P l^3}{3 E l^3 h} = \frac{24}{5} \frac{P}{3 E I} ; v_p = 0$$

بتقسيم انتقالي المقطعين العرضيين بالاتجاه z على بعض يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{15}{2} : \frac{24}{5} = \frac{25}{16}$$

٩ - ١٤ الانعطاف المستقيم في القضبان المنحنية

فيما يلي سوف تتم دراسة جائز تتناظر فيه كافة الابعاد الهندسية والحولات المؤثرة عليه بالنسبة لمستوي واحد كما وان خطه المركزي يرسم في المستوي المذكور قوساً دائرياً نصف قطره R_2 . ليكون المقطع العرضي للقضيب المدروس ثابت باتجاه ψ . يشير الشكل (9.55) الى عنصرين

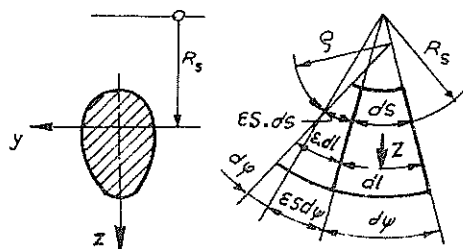
أحدهما قبل التغير (قبل تطبيق الحولة) وثانيها بعد التغير (بعد تطبيق الحولة) . من هذا الشكل يتبع التوصل للعلاقة التالية :

$$d l = (R_s + z) d \psi$$

$$\epsilon d l = \epsilon_s (R_s + z) d \psi + z d \varphi$$

منها ينتج :

$$\epsilon = \epsilon_s + \frac{d}{d\psi} \frac{z}{R_s + z} \quad (9-59)$$



شكل 9.55

أما قانون هوك فيأخذ ، بعد إدخال العلاقة (9 59) فيه بعين الاعتبار ، الشكل التالي :

$$\sigma = E \epsilon = E \epsilon_s + E \frac{d\varphi}{d\psi} \cdot \frac{z}{R_s + z} \quad (9-60)$$

ردود أفعال القطع (قيم القطع) :

$$N = + \int_F \sigma dF = E \epsilon_s \int_F dF + E \frac{d\varphi}{d\psi} \int_F \frac{z}{R_s + z} dF \quad (9-61)$$

$$M = + \int_F \sigma z dF = E \epsilon_s \int_F z dF + E \frac{d\varphi}{d\psi} \int_F \frac{z^2}{R_s + z} dF \quad (9-62)$$

ان النقطة ذات الاحداثيات $z=0$, $y=0$ هي مركز ثقل سطح المقطع العرضي F . من اجلها تصلح العلاقة التالية :

$$\int_F z dF = 0 \quad (العزم الستاتيكي)$$

علاوة على ذلك ورغبة في الاختصار سوف يتم اجراء الاختصار التالي :

$$\int_F \frac{z^2}{1 + \frac{z}{R_s}} dF = Y \quad (9-63)$$

بذلك ينتج :

$$\int_F \frac{z}{R_s + z} dF = \frac{1}{R_s} \int_F \frac{z (R_s + z) - z^2}{R_s + z} dF = - \frac{Y}{R_s^2}$$

بعد اخذ هذه المعادلات بعين الاعتبار وبعد حل العلاقات (9 61) , (9 62) بالنسبة للقيم ϵ_s و $d\phi/d\psi$ يتم التوصل للنتيجة التالية :

$$\frac{d\phi}{d\psi} = + \frac{M}{E Y} R_s \quad (9-64)$$

$$\epsilon_s = + \left(N + \frac{M}{R_s} \right) \frac{1}{EF} \quad (9 65)$$

بتبديل هذه العلاقات في العلاقة (9.60) يتم التوصل لمعادلة الاجهاد :

$$\sigma = \left(N + \frac{M}{R_s} \right) \frac{1}{F} + \frac{M}{Y} \frac{z}{1 + \frac{z}{R_s}} \quad (9-66)$$

لحساب نصف قطر الانحناء ρ للحالة المتغيرة سوف يعاد النظر في الشكل (9.55) ثانية :

$$(1 + \epsilon_s) ds = R_s (1 + \epsilon_s) d\psi = \rho (d\psi + \epsilon_s d\psi + d\phi)$$

من هذه العلاقة وبواسطة :

$$\epsilon_s < 1$$

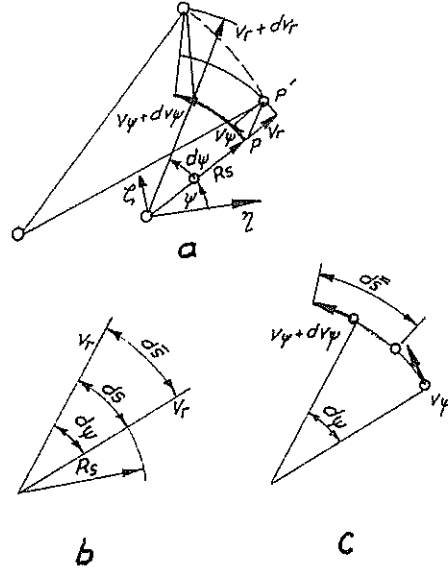
يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_s} \left(1 + \frac{d\phi}{d\psi} \right) \approx \frac{1}{R_s} + \frac{M}{E Y} \quad (9-67)$$

نتيجة للتحميل فان القضيب المنحني سوف يعاني تغييراً يؤدي لان تنتقل نقطة ما منه وتكون النقطة P والواقعة على الخط المركزي بالاتجاهين ψ , r (شكل 9.56 a) .
الانتقال بالاتجاه القطري او بالاحرى بالاتجاه z .

v_ψ الانتقال بالاتجاه ψ .

ان v_r وكذلك أيضاً v_ψ تتعلق من ψ فقط .



شكل 9.56

ان احداثيات النقطة P' هي :

$$\eta = + (R_s + v_r) \cos \psi - v_\psi \sin \psi \quad (9.68)$$

$$\zeta = + (R_s + v_r) \sin \psi + v_\psi \cos \psi$$

يرسم تتابع النقطة p' المحور المركزي المتغير ، الذي يحسب نصف قطار انحناءه $1/\rho$ حسب القاعدة المعروفة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\eta} \ddot{\zeta} - \ddot{\eta} \dot{\zeta}}{(\dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)^{3/2}} \quad , \quad ()' = \frac{d()}{d\psi} \quad (9.69)$$

بتبديل العلاقة (9.68) في العلاقة (9.69) يتم الحصول على علاقة معقدة . لكن اذا ماروعيت فيها حقيقة كون $R_s \gg v_\psi, v_r$ (تغيرات صغيرة) ثم اهملت لهذا السبب القيم ذات الاس العالي (ذات القوة العالية) من v_ψ, v_r ومشتقاتها فانه ينتج :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_s} \frac{1 + \frac{1}{R_s} (2 v_r - \ddot{v}_r + 3 \dot{v}_\psi)}{\left[1 + \frac{2}{R_s} (v_r + \dot{v}_\psi)\right]^{3/2}}$$

بالاستعانة بمنشورة أسية من أجل المخرج دبعد ايقافها يتم الحصول من العلاقة السابقة على العلاقة الآتية

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R_s} \left[1 + \frac{1}{R_s} (2 v_r - \ddot{v}_r + 3 \dot{v}_\psi)\right] \cdot \left[1 - \frac{3}{R_s} (v_r + \dot{v}_\psi)\right] \approx \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_s^2} (v_r + \dot{v}_r) \quad (9-70)$$

بمقارنة هذه العلاقة مع العلاقة (9.67) يتم التوصل الى معادلات تفاضلية من أجل V_r يعبر عنها بالشكل التالي :

$$\ddot{v}_r + v_r = - \frac{M R_s^2}{EY} \quad (9-71)$$

يأخذ المحور المركزي المتغير (بعد التغير) انحناء جديداً يختلف عن الانحناء قبل التغير وكذلك يأخذ طولاً جديداً يختلف عن طول المحور المركزي غير المتغير (قبل التغير) . حسب الشكل (2.50) فإن انتقالاً ما يسبب (تمدداً) تغيراً نسبياً طويلاً يبلغ :

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{d \bar{s} - ds}{ds} = \frac{(R_s + v_r) d\psi - R_s d\psi}{R_s d\psi} = \frac{v_r}{R_s}$$

كما يسبب الانتقال v_ψ التغير النسبي الطولي (التمدد) التالي :

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{d \bar{s} - ds}{ds} = \frac{(ds + dv_\psi) - ds}{ds} = \frac{1}{R_s} \frac{dv_\psi}{d\psi}$$

(بما أن مفعول التغير dv_r هو من المرتبة الثانية اذاً فهو صغير ولذلك يمكن إهماله) . يبلغ التمدد الطولي الكلي ، التغير النسبي الطولي الكلي (القيمة التالية) :

$$\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_s + \bar{\varepsilon}_s = \frac{1}{R_s} (v_r + \dot{v}_\psi) \quad (9.72)$$

بمقارنة هذه المعادلة مع العلاقة (9.65) ينتج :

$$\dot{\psi} = + \left(N + \frac{M}{R_s} \right) \frac{R_s}{EF} - v_r = \frac{dv_\psi}{d\psi} \quad (9.73)$$

بواسطة العلاقاتين (9.71) ، (9.73) تشكل معادلتين لحساب v_ψ ، v_r .

مثال 128 :

حمل جائز حلقي (حامل حلقي) بخمسة حمولات وحيدة تبلغ قيمة كل منها $2P$ وذلك كما يشير الشكل (9.57) .

المعطى : R_s ، EY ، EF ، n حمولة متساوية يبلغ كل منها $2P$ وتبعد الواحدة عن الأخرى بالمسافة الزاوية $\alpha = 2\pi/n$ (يصلح الشكل 9.57 من أجل $n=5$) .
المطلوب : حساب ردود أفعال القطع (قيم القطع) والاتصالات .

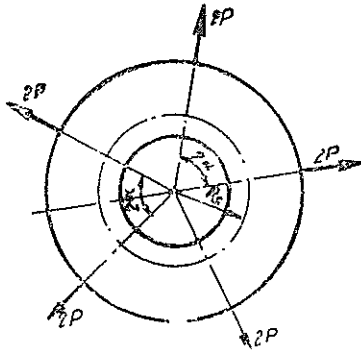
الحل :

بسبب التناظر تكفي دراسة الجزء الذي يتحدد بواسطة الزاوية $0 \leq \psi \leq \alpha$ فقط (شكل 9.58) ، وبسبب التناظر تنعدم القوى العرضية عند النقاط $\psi=0$ ، $\psi=\alpha$. يعطي تطبيق شروط التوازن على الجملة الجزئية الممثلة في الشكل (9.58) العلاقات التالية :

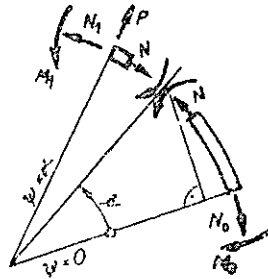
$$+ P \sin \alpha + N_1 \cos \alpha - N_0 = 0$$

$$+ P \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0$$

$$+ M_1 - M_0 - N_0 R_s (1 - \cos \alpha) = 0$$



شكل 9.57



شكل 9.58

منها ينتج :

$$N_1 = + P \cot \alpha \quad ; \quad M_1 = M_0 + PR_s \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$N_0 = + P \frac{1}{\sin \alpha} \quad , \quad M_0 \quad (\text{قيمة غير مقررة مستاتيكية})$$

كما يعطى تطبيق شروط التوازن على الجزء المقطوع المشار اليه في الشكل (9.58) العلاقات الآتية :

$$N = N_0 \cos \psi \quad ; \quad M = + N_0 R_s (1 - \cos \psi) + M_0$$

بذلك تأخذ المعادلات (9.71) و (9.73) شكلها الجديد :

$$\bar{v}_r + v_r = - \frac{R_s}{EY} \left[\frac{M_0}{R_s} + N_0 (1 - \cos \varphi) \right]$$

$$\dot{V} \psi = + \frac{R_s^3}{EF} \left[\frac{M_0}{R_s} + N_0 \right] - v_r$$

ان الحل العام للمعادلة التفاضلية الاولى هو :

$$v_r = - \frac{R_s^3}{EY} \left[D \cos \psi + B \sin \psi - \frac{1}{2} N_0 \psi \sin \psi + \left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) \right]$$

بتبديل هذه النتيجة في المعادلة التفاضلية الثمانية ومن ثم مكاملتها ينتج ما يلي :

$$V_\psi = + \frac{R_s}{EF} \left[\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) \psi + C \right] + \frac{R_s^3}{EY} .$$

$$. \left[D \sin \psi - B \cos \psi - \frac{1}{2} N_0 (\sin \psi - \psi \cos \psi) + \left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) \psi \right]$$

بتحقيق العلاقات السابقة لشروط الاطراف التالية :

$$v_r (\psi = 0) = v_r (\psi = \alpha) = 0 \quad ; \quad v_\psi (\psi = 0) = v_\psi (\psi = \alpha) = 0$$

يتم التوصل للمعادلات الاربعة الآتية :

$$\begin{aligned} + B &= 0 \\ -D \sin \alpha + B \cos \alpha &= + \frac{1}{2} N_0 (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$-B + \Phi C = 0$$

$$+D \sin \alpha - B \cos \alpha + \Phi C + \alpha \left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) = + \frac{1}{2} N_0 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

لقد تم في المعادلة السابقة استخدام الاختصار $\Phi = Y/FR^2$ بحل مجموعة المعادلات الخطية السابقة يتم التوصل للنتيجة التالية :

$$D = - \frac{1}{2} N_0 (1 + \alpha \operatorname{ctg} \alpha) ; B = C = 0$$

$$\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) = \frac{N_0}{1 + \Phi} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

بتعويض هذه النتائج في علاقات حساب v_r ، v_ψ يتم أخيراً التوصل الى علاقات الانتقالات النهائية :

$$v_r = + \frac{PR_s^3}{2EY} \frac{1}{\sin \alpha} \left[\psi \sin \psi + \cos \psi (1 + \alpha \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{2}{1 + \frac{Y}{FR_s^2}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right]$$

$$v_\psi = + \frac{PR_s^3}{2EY} \left[\frac{\psi}{\alpha} \left(2 + \alpha \frac{\cos \psi}{\sin \alpha} \right) - \frac{\sin \psi}{\sin \alpha} (2 + \alpha \operatorname{ctg} \alpha) \right]$$

أما ردود أفعال القطع (قيم القطع) فتبلغ :

$$N = N_0 \cos \psi = + P \frac{\cos \psi}{\sin \alpha}$$

$$M = + N_0 R_s (1 - \cos \psi) + M_0 = R_s \left[\left(N_0 + \frac{M_0}{R_s} \right) - N_0 \cos \psi \right] =$$

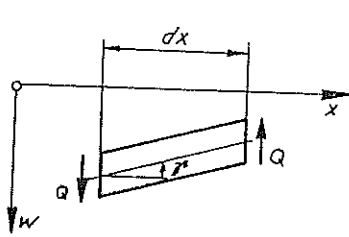
$$= + PR_s \left[\frac{1}{1 + \frac{Y}{FR_s^2}} \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \psi}{\sin \alpha} \right]$$

٩ - ١٥ بعض المزايا الخاصة في الانعطاف

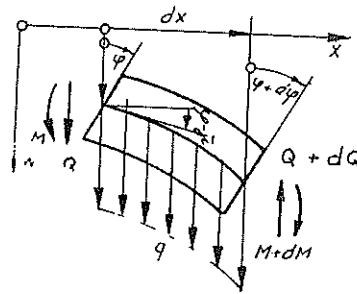
سوف يتم في هذه الفقرة التعرض لبعض الحالات الخاصة التي لا تصلح من أجلها معادلات الانعطاف المدروسة فيما سبق وكذلك التعرض لبعض الحالات الخاصة التي تحتاج من أجلها تلك المعادلات لبعض التعديلات .

٩ - ١٥ - ١ القضيبي القصير - تأثير التغير القصي

ان الفرضية التي تم استخدامها في كل الفقرات السابقة لهذا الفصل والتي تنص على بقاء المقاطع العرضية مستوية وناعلمية على محور القضيبي هي صحيحة فقط عندما تنعدم القوة العرضية (لا توجد قوة عرضية) . حسب الفصل 10 ينتج عن القوة العرضية Q وضع مائل وسطي للمقاطع العرضي (انزلاق وسطي للمقطع العرضي) بالنسبة لمحور القضيبي . يشير الشكل (9-59) الى التغير القصي الصافي الذي يندر أن يظهر لوحده . أما الشكل (9.60) فيشير الى التغير الكلي الذي يقوم به العنصر dx نتيجة تأثير الانعطاف والقص (ينبغي المقارنة بينه وبين تغير الانعطاف الصافي حسب الشكل 9-51).



شكل 9-59



شكل 9.60

بعد افتراض انعطاف مستقيم تصلح المعادلات التالية :

حسب المعادلة (9.4) والاشكال (9.1) , (9.60) ينتج :

$$\frac{M}{EI} = + \frac{1}{\rho} = + \frac{d\phi}{ds} \approx \frac{d\phi}{dx} = \phi' \quad (9-74)$$

بالاستعانة بالشكل (9.60) ينتج كذلك ايضاً :

$$w' = \frac{dw}{dx} = - \phi + \bar{\gamma} \quad (9-75)$$

وباعتبار المعادلة التالية :

$$\bar{\gamma} = \frac{Q}{GF_s} \quad (9-76)$$

يتم التوصل لما يلي :

$$\frac{Q}{GF_s} = \bar{\gamma} = \varphi + w' \quad (9.77)$$

في حالة كون ردود الافعال M , Q معلومة فإن العلاقتين (9.74) , (9.77) تشكل معادلتين لتعيين φ , w كتابع للمتغير x . ينبغي مراعاة الانتباه الى صلاحية $w' \neq \varphi$ في حالة ادخال التغير القصي بعين الاعتبار . باختزال φ من العلاقتين (9.74) , (9.77) ينتج :

$$w'' = - \frac{M}{EI} + \left(\frac{Q}{GF_s} \right)' \quad (9.78)$$

مثال 129 :

أثرت على النهاية الحرة لجائز بارز (حامل بارز ، ظفر) قوة وحيدة P (شكل 9.61) .
المعطى : l , b , h , $E=2(1+\mu)G$, P .

المطلوب : حساب

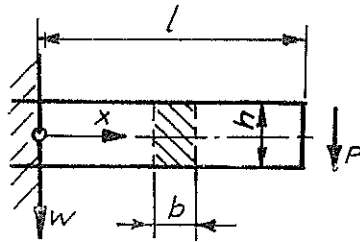
١ - انتقال الخط الاوسط (المحور الاوسط للقصيب) $w(x)$.

٢ - ميل المقاطع العرضية $\varphi(x)$.

وذلك بعد ادخال التغير القصي بعين الاعتبار .

الحل :

ستتم في هذا المثال دراسة تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w .
قيم القطع (ردود افعال القطع) (شكل 9.60) :



شكل 9.61

$$Q = +P \quad ; \quad M = -P(l-x)$$

بعد تبديل قيم القطع في المعادلة التفاضلية (9.74) يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\varphi = -\frac{P}{EI} \left[lx - \frac{1}{2} x^2 + C_1 \right]$$

أما المعادلة (9.77) فتؤدي ، بعد تبديل قيم القطع فيها ، للنتيجة التالية :

$$w = \int w' dx = -\int \varphi dx + \int \frac{Q}{GF_s} dx = w_B + w_s$$

حيث أن w_B هو الانتقال الشاقولي الناتج عن الانعطاف (الحد الناتج عن الانعطاف) .
أما w_s فهو الانتقال الشاقولي الناتج عن التأثير القصي . (الحد الناتج عن القوة العرضية) .
بعد مكاملة العلاقة ينتج :

$$w = +\frac{P}{EI} \left[\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2 \right] + \frac{Q}{GF_s} x$$

شروط الاطراف :

$$w(x=0) = 0 \quad ; \quad C_2 = 0$$

$$\varphi(x=0) = (w'(x=0)) = 0 \quad ; \quad C_1 = 0$$

النتائج :

$$w(x) = \frac{Pl^3}{2EI} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] + \frac{Pl}{GF_s} \left(\frac{x}{l}\right) +$$

$$= \frac{Pl^3}{2EI} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{2EI}{GF_sl^2} \left(\frac{x}{l}\right) \right]$$

$$\varphi(x) = -\frac{Pl^2}{EI} \left[\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$$

من أجل المقطع العرضي مستطيل الشكل يبلغ تأثير التغير القصي :

$$\frac{2EI}{GF_sl^2} = \frac{2}{5} (1+\mu) \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

تعطي القيمة السابقة تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w وتأخذ قيمة مذكورة لا يستهان

بها ولا يجوز إهمالها عندما تكون h/l صغيرة جداً . من العلاقة السابقة يتم التوصل للنتيجة التالية :

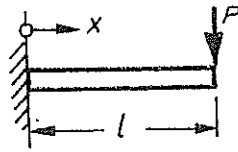
يأخذ التغير القصي في القضبان القصيرة قيمة لا يستهان بها

مثال 130 :

حمل جائز بارز (حامل بارز، ظفر) بحمولة وحيدة P تؤثر على نهايته الحرة (شكل 9.62). يتألف المقطع العرضي للجائز إما من مستطيل أو من بروفيل على شكل حرف I .

المعطى : أبعاد المقطعين العرضيين المذكورين E, P .

المطلوب : المقارنة بين تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w للمقطعين العرضيين ، المستطيل الشكل والبروفيل على شكل حرف I .



شكل 9.62

الحل :

بعد ان تمت دراسة المعادلة الكلاسيكية ليل المماس على خط الانعطاف $w' = -\varphi$ دراسة مفصلة ينبغي الآن العودة الى البداية مرة ثانية وطرح السؤال حول التغير القصي . تحتفي وراء المعادلة التي تدخل تأثير التغير القصي بعين الاعتبار :

$$w' = -\varphi + \frac{Q}{GF_s} \quad (9.79)$$

مشكلتان هما أ - ماقيمة F_s من اجل مقطع عرضي مستطيل ومن اجل بروفيل بشكل حرف I او من اجل اي مقطع عرضي كيني .

ب - في حالة كون F_s معلومة فما هي قيمة تأثير التغير القصي على الانتقال الشاقولي w . تترك الاجابة على السؤال أ - للذين يرغبون التضلع والتعمق في حساب الانشاءات ولا داعي

في هذا الكتاب المخصص لطلاب العمارة الدخول في التفاصيل الدقيقة ، أما السؤال ب - فتم
الاجابة عليه كالتالي :

يتألف الانتقال الشاقولي الكلي من حد ناتج عن الانعاف w_B وحد آخر ناتج عن الانزلاق
الحد القصي w_s . اذ أن :

$$\gamma = \frac{Q}{GF_s}$$

هو الانزلاق الوسطي للمقطع العرضي . من اجل الجائز البارز يمكن تبديل قيم القطع
 $M = -P(l-x)$, $Q = +P = \text{const}$ وكذلك تبديل $GF_s = \text{const}$ في المعادلة (9.79) وبعد اجراء
المكاملات اللازمة ، يتم الحصول على معادلة الانتقال الشاقولي w_s وبتبديل $x=l$ فيها يتم التوصل
للانتقال الشاقولي لنهاية الحرة من الجائز :

$$f_s = \frac{Pl}{GF_s}$$

بذلك يبلغ الانتقال الشاقولي الكلي الأعظمي القيمة التالية :

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GF_s} = \frac{Pl^3}{3EI} \left[1 + \frac{3E}{G} \frac{F}{F_s} \left(\frac{i}{l} \right)^2 \right] = \frac{Pl^3}{3EI} \left(1 + \frac{C}{\lambda^2} \right)$$

يتعلق عامل التصحيح من نخافة الجائز $\lambda = \frac{i}{l} = \sqrt{\frac{1}{F}}$ i نصف قطر المعطالة) . اما C
فهو العامل الاول وهو يمثل الاختصار :

$$C = \frac{3E}{G} \frac{F}{F_s} \approx 8 \frac{F}{F_s}$$

من أجل المستطيل (ومن أجل كل البروفيلات الغليظة) تبلغ $\frac{F}{F_s} \approx 1,2$ (يمكن البرهان على هذه
القيمة عند الاجابة على الطلب أ -) ومن أجل بروفيل على شكل حرف I حيث يستعاض عن
 F_s بمساحة الجسد ، تبلغ (في حالة البرفيلات ذات الاجنحة العريضة) $\frac{F}{F_s} \approx 4$. بذلك تبلغ اذاً:
من أجل المستطيل (العرض b والارتفاع h) $C \approx 10$ من أجل بروفيل على شكل حرف I
(عرضه b وارتفاعه h) $C \approx 30$.
بالاستمانة بأنصاف أقطار المعطالة :

$i = \frac{h}{2 \sqrt{3}}$ للمستطيل و $i \approx 0,4 h$ للبروفيل على شكل حرف I يتم التوصل للقيم التالية :

$\lambda = 17$ (المستطيل) $\lambda = 12$ (للبروفيل على شكل حرف I) وبفضلها يتم التوصل للقيم التالية :

$$\frac{C}{\lambda^2} \approx 0,03 \quad (\text{المستطيل}) \quad \frac{C}{\lambda^2} = 0,20 \quad (\text{للبروفيل على شكل حرف I}) . \text{ من هذه}$$

العلاقة يتبين ان عامل التصحيح صغير ولكن دون شك لا يجوز اهماله في الجيزان البروفيلية .
بأخذ التغير القصي بعين الاعتبار ينبغي حينئذ في الجيزان التي تحتوي على عدة مجالات ، على سبيل المثال الجيزان المستمرة (شكل 9 63) ، التعبير عن شروط التحول (من مجال لمجال آخر) بشكل واضح :

ففي نقطة الالتحام (نقطة التقاء المجالين) تتحول الزاوية φ (عدا عن w) بشكل مستمر .
أما w' فتقفز كما يشير الشكل اللاحق عندما تقفز Q .



شكل 9.63

٩ - ١٥ - ٢ القضييب العريض - تأثير التقاوص العرضي

أثناء دراسة القضبان المنعطفة (المحملة على الانعطاف) التي تمت حتى الآن تم تمويض $\sigma_y = \sigma_z = 0$. بسبب توزيع الاجهاد الناظمي (في الانعطاف المستقيم البسيط ، أي بدون قوة ناظمية) حسب العلاقة :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_{yy}} z$$

ينتج حسب قانون هوك :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] = + \frac{M_y}{E I_{yy}} z$$

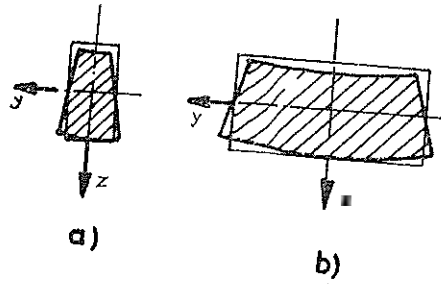
$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] = - \frac{\mu M_y}{E I_{yy}} z$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] = - \frac{\mu M_y}{E I_{yy}} z$$

هذه العلاقات تعني ان مقطعاً عرضياً مستطيل الشكل وليس عريضاً جداً يتغير حسب الشكل (9.64a). في حالة المقاطع العرضية العريضة جداً يمكن أن يتم التغير الاتجاه z بدون إعاقة، اما التغير بالاتجاه y فلا يمكن ان يتم بدون إعاقة. لذلك ينبغي في المقاطع العرضية ذات العرض الحدي (العريضة جداً) الانطلاق من الافتراض ان :

$$\epsilon_y = 0$$

(9-80)



شكل 9-64

بحيث يصبح $\sigma_y \neq 0$ اما افتراض $\sigma_z = 0$ فيمكن ، على العكس من ذلك ، الاحتفاظ به ، وبذلك ينتج :

$$\sigma_y = + \mu \sigma_z$$

(9-81)

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \mu^2) = + \frac{M_y}{E I_{yy}} (1 - \mu^2) z$$

(9-82)

تختلف هذه المعادلة التي تصلح من اجل المقاطع العرضية العريضة عن المعادلة التي تصلح من اجل المقاطع العرضية الضيقة بالعامل $(1 - \mu^2)$. ومنه ينتج :

يمكن ادخال تأثير إعاقة التقلص العرضي (في المقاطع العرضية العريضة) في الحساب بعين الاعتبار وذلك باستبدال عامل المرونة الفعلي E بعامل المرونة المستعاض :

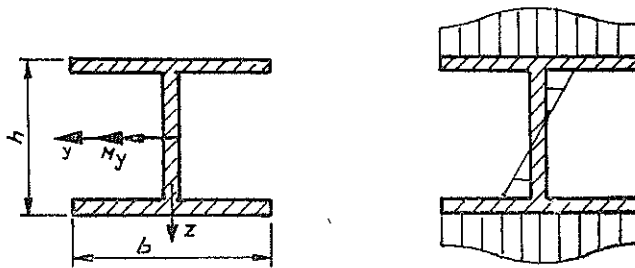
$$E^* = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

٩ - ١٥ - ٣ العرض المشارك في الحمل (العرض المساعد في الحمل)

ليكن القضيب المدروس محملاً على الانعطاف المستقيم وليكن مقطعه العرضي هو بروفيل على شكل I (شكل 9.65a) . حسب نظرية الانعطاف الأولية (elementaren Theorie) كان يعبر عن الاجهاد الناطمي في المقطع العرضي بواسطة العلاقة التالية :

$$\sigma_x = \frac{M_v}{I_{yy}} z$$

وهي تعني ان الاجهاد الناطمي σ_x في كامل جناح المقطع العرضي ثابت ($\sigma_x = \text{const}$) الا ان الدراسات الدقيقة اكدت عدم صحة ذلك الكلام من اجل المقاطع العرضية ذات الاجنحة العريضة (في الحالة الحدية عندما يكون $b \gg h$) كما تشير هذه الدراسات الى ان توزيع الاجهاد الناطمي σ_x هناك كما هو ممثل في الشكل (9.65 b) ، وهذا يعني ان جزء الجناح الذي يبعد عن الجسد هو في الحقيقة اقل اجهاداً مما يتم حسابه بواسطة النظرية الأولية المستعملة او بتعبير آخر (وذلك لوجوب احتفاظ عزم الانعطاف الكلي بقيمته) ، ان التحمل الاعظمي الفعلي للعناصر (للاعضاء) الحاملة ذات الاجنحة العريضة اكبر من التحمل الاعظمي المحسوب بواسطة نظرية الانعطاف الأولية . لتفادي هذه الفروق وادخالها بين الاعتبار يستعاض ، في الحساب ، عن عزم العطالة الفعلي بعزم العطالة الفعّال الذي يدخل في الحساب جزءاً من الجناح فقط (وليس كله) ، يسمى هذا الجزء بالعرض المشارك في الحمل (العرض المساعد على الحمل) (Die mittragende-Breite) . ان العرض المشارك في الحمل (المساعد في الحمل) هو دائماً اصغر من العرض الكلي وهو لا يتعلق فقط من المقطع العرضي وإنما يتعلق ايضاً من الجمولات ومن استناد الجائز اما حسابه فهو معقد جداً ولذلك لا يمكن ادخاله ضمن محتوى هذا الكتاب .



شكل 9.65

٩ - ١٥ - ٤ انعطاف الانابيب المنحنية

١٠ اعطاف انبوب منحني في مستوي انحناءه ، حسب الفقرة ٩ - ١٤ ، فالعلاقات المشتقة هناك لا تصلح إلا عندما يكون الانبوب سميك الجدار (ذو جدار سميك) لان الانبوب المنحني رقيق الجدار مرن اكثر بكثير مما يتم توقعه حسب نظرية الانعطاف الاولى المستعملة ، وهذا ناتج عن ان المقطع العرضي ذو الاصل الدائري الشكل يتحول بسبب اجهادات الانعطاف (الاجهادات الناعمة الناتجة عن الانعطاف) الى اهليلج (Oval) (شكل 9.66) . فبالرغم من ان التفلطح المذكور ضئيلاً (طفيفاً) لكنه يؤدي لنتائج كبيرة . بالاستعاضة عن المعادلة (9.67) بالعلاقة التالية :

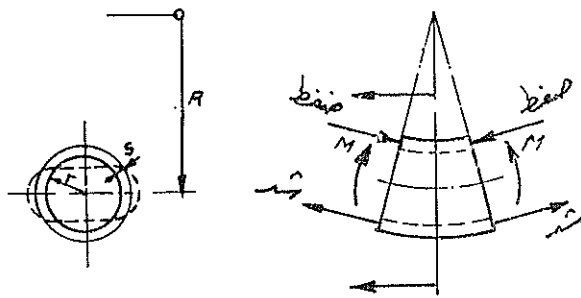
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{k} \frac{M}{EI}$$

حيث ان k هو عامل التصحيح ولا يمكن حسابه إلا بشكل تقريبي وكتابع للقيمة المعروفة λ فقط:

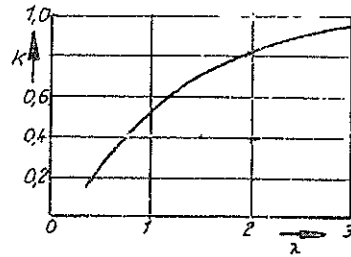
$$\lambda = \frac{R_s t}{a^2}$$

حيث ان :

R_s هو نصف قطر انحناء الخط الاوسط (المحور الاوسط) للانبوب غير المتغير (قبل التغير) و
 ρ هو نصف قطر انحناء الخط الاوسط (المحور الاوسط) للانبوب المتغير (بعد التغير) و
 t هي سماكة جدار الانبوب و
 a هو نصف القطر الاوسط لمقطع الانبوب العرضي (للمقطع العرضي للانبوب) .
 يعطي الشكل (9.67) بعض القيم المساعدة لعامل k .



شكل 9.67

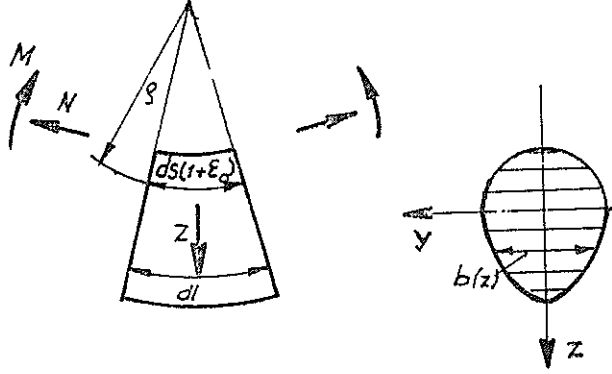


شكل 9.67

٩ - ١٥ - المواد غير المتجانسة

تصلح كل العلاقات التي تم اشتقاقها حتى الآن للمواد المتجانسة المتأثلة (المتشابهة) المناحي .
سيحاول الآن شرح العلاقات التي تصلح من أجل المواد غير المتجانسة بالاعتماد على مثال بسيط.
ليكن القضيب المدروس مستقيماً ومتناظراً بالنسبة للمحور $y=0$ وعامل مرونته E يتعلق من
المحور z (تابع للمحور z) وليكن القضيب محملاً بقوة ناظمية (قوة طولية) N وعزم انعطاف M .
يمكن هنا أيضاً (كما تم الفقرة 9.1) ، الافتراض ان المقاطع العرضية تبقى مستوية وناظمية ،
لكن ينبغي هنا عدم التوقع بان تبقى (كذلك أيضاً عندما يمثل $z=0$ مركز ثقل المقطع
العرضي) المحاور (الالياف) $z=0$ عديدة الاستطالة . كما لن يطالب بأن يكون

$$\int z dF = 0$$



شكل 9.68

من الشكل (9.68) يتم التوصل للعلاقة التالية :

$$\frac{dl}{\rho + z} = \frac{ds(1 + \epsilon_0)}{\rho}$$

أو :

$$\frac{dl}{ds} = (1 + \epsilon_0) \left(1 + \frac{z}{\rho}\right)$$

يبلغ التغير النسبي الطولي (التمدد) لنقطة ما من المقطع العرضي تقع على بعد z ، القيمة التالية:

$$\epsilon_z = \frac{dl - ds}{ds} = \frac{dl}{ds} - 1 = \epsilon_0 + \frac{z}{\rho} (1 + \epsilon_0) \quad (9.83)$$

أما قانون هوك للاجهادات الناعمة فيصالح هنا ايضاً، ولكن بتغير بسيط هو ان $E = E(z)$:

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \epsilon_0 + E \frac{z}{\rho} (1 + \epsilon_0) \quad (9-84)$$

ان ردود افعال القطع (قيم القطع) التي تعتبر محصلات للاجهاد هي :

$$N = \int \sigma_x dF = \epsilon_0 \int b E dz + (1 + \epsilon_0) \frac{1}{\rho} \int b E z dz \quad (9-85)$$

$$M = \int \sigma_x z dz = \epsilon_0 \int b E z dz + (1 + \epsilon_0) \frac{1}{\rho} \int b E z^2 dz \quad (9-86)$$

من المناسب ، هنا ، المطالبة بتحقيق العلاقات التالية :

$$\int b E z dz = \int E z dF = 0 \quad (9-87)$$

تمثل هذه المطالبة ما يشبه تثبيت مركز الثقل . بهذا الفرض يتم التوصل ، من العلاقة (9-85) الى تمدد المحور $z=0$:

$$\epsilon_0 = + \frac{N}{\int b E dz} = \frac{N}{\int E dF} \quad (9-88)$$

وحسب العلاقة (9-86) فان انحناء المحور المتغير $z=0$ (عندما تهمل $\epsilon_0 < 1$) يصبح :

$$\frac{1}{\rho} = + \frac{M}{\int b E z^2 dz} = \frac{M}{\int E z^2 dF} \quad (9-89)$$

عندما تكون التغيرات صغيرة ، يتم التوصل كالمعتاد للعلاقة التالية :

$$\frac{1}{\rho} = \pm w' \quad (9-90)$$

كما ان علاقة حساب الاجهاد الناعمة تأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_x = \frac{E N}{\int E dF} + \frac{E M_z}{\int E z^2 dF} \quad (9-91)$$

من هذه العلاقة يتبين ان الاجهاد الناطمي الذي تسببه القوة الناطمية N ليس ثابتاً (ليس ثابت التوزيع) على المقطع العرضي كما ان الاجهاد الناطمي الناتج عن عزم الانعطاف M ليس خطياً (ليس خطي التوزيع) على المقطع العرضي وذلك لكون $E=E(x)$.

تصلح العلاقات المستخرجة في هذه الفقرة ايضاً عندما يكون تابع عامل المرونة E غير مستمر .

التحويل القصي في الزمطاف (تبيغة لاقوة المرضية)

۱۰ - ۱ عمومیات

لقد تم في الفصل التاسع اشتقاق معادلات الانعطاف الصافي (reine Biegung) أو ما يسمى أيضاً بالانعطاف الخالي من القوة العرضية (querkraftfreie Biegung). عندما يكون طول الجائز (الحامل) بالنسبة لابعاد المقطع العرضي كبيراً فبالامكان أيضاً استخدام العلاقات المشتقة هناك لحساب اجهادات الانعطاف Biegespannungen. (أي الاجهادات الناطمية الناتجة عن الانعطاف) وذلك عندما تؤثر أيضاً قوة عرضية على الجزء المدروس من الجائز. تحسب الاجهادات المماسية التي تنشأ عن القوة العرضية (القوة القاطعة، قوة القص) بواسطة العلاقات التي سوف تستخرج في هذا الفصل، اما قيم الاجهادات الناطمية والاجهادات المماسية المحسوبة بهذه الطريقة فانها تنطبق بدقة مع القيم الفعلية ومع قيم التجارب.

١٠ - ٢ إجهادات المماسية في الانعطاف البسيط

ينبغي ان تتحقق في الجائز المدروس الصفات التالية :

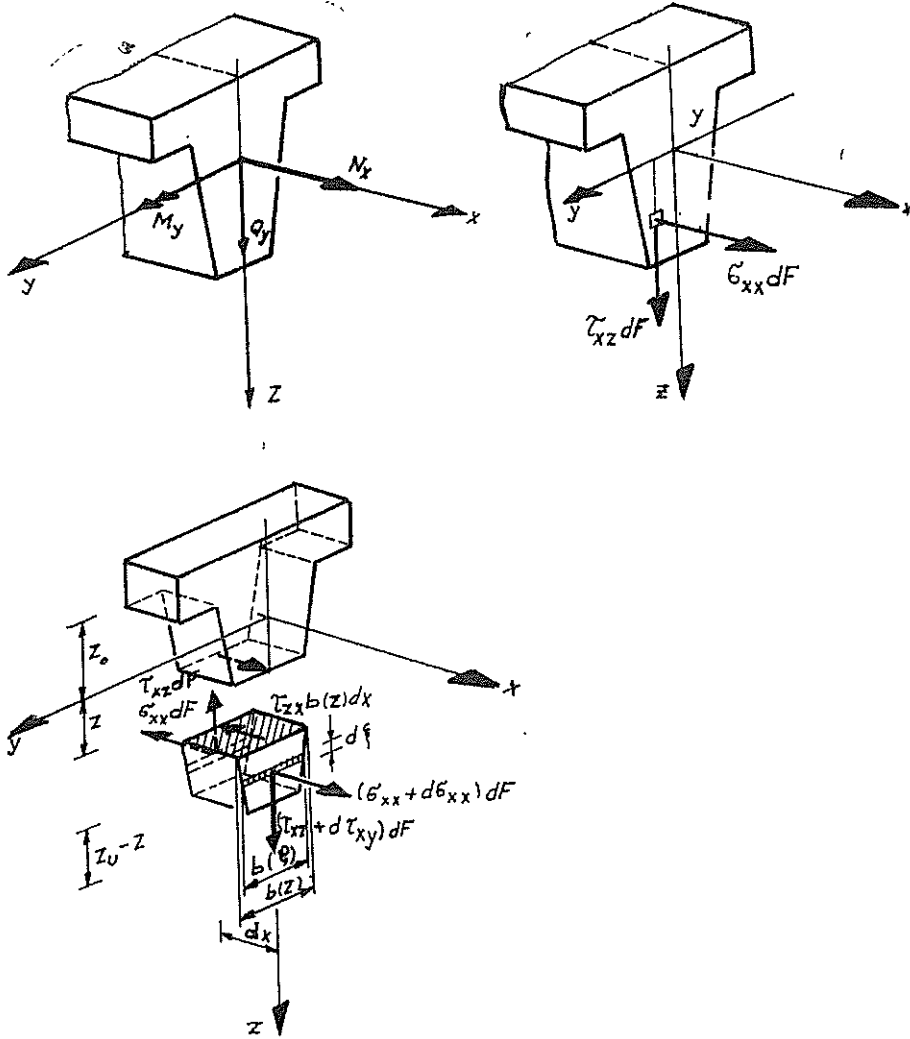
- ١ - المقطع العرضي باتجاه محور القضيب ثابت (القضيب موثوري) .
- ٢ - اتجاه القوة العرضية يوازي أحد المحاور الرئيسية للمقطع العرضي .
- ٣ - الاجهادات المماسية في المقطع العرضي تؤثر بموازاة القوة العرضية . لا ينطبق هذا الشرط بدة وخاصة على حافة المقاطع العرضية ذات الشكل الكيفي وذلك لان الاجهادات المماسية فيها تكون مماسية على منحنى الحافة) .
- ٤ - لا تتعلق الاجهادات المماسية الموجودة على الارتفاع $z = \text{const}$ من سطح المقطع بالمحور $x = \text{const}$. (تعني هذه الفرضية ان الحسابات التالية تعين القيمة الوسطية وان الاجهادات المماسية الاعظمية المتشكلة هي اكبر بقليل من هذه القيمة ويزداد الفرق كلما ازداد عرض المقطع العرضي) .

الان عدم اعتبار القوة العرضية $Q_z(x)$ التي تتشكل في الانعطاف العام (والذي

يسمى أيضاً بانعطاف القوة العرضية (Querkraftbiegung) واقتصر البحث على تعيين الاجهادات الناعمية $\sigma_{xx}(x,z)$ الناتجة عن القوة الطولية $N_x(x)$ وعزم الانعطاف $M_y(x)$ ، والان سوف يتم تعيين الاجهادات المماسية τ_{xz} التي تتشكل في كل جزء سطحي dF من المقطع العرضي F (شكل 10.1) والتي ترتبط بالقوة العرضية Q_z بواسطة العلاقة التالية :

$$Q_z = \int_F \tau_{xz} dF \quad (10-1)$$

(تعبر هذه العلاقة عن ان القوة العرضية في مقطع ما هي محصلة الاجهادات المماسية في ذلك القطع) .



شكل 10.1 و شكل 10.2

لتعيين الاجهاد المماسي سوف يشطر عنصر قضبي طوله dx بواسطة قطع طولي $z=const$ الى جزئين (شكل 10.2) كما سوف يفترض بان الاجهادات المماسية τ_{zx} لا تتعلق بالمحور y كما هو الحال بالنسبة للاجهادات الناعمية σ_{yy} ، عندئذ تؤثر على العنصر المقتطع الذي يبلغ مساحته F_0 ونتيجة للاجهادات الناعمية المعلومة :

$$\sigma_{xx}(x,z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z \quad (10-1)$$

القوى التالية :

$$\int_{F_a} \sigma_{xx} dF \quad , \quad \int_{F_a} (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) dF$$

ترافق الاجهادات المماسية τ_{xz} في المقطع العرضي $x=const$ والتي تسمى بالاجهادات المماسية العرضية (Querschubspannungen) الاجهادات المماسية الطولية $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x على العنصر المقتطع ينتج :

$$-\tau_{zx} b(z) dx - \int_{F_a} \sigma_{xx}(x,z) dF + \int_{F_a} [\sigma_{xx}(x,z) + d\sigma_{xx}(x,z)] dF = 0 \quad (10-2)$$

بالامكان ايضاً في العلاقة السابقة استخدام الكتابة التالية :

$$d\sigma_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

من العلاقة الناتجة عن شرط التوازن ، يتم في البداية التوصل من اجل الاجهادات المماسية للعلاقة التالية :

$$\tau_{zx} b(z) = \int_{F_a} \frac{d\sigma_{xx}(x,z)}{dx} dF \quad (10-3)$$

عندما يرمز لمسافة العنصر السطحي dF عن المحور y بالحرف ζ عندئذ ينتج :

$$\sigma_{xx}(x,\zeta) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} \zeta$$

وبعد اعتبار كل من العلاقتين :

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x)$$

و :

$$\frac{d\sigma_{xx}(x, \zeta)}{dx} = \frac{dM_y(x)}{dx} \frac{\zeta}{I_{yy}} = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \zeta$$

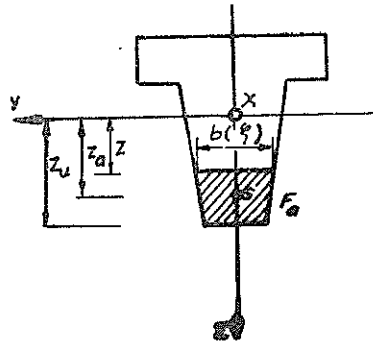
(I_{yy} لا تتعلق بالاحداثي x) ، يتم التوصل أخيراً لعلاقة الاجهاد المماسي التالية :

$$\tau_{xz} b(z) = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_{F_a} \zeta dF$$

يمثل التكامل في العلاقة السابقة العزم الستاتيكي :

$$S_{ya}(z) = \int_{F_a} \zeta dF = \int_z^{zu} \zeta b(\zeta) d\zeta = z_a F_a \quad (10-4)$$

لسطح العنصر القضيبي المقتطع F_a بالنسبة للمحور y (العزم الستاتيكي لسطح المشر المحصور بين الاحداثيين z, z_u بالنسبة للمحور y) (شكل 0.3) .



شكل 10.3

بالتبديل في العلاقة السابقة يتم التوصل للمعادلة التالية :

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(z)}{I_{yy} b(z)} \quad (10-5)$$

التي يتم بواسطتها الحصول على توزيع الاجهاد المماسي في المقطع العرضي $x = \text{const}$. حيث ان $\tau_{xz}(x, z)$ هو الاجهاد المماسي الواقع على الارتفاع z من المقطع العرضي الواقع على بعد x و

$Q_z(x)$ هي القوة العرضية في المقطع العرضي الواقع على بعد x (المقطع العرضي المدروس) و I_{yy} هو عزم عطالة المقطع العرضي (كامل المقطع العرضي) الواقع على بعد x (المقطع العرضي المدروس) و $S_{ya}(z)$ هو العزم الستاتيكي للسطح الممشر (او لسطح غير الممشر) من المقطع العرضي بالنسبة للمحور y (شكل 10.3) (وهو العزم الستاتيكي ، لسطح الواقع تحت او فوق الخط المطلوب حساب الاجهاد المماسي فيه ، بالنسبة للمحور y) .

$b(z)$ هو عرض المقطع العرضي الواقع على الارتفاع z وهو المكان الذي تحسب فيه الاجهادات المماسية . ان العلاقة (10.5) هي علاقة حساب الاجهاد المماسي ذو التوزيع المنتظم على طول المستقيم الافقي الموازي للمحور المركزي وهي علاقة تقريبية وتتحق بدقة (بشكل جيد) في المقاطع العرضية مستطيلة الشكل ذات الارتفاع الكبير والعرض الصغير ، أما النظرية الدقيقة فتشير الى ان قيمة الاجهادات المماسية على حواف المقطع العرضي مستطيل الشكل أكبر من قيمة الاجهادات المماسية في مركز ثقل المستطيل (حيث تقع نقاط الحواف المذكورة ومركز الثقل على مستقيم افقي واحد يوازي المحور y) . يزداد الفرق بين القيمة المحسوبة بواسطة العلاقة (10.5) وبين القيمة الفعلية كبراً كلما ازداد عرض المستطيل بالنسبة لارتفاعه . فكما تم التنويه عنه سابقاً فان قيم τ المحسوبة بواسطة العلاقة (10.5) لاتعني الا قيمة وسطية للاجهادات المماسية على طول المستقيم الافقي . ينبغي أن يعطى تكامل الاجهادات المماسية $\tau_{xz}(x,z) = \tau_{zx}(x,z)$ على كامل سطح المقطع العرضي F القوة العرضية $Q_z(x)$ الموجودة في ذلك المقطع العرضي (لأن القوة العرضية $Q_z(x)$ هي محصلة الاجهادات المماسية $\tau_{xz}(x,z)$ في المقطع العرضي) ، أي أن :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z) dF = Q_z(x)$$

بالاستعانة بالعلاقة (10.5) ينتج :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z) dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_F \frac{S_{ya}(z)}{b(z)} dF$$

وبادخال العلاقة التالية :

$$dF = b(z) dz$$

يعين الاعتبار يتم التوصل لما يلي :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z) dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_{z_0}^{zu} S_{ya}(z) dz$$

بعد اجراء المكاملة الجزئية يتم منها التوصل للعلاقة التالية :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z) dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \left[z_u S_{ya}(z_u) - z_0 S_{ya}(z_0) - \int_{z_0}^{zu} z \frac{dS_{ya}(z)}{dz} dz \right] \quad (10-6)$$

من العزم الستاتيكي (10.4) :

$$S_{ya}(z) = \int_z^{zu} \zeta b(\zeta) d\zeta$$

ينتج :

$$S_{ya}(z_u) = 0$$

وبما أن مبدأ (مركز) الاحداثيات موجود في مركز النقل لذلك يصلح أيضاً :

$$S_{ya}(z_0) = \int_{z_0}^{zu} \zeta b(\zeta) d\zeta = \int_F \zeta dF = 0$$

وبذلك يتم التوصل من المعادلة (10 6) للعلاقة التالية :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z) dF = - \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_{z_0}^{zu} z \frac{dS_{ya}(z)}{dz} dz$$

بملاحظة مايلي :

$$\frac{dS_{ya}(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \int_z^{zu} \zeta b(\zeta) d\zeta = -zb(z)$$

فإن العلاقة الاخيرة تتحول للمعادلة الآتية :

$$\int_F \tau_{xz}(x,z) dF = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int_z^{z+dz} z^2 b(z) dz = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \int z^2 dF = Q_z(x)$$

١٠ - ٣ أمثلة

مثال 131 :

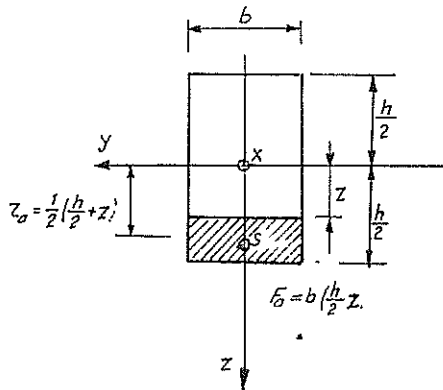
المطلوب : تعيين الاجهادات المماسية لجائز (الحامل) مقطعه العرضي مستطيل الشكل (شكل 10.4) ، عرضه b وارتفاعه h .

المعطى : Q , h , b .

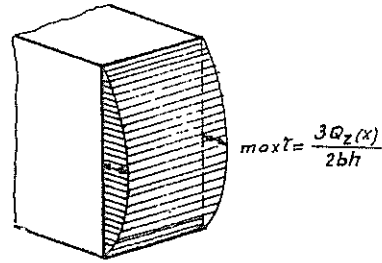
الحل :

بواسطة العزم الاستاتيكي (للجزء المشر) :

$$S_{ya} = z_a F_a = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) \cdot b \left(\frac{h}{2} - z \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$



شكل 10.4



شكل 10.5

وعزم المطالة السطحي (لكامل المقطع العرضي) :

$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

يتم الحصول تبعاً للعلاقة (10.5) على توزيع الاجهاد المماسي التالي :

$$\tau_{xz}(x,z) = Q_z(x) \frac{b \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) 12}{2 b h^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \frac{Q_z(x)}{bh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)$$

وهذه هي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير z ولهذا فإن توزيع الاجهاد المماسي على ارتفاع المقطع العرضي هو قطع مكافئ (هو منحنى على شكل مقطع مكافئ) من الدرجة الثانية. يبلغ الاجهاد المماسي الاعظمي القيمة التالية :

$$\tau_x(x,0) = \max \tau = \frac{3}{2} \frac{Q_z(x)}{bh}$$

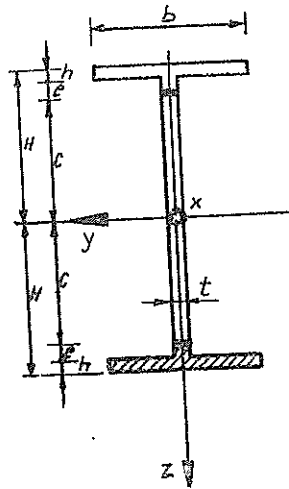
وهو يتشكل على المستقيم $z=0$ (شكل 10.5) ، أي ان القيمة العظمى للاجهاد المماسي في هذه الحالة تساوي مرة ونصف قيمة الاجهاد المتوسط الناتج عن قسمة القوة المرصية Q على مساحة المقطع العرضي وهي bh .

مثال 132 :

المطلوب : تعيين الاجهادات المماسية التي تتشكل عند منطقة الاحام لجانز (لحامل) مقطعه العرضي على شكل حرف I وتحمل على الانعطاف ويتألف من صفيحة للجسد (Stegblech) ومن بروفيلين للاجنحة (Gurtprofilen) تتصل مع بعضها بواسطة الاحام (شكل 10.6) .

الحل :

بواسطة العزم الستاتيكي (للجزء المهر من المقطع العرضي) :



شكل 10.6

$$S_{ya}(c) = \left(H - \frac{h}{2} \right) bh + \left(c + \frac{e}{2} \right) t e$$

وعزم العطالة السطحي (لسكامل المقطع العرضي) :

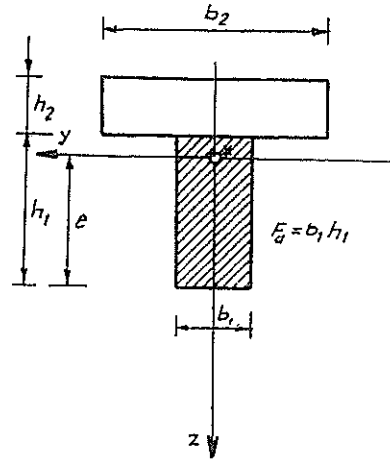
$$I_{yy} = \frac{t(2c + 2e)^3}{12} + 2 \frac{bh^3}{12} + 2. bh \left(H - \frac{h}{2} \right)^2$$

يتم الحصول من العلاقة (10.5) على الاجهادات المماسية عند منطقة اللحام :

$$\tau_{xz}(x,c) = Q_z(x) \frac{\left(H - \frac{h}{2} \right) \frac{bh}{t} + \left(c + \frac{e}{2} \right) e}{\frac{1}{6} [4 t (c+e)^3 + bh^3] + 2bh \left(H - \frac{h}{2} \right)^2}$$

مثال 133 :

يتألف المقطع العرضي للجائز يعمل على الانعطاف (Biegeträger) من مستطيلين (عروضها b_1, b_2 وارتفاعاتها h_1, h_2) تتصل مع بعضها بواسطة الغراء. يحتوي الجائز في النقطة المدروسة على القوة العرضية Q_z (شكل 10.6 b) .
المطلوب : تعيين الاجهادات المماسية التي تتشكل عند فاصل الغراء (Leimfuge) .



شكل 10-6 b

الحل :

يحدد بعد مركز الثقل :

$$e = \frac{b_1 \frac{h_1^2}{2} + b_2 h_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2} \right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2}$$

مكان المحور y . بواحدة العزم الستاتيكي للجزء المهر من المقطع العرضي :

$$S_{ya} = \left(e - \frac{h_1}{2} \right) b_1 h_1$$

وعزم العطالة السطحي لكامل المقطع العرضي :

$$I_{yy} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_1 h_1 \left(e - \frac{h_1}{2} \right)^2 + b_2 h_2 \left(h_1 - e + \frac{h_2}{2} \right)^2$$

يتم تعيين الاجهاد المماسي الذي يتشكل عند فاصل الغراء :

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x) &= Q_z(x) \frac{S_{ya}}{I_{yy} \cdot b_1} \\ &= \frac{Q_z(x) 6 b_1 b_2 h_2 (h_1 + h_2)}{(b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3)(b_1 h_1 + b_2 h_2) + 3 b_1 b_2 h_2 (h_1 + h_2)^2} \end{aligned}$$

مثال 134 :

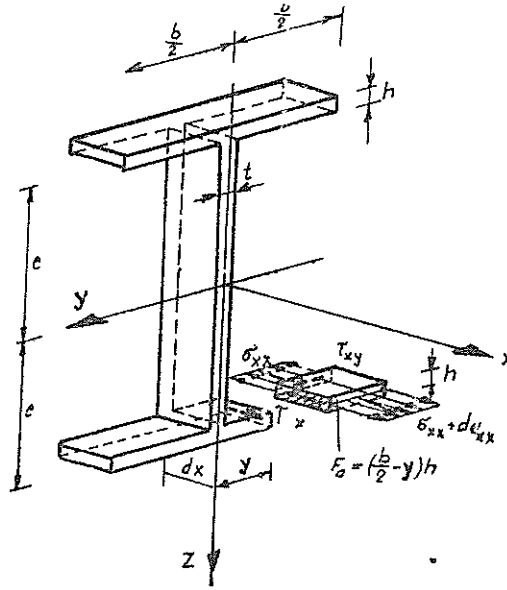
لتعيين توزيع الاجهاد المماسي في أجنحة جازر مقطعه العرضي حرف I استطاع أيضاً الرجوع للعلاقة (10.5) . بما أن سماكة الاجنحة h صغيرة جداً بالنسبة لابعاد المقطع العرضي لذلك يمكن الافتراض أن توزيع الاجهاد الناطمي σ_{xx} والاجهاد المماسي τ_{xy} على سماكة الاجنحة منتظم وان الاجهادات المماسية τ_{xy} توازي الحواف (المحيط، الحدود المغلفة) ، عندئذ تتشكل علاقة مشابهة التي تم التوصل اليها أثناء بحث قتل القضبان ذات المقاطع العرضية الرقيقة المغلفة .

باقتطاع جزء صغير قدر الامكان من الجناح (شكل 10-7) وبتطبيق شرط التوازن على الجزء المقطوع ، ينتج :

$$- \tau_{yx} h dx - \sigma_{xx} F_a + (\sigma_{xx} + d \sigma_{xx}) F_a = 0$$

من هذه العلاقة يتم التوصل في البداية للمعادلة التالية :

$$\tau_{yx} = \frac{d \sigma_{xx}}{dx} \frac{F_a}{h}$$



شكل 10.7

بالاستعانة بالاجهاد الناطمي :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} (\pm e)$$

ومشتقة :

$$\frac{d\sigma_{xx}(x)}{dx} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{dM_y(x)}{dx} (\pm e) = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} (\pm e)$$

ينتج :

$$\tau_{yx}(x, y) = \frac{Q_z(x) F_a(y) (\pm e)}{I_{yy} h}$$

عندما يعتبر أن :

$$F_a(y) (\pm e) = S_{ya}(y)$$

هو العزم الستاتيكي للجزء المقطوع السفلي أو بالاحرى العلوي من الجناح ، عندئذ يمكن تعيين الاجهاد الناطمي المطاوب ، بواسطة العلاقة (10-5) وذلك حسب العلاقة التالية :

$$\tau_{yx}(x, y) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(y)}{I_{yy} h} \quad (10-7)$$

وبذلك يتم بواسطة العلاقة الآتية :

$$F_a(y) = \left(\frac{b}{2} - y \right) h$$

تعيين توزيع الاجهاد في الجزء المدروس من الجناح :

$$\tau_{yx}(x,y) = \tau_{xy}(x,y) = \pm \frac{Q_z(x) e \left(\frac{b}{2} - y \right) h}{I_{yy} h} = \pm \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} e \left(\frac{b}{2} - y \right) ,$$

$$0 \leq y \leq \frac{b}{2} \quad (10-7b)$$

لأسباب التناظر تصلح من أجل $y < 0$:

$$\tau_{yx}(x,y) = \tau_{xy}(x,y) = \mp \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} e \left(\frac{b}{2} + y \right) ; \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq 0 \quad (10-7c)$$

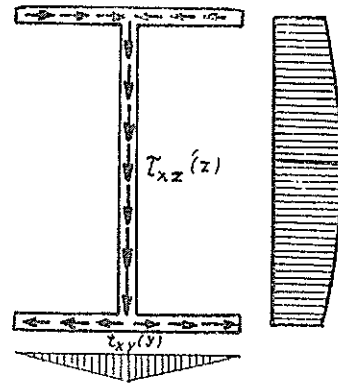
يتم تعيين الاجهادات المماسية $\tau_{xz}(x,z)$ في الجسد بشكل مباشر من العلاقة التالية :

$$\tau_{xz}(x,z) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(z)}{I_{yy} b(z)}$$

حيث ان $b(z) = t$ وبسبب كون $h \ll e$ فان :

$$S_{ya}(z) = b h e + t (e - z) \frac{e + z}{2}$$

$$= b h e + \frac{t}{2} (e^2 - z^2)$$



شكل 10.8

لقد تم في الشكل (10.8) رسم الاجهادات المماسية قيمة واتجهاً . تشكل الاجهادات المماسية $\tau_{xy}(y)$ الموجودة في كل جناح مجموعة متوازنة (Gleichgewichtsgruppe) . ان محصلة الاجهادات المماسية $\tau_{xz}(x,z)$ في الجسد تساوي القوة العرضية $Q_x(x)$ التي تؤثر في ذلك المقطع العرضي .

مثال 135 :

يتألف المقطع العرضي لجائز من دائرة نصف قطرها R وتؤثر فيه القوة العرضية Q شكل (10.9 a) .

المعطى : Q, R .

المطلوب :

١ - إيجاد توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} مع الرسم .

٢ - تعيين القيمة العظمى للاجهاد المماسي $\max \tau_{xz}$.

الحل :

١ - إيجاد توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} .

عزم عطالة الدائرة :

$$I_{yy} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

عرض الدائرة في مكان القطع الذي يبعد z :

$$b(z) = 2 \sqrt{R^2 - z^2}$$

العزم الستاتيكي للسطح المباشر (وهو يساوي العزم الستاتيكي للسطح الذي يعالوه) :

$$S_{yA} = z_A F_A = \int_F z dF$$

بالمكاملة ينتج :

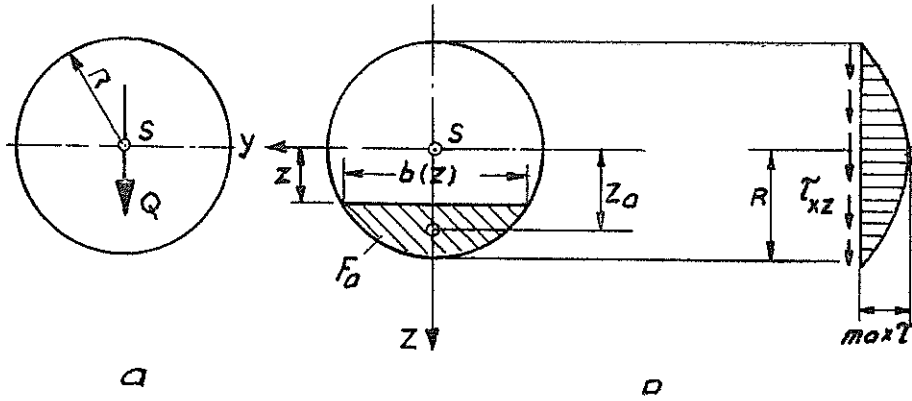
$$S_{yA} = \frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2}$$

بتبديل هذه القيم في علاقة الاجهاد المماسي (10-5) ينتج :

$$\tau_{xz} = \frac{4Q}{3\pi R^4} (R^2 - z^2)$$

الاجهاد المماسي الاعظمي :

$$\max \tau_{xz} = \tau_{xz} (z = 0) = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{P}$$



شكل 10.9

يتم أيضا الحصول على الاجهاد المماسي الاعظمي فيما لو اتبع الطريق المباشر التالي (شكل 10.9c):
عزم عطالة الدائرة :

$$I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

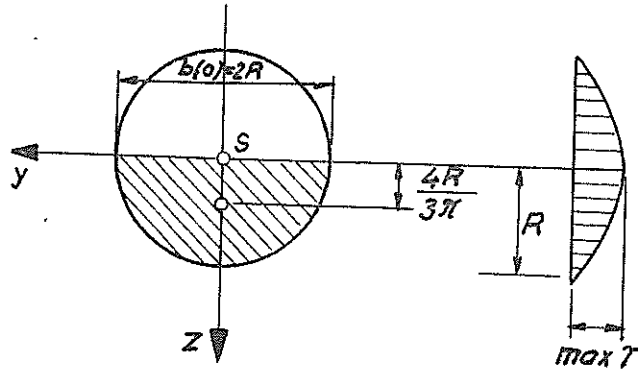
العزم الستاتيكي لنصف الدائرة المشر (وهو يساوي العزم الستاتيكي للنصف الذي يعالوه) :

$$S_{ya} = z_a \cdot F_a = \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{2}{3} R^3$$

عرض نصف الدائرة (العرض عند مكان القطع وهو المكان الذي تحسب الاجهادات المماسية عنده) :

$$b(z=0) = 2R$$

بتبديل القيم السابقة في علاقة الاجهاد المماسي ينتج :



شكل 10.9c

$$\max \tau_{xz} = \frac{Q}{\pi R^4} \frac{\frac{2}{3} R^3}{2 R} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}$$

مثال 136 :

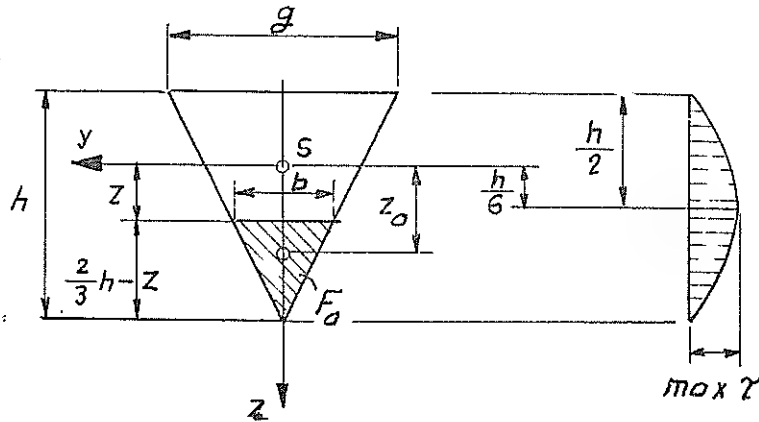
يتألف المقطع العرضي لجائز من مثلث قاعدته g وارتفاعه h . بعد قطع الجائز في مكان ما منه وجد أن القوة العرضية المشتكلة هناك هي Q شكل (10.10) .

المعطى : Q , h , g .

المطلوب :

١ - حساب توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} مع الرسم .

٢ - تعيين القيمة العظمى للاجهاد المماسي .



شكل 10.10

الحل :

١ - حساب توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} .

عزم عطالة المثلث :

$$I_{yy} = \frac{g h^3}{36}$$

مساحة السطح المباشر :

$$F_a = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} h - z \right) b$$

بعد مركز ثقل السطح المباشر عن مبدأ الاحداثيات :

$$z_a = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} h - z \right) + z = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} h + z \right)$$

العزم الستاتيكي للسطح المباشر بالنسبة للمحور y :

$$\begin{aligned} S_{ya} = z_a F_a &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} h + z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} h - z \right) b \\ &= \frac{1}{3} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right) \end{aligned}$$

عرض المثلث على ارتفاع z :

$$b(z) = \frac{g}{h} \left(\frac{2}{3} h - z \right)$$

بتبديل هذه القيم في علاقة الاجهاد المماسي ينتج :

$$\tau_{xz} : \frac{Q}{g h^3 / 36} = \frac{\frac{1}{3} b \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right)}{b} = \frac{12Q}{g h^3} \left(\frac{2}{3} h - z \right) \left(\frac{1}{3} h + z \right)$$

٢ - تعيين القيمة العظمى للاجهاد المماسي .

باشتقاق تابع الاجهاد المماسي وجعله مساوياً للصفر يتم تعيين موضع تشكل الاجهاد المماسي الاعظمي :

مقاومة المواد م ٦٥

$$\frac{d\tau}{dz} = 0 = \frac{12Q}{gh^3} \left[-\left(\frac{1}{3}h+z\right) + \left(\frac{2}{3}h-z\right) \right], \quad z = \frac{1}{6}h$$

$$\max \tau_{xz} = \tau_{xz} \left(z = \frac{1}{6}h \right) = \frac{12Q}{4gh^2} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$$

مثال 137 :

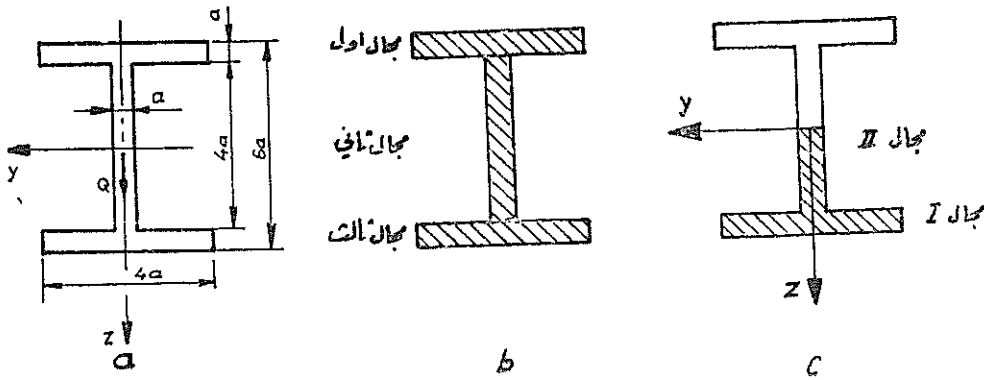
يشكل المقطع العرضي لجائز I (شكل a 10.12). بقطع الجائز المذكور في نقطة مأمنة يتبين أن القوة العرضية الموجودة هناك هي Q .

المعطى : $a = 2 \text{ cm}$, $Q = 500 \text{ kp}$

المطلوب :

١ - حساب توزيع الاجهاد المماسي τ_{xz} .

٢ - تعيين قيمة الاجهاد المماسي الاعظمي $\max \tau_{xz}$.



شكل 10.12

الحل :

١ - تعطي المعادلة (10.5) توزيع الاجهاد المماسي:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{Q_z(x) \cdot S_y(z)}{I_{yy} \cdot b(z)}$$

القوة العرضية :

$$Q = 500 \text{ kp}$$

عزم عطالة المقطع العرضي:

$$I_{yy} = \frac{1}{12} [4a(6a)^3 - 3a(4a)^3] = 56a^4$$

$$I_{yy} = 896 \text{ cm}^4$$

بالتبديل في علاقة الاجهاد المماسي ينتج :

$$\tau_{xz}(z) = \frac{Q}{56a^4} \cdot \frac{S_y(z)}{b(z)}$$

تحتوي قوابع $S_y(z)$, $b(z)$ على عدم استمرار مما يلزم تقسيم المقطع العرضي الى مجالات (هنا ثلاثة مجالات : المجال الاول $2a \leq z \leq 3a$ والمجال الثاني $-2a \leq z \leq 2a$ والمجال الثالث $-3a \leq z \leq -2a$. لكن بسبب التناظر بالنسبة لمحور y يكفى بالمجال الاول الذي سيرمز له بالعدد I وبنصف المجال الذي سيرمز له بالعدد II (شكل 10.12 b,c).

المجال I ($2a \leq z \leq 3a$) (شكل 10.12 d) :

$$b(z) = 4a$$

$$S_{ya}(z) = z_a F_a = \frac{1}{2} (3a + z) \cdot 4a(3a - z) = 2a(9a^2 - z^2)$$

$$z = 3a : S_{ya} = 0$$

$$z = 2a : S_{ya} = 10a^3$$

بالمكان أيضاً حساب العزم الستاتيكي انطلاقاً من التكامل :

$$S_{ya}(z) = \int_z^{3a} b(\zeta) \zeta d\zeta = \int_z^{3a} 4a \zeta d\zeta = 2a(9a^2 - z^2)$$

المجال II ($0 \leq z \leq 2a$) (شكل 10.12e) :

$$b(z) = a$$

$$S_{ya}(z) = z_a F_a = \frac{1}{2} (2a + z) [(2a - z)a] + 10a^3$$

$$S_{ya}(z) = \frac{a}{2} (4a^2 - z^2) + 10a^3 = a \left(12a^2 - \frac{z^2}{2} \right)$$

بالامكان هنا أيضاً التوصل لنفس النتيجة انعطافاً من التكامل :

$$S_{y a}(z) = \int_z^{3a} b(\zeta) \zeta d\zeta = \int_z^{2a} a \zeta d\zeta + \int_{2a}^{3a} 4a \zeta d\zeta$$

$$S_{y a}(z) = \frac{a}{2} (4a^2 - z^2) + 2a (9a^2 - 4a^2) = a \left(12a^2 - \frac{z^2}{2} \right)$$

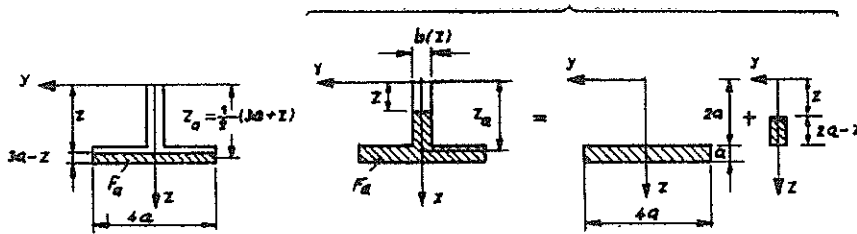
توزيع الاجهاد المماسي في المجال I :

$$\tau_{xz I}(z) = \frac{Q}{56a^4} \frac{2a(9a^2 - z^2)}{4a} = \frac{Q}{112a^2} \left[9 - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]$$

توزيع الاجهاد المماسي في المجال II :

$$\tau_{xy II}(z) = \frac{Q}{56a^4} a \frac{(12a^2 - z^2/2)}{a} = \frac{Q}{112a^2} \left[24 - \left(\frac{z}{a} \right)^2 \right]$$

يتشكل الاجهاد المماسي الاعظمي في المكان $z=0$.



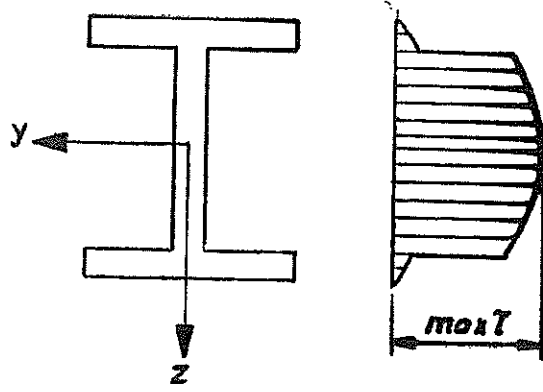
شكل 10-12g

٢ - تعيين قيمة الاجهاد المماسي الاعظمي .

$$\max \tau_{xz} = \tau_{xz II}(z=0) = \frac{Q}{112a^2} 24 = 26,78 \text{ kp/cm}^2$$

أما القيمة التقريبية التي تستعمل في الحياة العملية فتبلغ :

$$\max \tau \approx \frac{Q}{F} = \frac{500}{a \cdot 4a} = \frac{500}{4a^2} = 31,3 \text{ kp/cm}^2$$



شكل 10-12g

مثال 138 :

يتألف المقطع العرضي لجناز من صندوق مغلق . بعد قطع الجناز في نقطة ما منه تبين أن القوة العرضية هناك هي Q (شكل 10-13 a) .

المعطى :

$$h_0 = 8 \text{ cm} , \quad h = 12 \text{ cm} , \quad b_0 = 4 \text{ cm} , \quad b = 6 \text{ cm} , \quad Q = 8 \text{ Mp}$$

المطلوب : حساب ورسم توزيع الاجهادات المماسية τ_{xz} (الاجهادات المماسية الشاقولية ، أي باتجاه Q) .

الحل :

عزم عطالة المقطع العرضي :

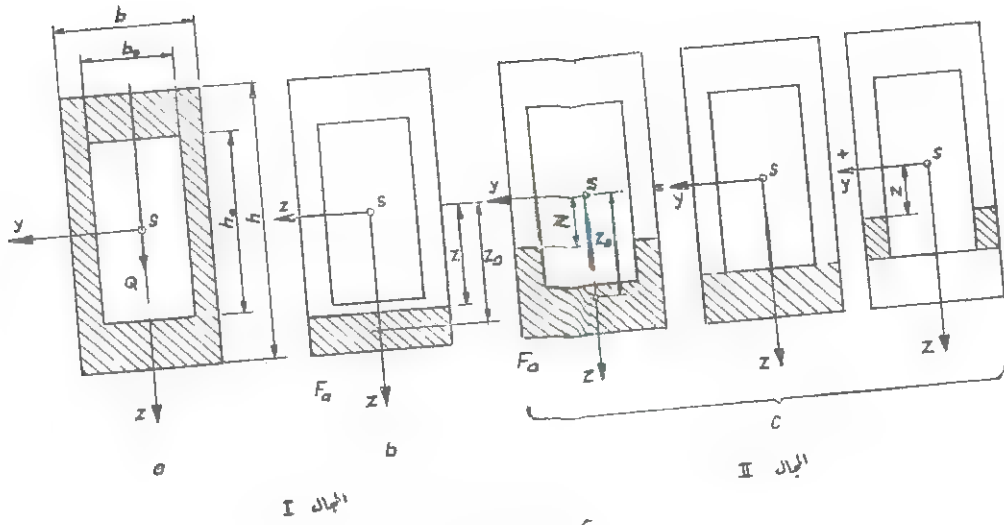
$$I_{yy} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_0h_0^3}{12} = \frac{1}{12} (6 \cdot 12^3 - 4 \cdot 8^3) = \frac{2080}{3} \text{ cm}^4$$

الطريق الاول (حساب تابع الاجهاد المماسي) :

$$\text{المجال } I : \left(\frac{1}{2} h_0 = 4 \text{ cm} \leq z \leq \frac{1}{2} h - 6 \text{ cm} \right)$$

$$b(z) = b = 6 \text{ cm}$$

$$S_{ya}(z) = z_a F_a = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z \right) + z \right] \cdot b \left(\frac{h}{2} - z \right) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$



شكل 10.13

$$S_{ya}(z) = \frac{1}{2} 6 \left(\frac{12^2}{4} - z^2 \right) = 108 - 3z^2$$

$$: \left(0 \leq z \leq \frac{1}{2} b_0 = 4 \text{ cm} \right) \text{ II المجال}$$

$$b(z) = b - b_0 = 2 \text{ cm}$$

$$S_{ya}(z) = \left[\frac{h_0}{2} + \frac{1}{4} (h - h_0) \right] \cdot \frac{1}{2} b (h - h_0) +$$

$$+ \left[z + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{2} - z \right) \right] \cdot (b - b_0) \left(\frac{h_0}{4} - z \right)$$

$$S_{ya}(z) = \frac{1}{8} b (h^2 - h_0^2) + \frac{1}{2} (b - b_0) \left(\frac{h_0^2}{4} - z^2 \right)$$

$$S_{ya}(z) = 60 + (16 - z^2) = 76 - z^2$$

$$\tau_{xzI}(z) = \frac{Q_z}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{8.10^3}{2080/3} \cdot \frac{(108 - 3z^2)}{6} = \frac{4000}{2080} (108 - 3z^2)$$

$$z = 6 ; \tau_{xzI} = 0$$

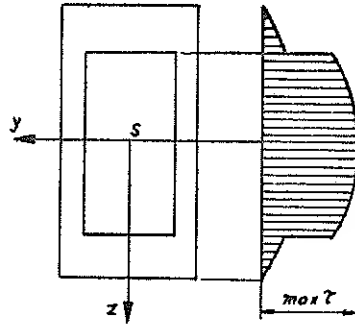
$$z = 4 : \tau_{xzI} = 115.4 \text{ kp/cm}^2$$

بعد الحصول على هذه النتائج يتم ، في مخطط τ ، الوصل بينها بواسطة منحنى على شكل قطع مكافئ من الدرجة الثانية .

$$\tau_{xzII}(z) = \frac{Q_z}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{8 \cdot 10^3}{2080/3} \cdot \frac{(76 - z^2)}{2} = \frac{12 \cdot 10^3}{2080} (76 - z^2)$$

$$z = 4 : \tau_{xzII} = 346,2 \text{ kp/cm}^2$$

$$z = 0 : \tau_{xzII} = 438,5 \text{ kp/cm}^2$$



شكل 10 14

لقد تم ، بسبب التناظر ، الاكتفاء بتعيين نصف القيم .

الطريق الثاني : (حساب قيم الاجهادات المماسية في بعض النقاط المميزة ، مثلا النقاط 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، ثم الوصل بينها بمنحني على شكل قطع مكافئ من الدرجة الثانية) :

النقطة 1 :

$$b_1 = 6 \text{ cm} ; S_{y1} = 0 : \tau_{xz1} = 0$$

النقطة 2 :

$$b = 6 \text{ cm} ; S_{y2} = \left(\frac{h}{2} - \frac{h-h_0}{2} \right) \cdot b \cdot \frac{h-h_0}{2} = 60 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz2} = \frac{Q_z}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{8 \cdot 10^3}{2080/3} \cdot \frac{60}{6} = 115,4 \text{ kp/cm}^2$$

النقطة 3 :

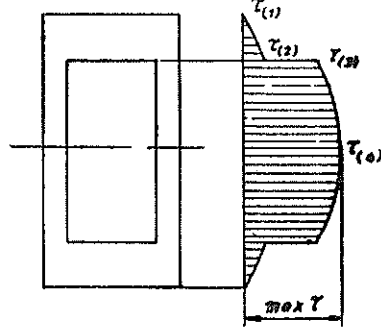
$$b = (b - b_0) = 2 \text{ cm} ; S_{y3} = S_{y2} = 60 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz3} = \frac{8 \cdot 10^3}{2080/3} \cdot \frac{60}{2} = 346,2 \text{ kp/cm}^2$$

النقطة 4 :

$$b = 2 \text{ cm} ; \dot{S}_{y4} = \dot{S}_{y2} + (b - b_0) \frac{h_0}{2} \frac{h_0}{4} = 60 + 16 = 76 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz4} = \frac{80 \cdot 10^3}{2080 / 3} \cdot \frac{76}{2} = 438,5 \text{ kp/cm}^2$$



شكل 10.15

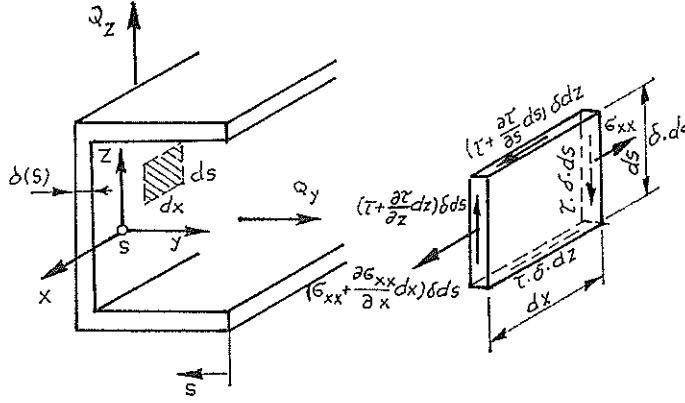
١ - ٤ الاجهادات المماسية القصية في البروفيلات المفتوحة رقيقة الجدار

في البروفيلات رقيقة الجدران يمكن بتقريب جيد التكلم عن حالة الاجهادات المستوية (انظر الفقرة ٣ - ٣) . ان الاجهادات المتشكلة فيها هي الاجهادات الناعمية σ_{xx} والاجهادات المماسية τ . بسبب ضئالة عرض (سماكة) المقطع العرضي δ يتبين أن توزيع τ على سماكة الجدار δ ثابت ولذلك يستطاع الحساب باستخدام مبالاة القص $T = \delta \tau$ (Schubfluß) (انظر الفصل السابع) . بتطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه s على العنصر $dV = dx \delta(s) ds$ المقطوع من الجائز والممثل في الشكل (10.16) ينتج :

$$\left. \begin{aligned} T ds + \frac{\partial T}{\partial x} dx ds - T ds &= 0 \\ \text{أو :} & \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

من هذه العلاقة ينتج أن مبالاة القص $T = \tau \delta$ لاتتعلق بالاحداثي x وهذا يعني أن :

$$T = T(s)$$



شكل 10.16

أما تطبيق شرط توازن القوى بالاتجاه x فيعطي العلاقة التالية :

$$(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) \delta ds - \sigma_{xx} \delta ds + (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial s} ds) \delta dx - \tau \delta dx = 0$$

أو كذلك :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \quad (10.11)$$

حسب الفقرة (10.1) يمكن تضام حالة الاجهاد الناتجة عن الانعطاف الصافي مع حالة الاجهاد الناتجة عن القوة العرضية . اذا أثرت على الجائز القوى العرضية Q_y , Q_z (شكل 10.19) عندئذ يكون توزيع الاجهاد الناطمي كالتالي :

$$\sigma_{xx} = - \frac{Q_y}{I_{zz}} x y - \frac{Q_z}{I_{yy}} x z \quad (10.12)$$

لقد افترض في العلاقة السابقة ان المحاور y , z هي محاور رئيسية . من العلاقة (10.12) ينتج :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = - \frac{Q_y}{I_{zz}} y - \frac{Q_z}{I_{yy}} z \quad (10.13)$$

بتعويض العلاقة (10.13) في العلاقة (10.11) ينتج :

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{Q_y}{I_{zz}} \delta(s) y + \frac{Q_z}{I_{yy}} \delta(s) z \quad (10.14)$$

وبالمسألة يتم التوصل لما يلي :

$$T(s) - T(0) = \int_0^s \frac{Q_y \delta'(s)y}{I_{zz}} ds + \int_0^s \frac{Q_z \delta'(s)z}{I_{yy}} ds \quad (10.15)$$

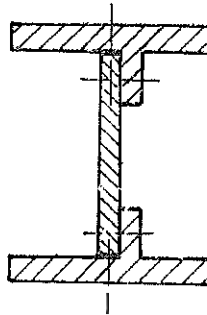
تتعدى مسألة القص على الحواف ($s = l$, $s = 0$) ، هذا يعني أن $T(0) = 0$. بما أن القيم I_{zz} , I_{yy} , Q_z , Q_y لا تتعلق بالاحداثي s لذلك يمكن كتابتها قبل إشارة التكامل (يمكن اخراجها من إشارة التكامل) . اما العلاقات المتبقية فهي :

$$S_z = \int_0^s \delta ds \quad , \quad S_y = \int_0^s z \delta ds \quad (10.16)$$

وهي تمثل العزوم الستاتيكية للسطوح التي تقع بين $s = 0$, $s = s$ بالنسبة للمحور z وبالنسبة للمحور y . أخيراً يتم ، من أجل مسألة القص ، التوصل للعلاقة التالية :

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \quad (10.17)$$

تستخدم في أغلب الحالات من أجل الجيزان المنعطفة (الجيزان التي تعمل على الانعطاف Biegeträger) بروفيلات تتألف من جناحين (صفيحتين علويتين أفقيتين Flanche) ومن جسد (صفيحة شاقولية Steg) تتصل مع بعضها البعض (شكل 10.17) .



شكل 10.17

بما أن الاجنحة تبعد عن مركز الثقل مسافة كبيرة لذلك فهي مناسبة لتحمل عزم انعطاف كبير . اما مسألة القص الناتجة عن القوة العرضية فلها تنقل في الدرجة الاولى من قبل

(بواسطة) الجسد . يسهل ، استخدام الفرضية التي تقول ان الاجنحة تحمل فقط باجهادات
 ناظرية (انعطاف) وان الجسد يحمل فقط باجهادات مماسية (قوى عرضية) ، المعادلة (10.11)
 في هذه الحالة تصالح من اجل الجسد العلاقة التالية :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (10-18)$$

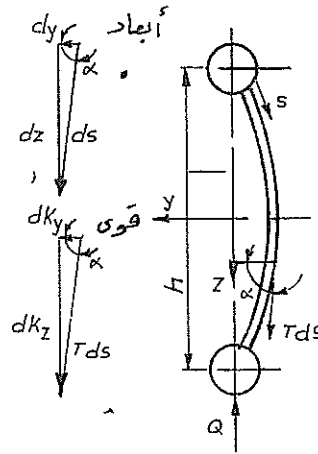
ونتيجة لها يصلح أيضاً :

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad (10-19)$$

هذا يعني أن ميلالة القص في الجسد هي ثابتة . تحدد العلاقة التي تربط بين القوة العرضية وبين
 ميلالة القص بواسطة شروط توازن القوى بالاتجاه y (شكل 10,18) .

ينبغي ان تكون المحولة الخارجية Q مساوية لمجموع القوى وهذا يعني ان :

$$Q = \int_{\text{صفحة}} dk_z = \int_{\text{صفحة}} T ds \sin \alpha \quad (10-20)$$



شكل 10.18

بسبب كون $ds \sin \alpha = dz$ (شكل 10.18) و $T = \text{const}$ ينتج :

$$Q = T \int_{-h/2}^{+h/2} dz = T h$$

من هذه المعادلة يتم التوصل لعلاقة سيالة القص البسيطة التالية :

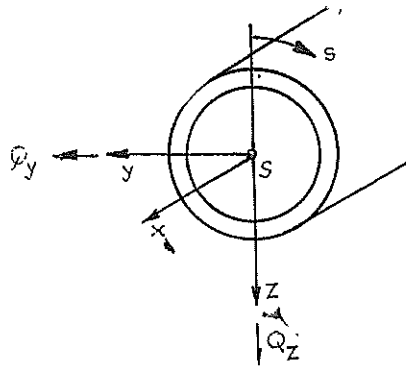
$$T = \frac{Q}{h} \quad (10-21)$$

تستخدم هذه العلاقة كثيراً في الانشاءات المعدنية .

١٠ - ٥ الاجهادات المماسية القصية في البروفيلات المغلقة الرقيقة

مبدئياً يتم اشتقاق (استخراج) علاقة سيالة القص في البروفيلات المغلقة الرقيقة ، تماماً (شكل 10.19) كما تم في البروفيلات المفتوحة . لقد تم حسب المعادلة (10.15) ادخال شروط الاطراف $T(s=0)=0$. لكن هذا الشرط لم يعد ممكناً في البروفيلات المغلقة . مستعاد كتابة المعادلة (10.15) ثانية :

$$T(s) - T(0) = \int_0^s \frac{Q_y \delta y}{I_{zz}} ds + \int_0^s \frac{Q_z \delta z}{I_{yy}} ds$$



شكل 10.16

لا يمكن تحديد سيالة القص في المكان $s=0$ أي $T(0)$ في البروفيلات المغلقة (المقاطع العرضية المغلقة) بواسطة شرط الاطراف ، بل يتم التوصل اليها بالاستعانة بشرط التنشيط (Verformungsbedingung) . يؤكد ما ميسار اليه فيما بعد بأن الجملة هي على الدوام في حالة

توازن مستقر وذلك عندما يكون محتوى الطاقة (Energieinhalt) أصغرياً . من أجل الحالة المدروسة هنا ، يعني هذا ان عمل تغير الشكل (Formaenderungsarbeit) يجب ان يكون أصغرياً وهذا يعني ان $T(0)$ يجب ان تحدد بصورة يكون فيها الشرط المذكور محققاً . يعبر رياضياً عن الكلام السابق بما يلي :

$$\frac{dA}{dT(0)} = 0 \quad (10.22)$$

ان عمل تغير الشكل النوعي (spezifische Formaenderungsarbeit) نتيجة لتأثير الاجهادات المناسبة هو :

$$A^* = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{T^2}{2G\delta^2}$$

وبذلك فان عمل تغير الشكل في العنصر الحجمي $dV = \delta ds$ هو :

$$dA = \frac{T^2}{2G\delta^2} l ds \quad (10.23)$$

اما عمل تغير الشكل في الجائز فيتم الحصول عليه باجراء المكاملة على كامل المقطع العرضي :

$$A = \left(\int \right) \frac{T^2}{2G\delta^2} l ds \quad (10.24)$$

وبذلك فان سيالة القص $[(10.15), (10.16)]$ تبلغ القيمة التالية :

$$T(s) = T_0 + \frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \quad (10.25)$$

حيث أن :

$$T_0 = T(0)$$

بتبديل العلاقة (10.25) في العلاقة (10.24) ينتج :

$$A = \frac{1}{2G} \left(\int \right) \left[T_0^2 + 2T_0 \left(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \right) + \left(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \right)^2 \right] \frac{ds}{\delta} \quad (10.26)$$

يجعل عمل تغير الشكل الممثل بالعلاقة السابقة اصغرياً عندما يعدم مشتقه بالنسبة للمتغير T_0 . من العلاقة (10.22) ينتج إذاً :

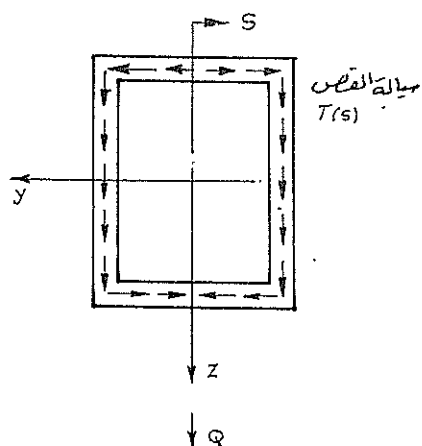
$$\left(\int \right) T_0 \frac{ds}{\delta} + \left(\int \right) \left(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \right) \frac{ds}{\delta} = 0 \quad (10-27)$$

وبسبب كون $T_0 = \text{const}$ يتم التوصل لما يلي :

$$T_0 = - \frac{\left(\int \right) \left(\frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s) \right) \frac{ds}{\delta}}{\left(\int \right) \frac{ds}{\delta}} \quad (10-28)$$

من العلاقة (10.25) وبمساعدة العلاقة (10.28) يتم التوصل الى ميةالة القص في البروفيلات المغلقة رقيقة الجدران .

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}} \left[S_z(s) - \frac{\left(\int \right) S_z(s) \frac{ds}{\delta}}{\left(\int \right) \frac{ds}{\delta}} \right] + \frac{Q_z}{I_{yy}} \left[S_y(s) - \frac{\left(\int \right) S_y(s) \frac{ds}{\delta}}{\left(\int \right) \frac{ds}{\delta}} \right] \quad (10-29)$$



شكل 10-20

من أجل البروفيلات المتناظرة يتم التوصل لتسهيلات وذلك عندما تكون حولتها متناظرة (شكل 10.20) ، فعلى محاور التناظر يجب أن تنعدم ميةالة القص ، وذلك لاسباب التناظر . إذا ابتداءً

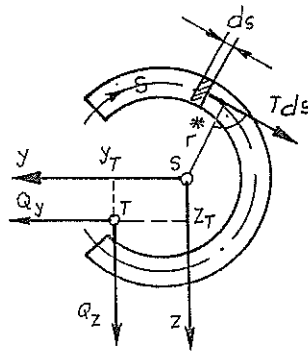
المحور الدوراني (Umlaufskoordinate) s من محور التناظر عندئذ تكون $T(0)=0$ وبذلك تأخذ العلاقة (10-29) شكلاً مبسطاً هو التالي :

$$T(s) = \frac{Q}{I_{yy}} S_y(s) \quad (10-30)$$

١٠ - مركز القص

لقد ترك في البحوث السابقة شرط توازن العزوم حول المحور الذي ينطبق على المحور الاوسط للقصيب (المحور x) دون تحقيق . أما هذا الشرط فيتحقق فقط عندما يمر حامل القوة العرضية المحصلة من نقطة معينة تسمى مركز القص . اما اذا لم يتحقق ذلك (اي اذا لم يمر حامل القوة العرضية من النقطة T ، المسماة بمركز القص) فعندئذ يتشكل عزم قتل يؤدي الى دوران الجائز (انفثال الجائز) مشكلاً سيالة قص اضافية يلزم اضافتها الى الاجهاد المماسي القصي للحصول على القيمة النهائية للاجهاد المماسي .

بما ان لابروفيلات المفتوحة صلبة فتل ضئيلة جداً لذلك ينبغي (خاصة في هذه البروفيلات) ان يمر حامل القوة الخارجية من مركز القص وذلك لتفادي تشكل تحميل اضافي (غير ضروري) نتيجة لتشكيل عزوم الفتل . لحساب موضع (مكان) مركز القص يطبق شرط توازن العزوم بالنسبة لمحور (حول محور) القصيب الطولي (المحور x) . يعطي تطبيق الشرط المذكور بالنسبة لمركز الثقل s (شكل 10-21) العلاقة التالية :



شكل 10 21

$$- \int_0^l r^* T ds + Q_z \cdot y_T - Q_y \cdot z_T = 0 \quad (10-31)$$

حيث أن r^* هي المسافة العمودية على شعاع القوة المماسية (Schubkraftvektors) والمارة من مركز الثقل s ، أو بكلام آخر بعد المماس على الخط الاوسط للمقطع العرضي عند مركز الثقل و l هو طول الخط الاوسط للبروفيل (Profilmittellinie) .

لايجاد احداثيات مركز القص يلزم الآن تعويض علاقات سيالة القص في المعادلة (10-31) .

١٠ - ٦ - ١ البروفيلات المفتوحة (المقاطع العرضية المفتوحة)

باعدة كتابة العلاقة (10-17) ثانية :

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy}} S_y(s)$$

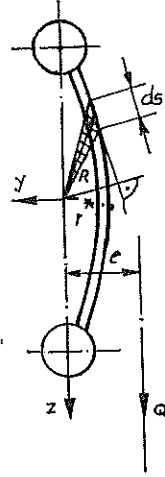
وبالاستعانة بها يتم التوصل من العلاقة (10-31) لما يلي :

$$\begin{aligned} Q_y \left[+ \frac{1}{I_{zz}} \int_0^l S_z(s) r^* ds + z_T \right] + \\ + Q_z \left[+ \frac{1}{I_{yy}} \int_0^l S_y(s) r^* ds - y_T \right] = 0 \end{aligned} \quad (10-32)$$

بما أن موضع (مكان) مركز القص لايتعلق من Q_z , Q_y لذلك ينبغي ان تكون القيم الوجودية داخل الاقواس في المعادلة (10-32) مساوية للصفر ، هذا يعني :

$$\left. \begin{aligned} z_T &= - \frac{1}{I_{zz}} \int_0^l S_z(s) r^* ds \\ y_T &= + \frac{1}{I_{yy}} \int_0^l S_y(s) r^* ds \end{aligned} \right\} \quad (10-33)$$

من أجل المقاطع العرضية ذات الاجنحة والتي تتصل مع بعض بصفيحة شاقولية تسمى الجسد (شكل 10-21) ، يتم الحصول على علاقات بسيطة .



شكل 10-22

حسب العلاقة (10.21) فإن سيالة القص هي $T = Q/h$. بالتعويض في المعادلة (10.31) يتم التوصل ، بعد اعتبار العلاقات التالية :

$$Q_z = Q , \quad Q_y = 0$$

ما يلي :

$$\frac{Q}{h} \int_0^l r^* ds = - Q \cdot y_T = Q \cdot e \quad (10-34)$$

حيث أن $r^* ds/2$ هي كما يشير الشكل (10.22) مساحة سطح المثلث الممشر . بجمع هذه العلاقة على طول الخط الاوسط l لجدار القص (Schubwand) ينتج :

$$\int_0^l r^* ds = 2 F_m \quad (10-35)$$

حيث أن F_m هو السطح المحصور بين جدار القص والمحور z . من العلاقات (10.34) و (10.35) يتم التوصل من أجل مسافة حامل القوة العرضية e عن المحور z للنتيجة التالية :

$$e = \frac{2F_m}{h} \quad (10-36)$$

١٠ - ٦ - ٢ البروفيلات (المقاطع العرضية) المغلقة

ان مسالة القص حسب العلاقة (10 29) هي :

$$T(s) = \frac{Q_y}{I_{zz}} \left[S_z(s) - \frac{\left(\int S_z(s) \frac{ds}{\delta} \right)}{\left(\int \frac{ds}{\delta} \right)} \right] + \frac{Q_z}{I_{yy}} \left[S_y(s) - \frac{\left(\int S_y(s) \frac{ds}{\delta} \right)}{\left(\int \frac{ds}{\delta} \right)} \right]$$

التعويض في العلاقة (10 3) ينتج

$$Q_y \left\{ \frac{1}{I_{zz}} \left(\int \left[S_z(s) - \frac{\left(\int S_z(s) \frac{ds}{\delta} \right)}{\left(\int \frac{ds}{\delta} \right)} \right] r^* ds + z_T \right) + \right. \\ \left. + Q_z \left\{ \frac{1}{I_{yy}} \left(\int \left[S_y(s) - \frac{\left(\int S_y(s) \frac{ds}{\delta} \right)}{\left(\int \frac{ds}{\delta} \right)} \right] r^* ds - y_T \right) \right\} = 0 \quad (10-37)$$

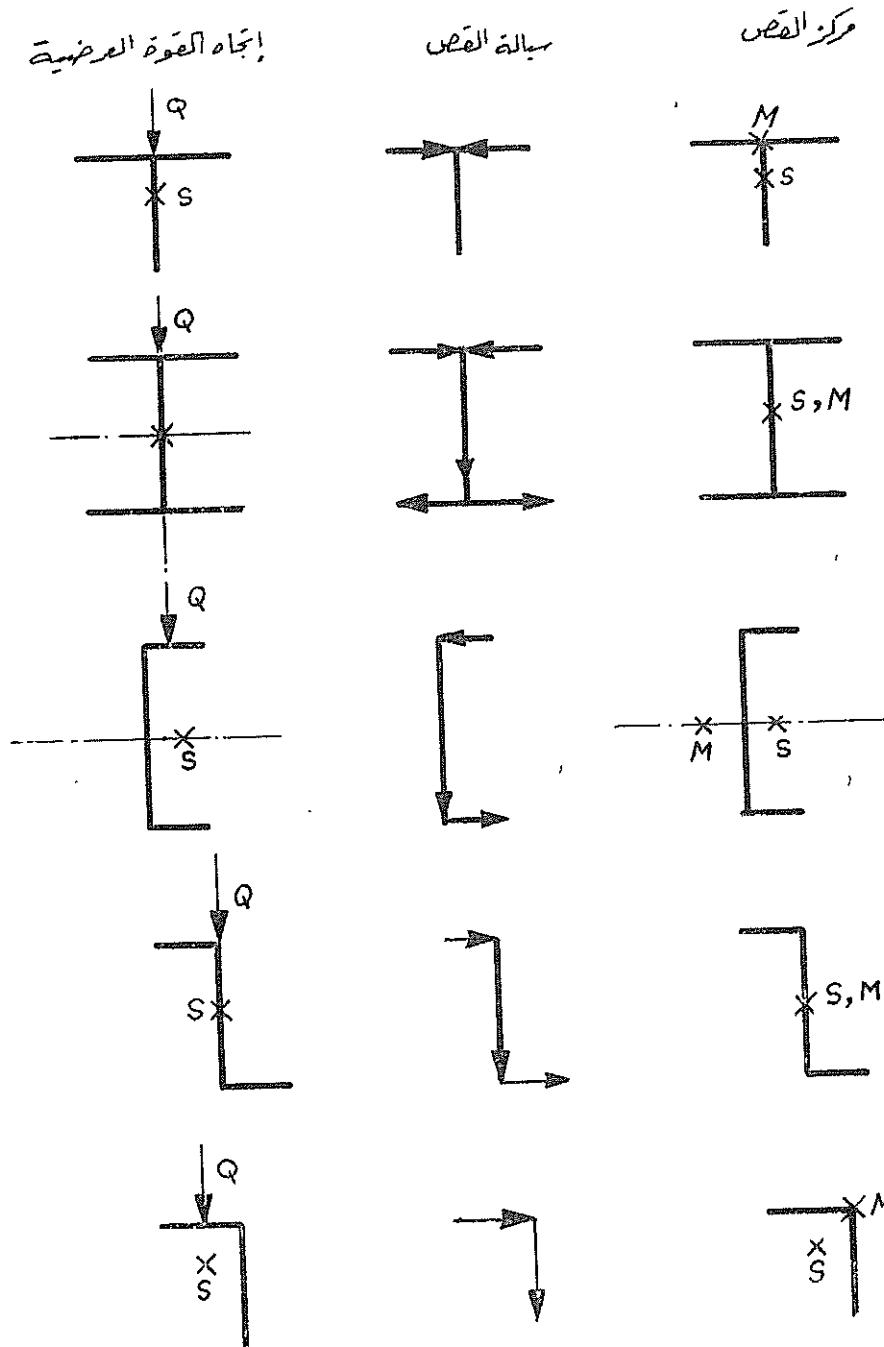
كما في المقاطع العرضية (البروفيلات) المفتوحة يتم منها ، هنا ايضاً ، الحصول على مكان مركز القص :

$$z_T = - \frac{1}{I_{zz}} \left(\int \left[S_z(s) - \frac{\left(\int S_z(s) \frac{ds}{\delta} \right)}{\left(\int \frac{ds}{\delta} \right)} \right] r^* ds \right) \quad (10.38)$$

$$y_T = - \frac{1}{I_{yy}} \left(\int \left[S_y(s) - \frac{\left(\int S_y(s) \frac{ds}{\delta} \right)}{\left(\int \frac{ds}{\delta} \right)} \right] r^* ds \right)$$

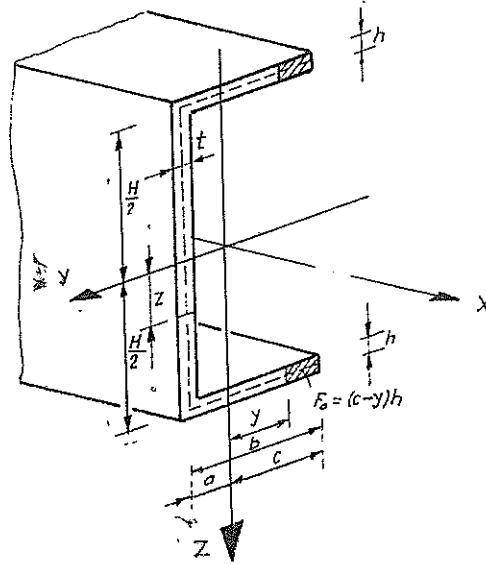
في بعض المقاطع العرضية الخاصة يستطاع بتفكير بسيط اعطاء معلومات كافية عن موضع مركز القص ، فمثلاً ينطبق مركز القص في المقاطع العرضية ذات التناظر ثنائي المحاور (التناظر الزوج) وكذلك المقاطع العرضية المتناظرة عكسياً (على سبيل المثال المقاطع العرضية على شكل

حرف z) على مركز الثقل . أما في المقاطع العرضية بمحور تناظر واحد (المتناظرة بالنسبة لمحور واحد) فيقع مركز القص على محور التناظر المذكور (شكل 10.23) .



شكل 10.23

سوف يتم الآن حساب الاجهادات المماسية التي تتشكل اثناء انعطاف بروفيل على شكل حرف C ومؤلف من مستطيلات رقيقة ، بالنسبة للمحور y (شكل 10.24) .



شكل 10.24

من أجل الجناح السفلي يتم ، بواسطة العلاقة التالية :

$$S_{ya}(y) = \frac{H}{2} (c-y) h$$

تعيين الاجهادات المماسية فيه:

$$\tau_{xy}(x,y) = Q_z(x) \frac{H(c-y)}{2 I_{yy}}$$

ومن أجل الجناح العلوي يتم بواسطة العلاقة الآتية :

$$S_{ya}(y) = - \frac{H}{2} (c-y) h$$

تعيين الاجهادات المماسية هناك :

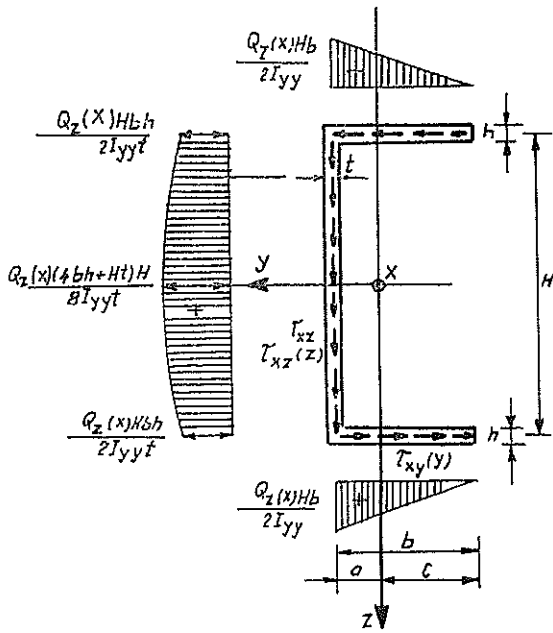
$$\tau_{xy}(x,y) = - Q_z(x) \frac{H(c-y)}{2 I_{yy}}$$

بسبب الافتراض أن $h, t \ll b, H$ يتم بواسطة العلاقة التالية :

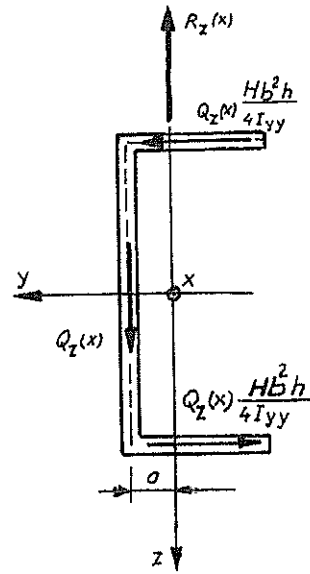
$$S_{ya}(z) = bh \frac{H}{2} + t \left(\frac{H}{2} - z \right) \frac{\left(\frac{H}{2} + z \right)}{2} = bh \frac{H}{2} + \frac{\left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right) t}{2}$$

تعيين الاجهادات المماسية في الجسد :

$$\tau_{xz}(x, z) = Q_z(x) \frac{bh H + \left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right) t}{2 I_{yy} t}$$



شكل 10.25



شكل 10.26

اقد تم في الشكل (10.25) رسم توزيع الاجهاد المماسي ، كما قد تم في الشكل (10.26) رسم محصلات الاجهادات المماسية المذكورة . تشكل القوى المؤثرة في الجناحين مزدوجة قوى يبلغ عزمها القيمة التالية :

$$Q_z(x) \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}}$$

لينا تتوازن محصلة القوى الخارجية $R_z(x)$ المؤثرة على الجزء الابر من الجائز مع القوة

المرضية $Q_z(x)$. في حالة الانعطاف المستقيم (الانعطاف وحيد المحور) لقضيب مقطعه العرضي هو بروفيل على شكل حرف [فان الجائز سوف يعمل (يحمل) حيثذ على الانعطاف والقتل . أما عزم القتل فيبلغ :

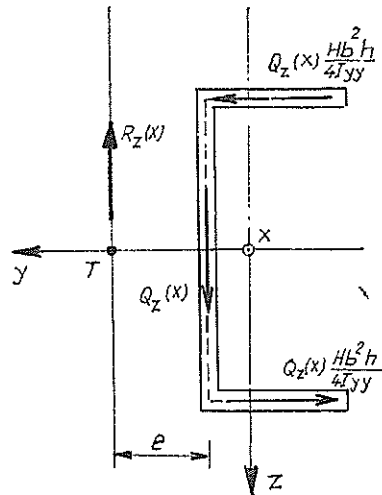
$$M_x(x) = Q_z(x) \left(a + \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}} \right)$$

حتى ولو كان الجسد أيضاً هو مستوي التحميل لا يزال يتشكل في المقطع العرضي قتل يبلغ عزمه :

$$M_x(x) = Q_z(x) \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}}$$

لتفادي القتل كلياً ينبغي أن يأخذ مستوي التحميل عن الجسد بعداً قدره (شكل 10.27) :

$$e = \frac{H^2 b^2 h}{4 I_{yy}}$$



شكل 10.27

في هذه الحالة فقط يتم تعيين الاجهادات المتشكلة في الجائز بواسطة العلاقات التالية :

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z \quad ; \quad \tau_{xz}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_{ya}(z)}{I_{yy} b(z)}$$

تسمى نقطة التقاطع T الواقعة على المحور y لاي مقطع عرضي يقع مستوي التحميل فيه موازياً للجسد بمركز القص (Schubmittelpunkt) أو مركز القوة العرضية (Querkraftmittelpunkt) ويعرف بأنه النقطة التي اذا مر منها أثر مستوي التحميل كان المقطع العرضي خالياً من القتل .

مثال 139 :

حمل جائز رقيق الجدار بالقوى العرضية Q_z, Q_y (شكل 10 28) .

المعطى : δ, α, a .

المطلوب : حساب :

١ - توزيع الاجهاد المماسي .

٢ - احداثيات مركز الثقل .

الحل :

١ - حسب المعادلة (10.17) تصلح من أجل الاجهادات المماسية العلاقة التالية :

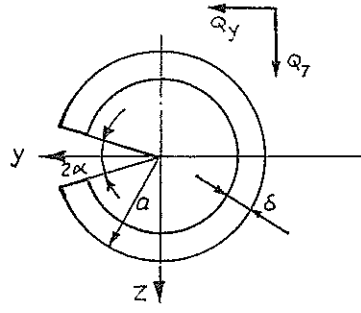
$$\tau(s) = \frac{Q_y}{I_{zz} \cdot \delta} S_z(s) + \frac{Q_z}{I_{yy} \cdot \delta} S_y(s)$$

لقد افترض فيها ان المحاور z, y هي محاور رئيسية . ينبغي في البداية تحديد موضع مركز الثقل .
للسهولة سوف نختار مجموعة محاور قطبية (شكل 10 29) . بما أن مركز الثقل يقع على محور التناظر لذلك يكتفى بإيجاد η_0 فقط .

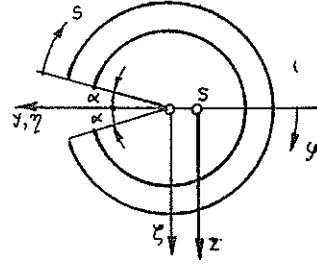
$$\eta = -a \cos \varphi, \quad \zeta = a \sin \varphi$$

$$\eta_0 = \frac{1}{F} \int_F \eta dF = - \frac{\int_{-(\pi-\alpha)}^{(\pi-\alpha)} a \cos \varphi a \delta d\varphi}{\int_{-(\pi-\alpha)}^{(\pi-\alpha)} \delta a d\varphi}$$

$$\eta_0 = -a \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\pi-\alpha} = -a \frac{\sin \alpha}{\pi-\alpha}$$



شكل 10.28



شكل 10 29

و :

$$z = \zeta$$

تعطى العلاقة التي تربط بين φ وبين الاحداثي s بواسطة العلاقة التالية :

$$s = a (\varphi + \pi - \alpha)$$

اثناء ايجاد عزوم العطالة سوف نهمل عزم العطالة الذاتي للعنصر السطحي $dF = a h d\varphi$ بالنسبة لمركز ثقله ، عندئذ ينتج :

$$I_{y'y} = I_{\eta\eta} = \int_{-(\pi-\alpha)}^{+(\pi-\alpha)} \zeta^2 \delta a d\varphi = 2 \delta a^3 \int_0^{\pi-\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = a^3 \delta (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \Big|_0^{\pi-\alpha}$$

$$I_{y'y} = a^3 \delta (\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$I_{zz} = I_{\xi\xi} - \eta_s^2 F = \int_{-(\pi-\alpha)}^{+(\pi-\alpha)} \eta^2 \delta a d\varphi - 2 a \delta (\pi - \alpha) \left(\frac{a \sin \alpha}{\pi - \alpha} \right)^2$$

$$I_{zz} = 2a^3 \delta \left(\int_0^{\pi-\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{\sin^2 \alpha}{\pi - \alpha} \right) = a^3 \delta \left(\pi - \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\pi - \alpha} \right)$$

بواسطة العلاقة (10-16) يتم تعيين العزوم الستاتيكية :

$$S_z = \int_0^s y \delta ds , \quad S_y = \int_0^s z \delta ds$$

بالاستعانة بالعنصر الطولي $ds = a d\varphi$ يشج :

$$S_z = \int_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi} (-a \cos \varphi - \eta_s) \delta a d\varphi = a^2 \delta \left(-\sin \varphi - \frac{\eta_s \varphi}{a} \right) \Big|_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi}$$

$$S_z = a^2 \delta \left(\frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} \varphi - \sin \varphi \right)$$

$$S_y = \int_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi} a \sin \varphi \delta a d\varphi = a^2 \delta \int_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = a^2 \delta (-\cos \varphi) \Big|_{-(\pi-\alpha)}^{\varphi}$$

$$S_y = a^2 \delta (-\cos \alpha - \cos \varphi)$$

بالتبديل في العلاقة الاولى يتم تعيين الاجهاد المماسي :

$$\tau(s) = \frac{Q_y}{a \delta} \frac{\frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} \varphi - \sin \varphi}{\pi - \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\pi - \alpha}} -$$

$$- \frac{Q_z}{a \delta} \frac{\cos \alpha + \cos \varphi}{\pi - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}$$

لوقوع مركز القص على محور التناظر لذلك فان :

$$\zeta_T = z_T = 0$$

لحساب y_T أو η_T سوف تستخدم العلاقة (10.33) :

$$\eta_T = + \frac{1}{I_{yy}} \int_0^l S_y r^* ds$$

ان المسافة r^* هي ثابتة وذلك لأن المحسوب هنا هو η_T وليس y_T .

$$r^* = a$$

بذلك يصبح :

$$\eta_T = -\frac{1}{I_{yy}} \int_{-(\pi-\alpha)}^{+(\pi-\alpha)} a^2 \delta (+\cos \alpha + \cos \varphi) a^2 d\varphi$$

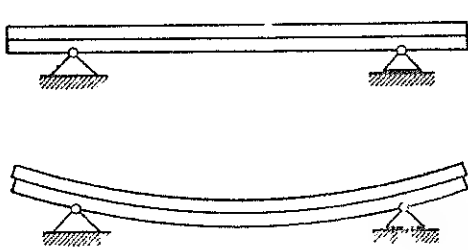
$$\eta_T = -\frac{2a^4 \delta [(\pi-\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha]}{a^3 \delta (\pi-\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)}$$

$$\eta_T = -2a \frac{(\pi-\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha}{\pi-\alpha + \sin \alpha \cos \alpha}$$

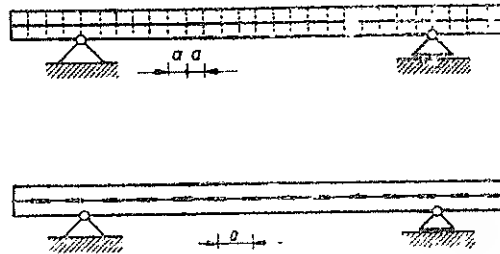
١٠ - ٧ حساب وسائل الاتصال

فيما يلي سوف يتم ، لحساب البراشيم (Nieten) والمسامير (Naegln) والاو تاد (Dübeln) والخ، استخدام العلاقة التالية :

$$\tau_{xz}(x, z) = \tau_{zx}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_{y,}(z)}{I_{yy} b(z)} \quad (10.39)$$

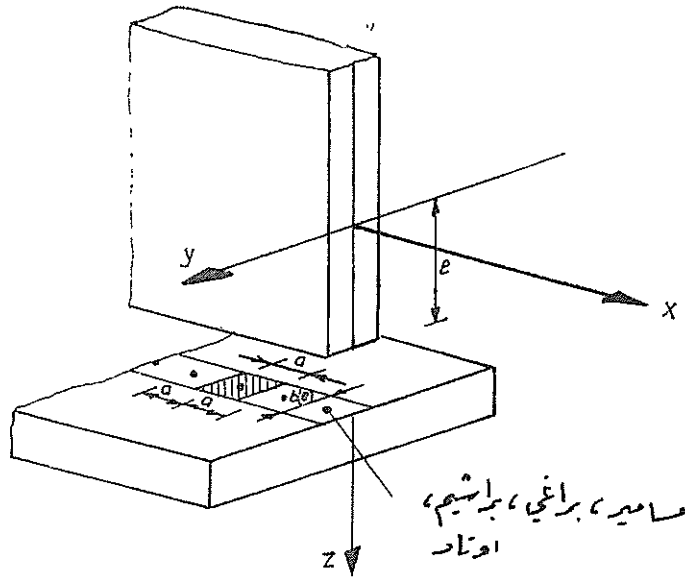


شكل 10-30



شكل 10.31

بوضع جائزين فوق بعضها البعض ، عندئذ يقوم كل منها اثناء الانعطاف بانتقال متبادل (شكل 10.30) وذلك لعدم إمكانية نقل (حمل) اجهادات مماسية طولية τ_{xz} على سطوح تماسها . لمنع هذا الانتقال يصار لربط (لوصل) كلا الجائزين مع بعض بواسطة مسامير او براشيم او او تاد (شكل 10.31) ، بذلك يتم نقل الاجهادات المماسية الطولية بواسطة وسائل الاتصال وبذلك ينشأ عن ذلك جائز موحد (متكامل) . عندما يرمز المسافة بين وسائل الاتصال (وسائل الربط) بالحرف a ، عندئذ يتحمل (بشكل تقريبي) كل من اعضاء الاتصال الموجودة على سطح التماس $z=\text{const}=e$ حسب العلاقة (10-39) القوة التالية (شكل 10 32):



شكل 10.32

$$\tau_{xz}(x,e) b(e) a(x) = T(x) = \frac{Q_z(x) S_{yn}(e)}{I_{yy}} a(x)$$

(في الحقيقة لا يقوم كل عضو من اعضاء الاتصال بنقل نفس القيمة أما ما سبق ذكره فهو فرض ولكنه هو المستعمل في الحياة العملية) . بالاستعانة بالقوة القاصة المسموحة (zulässigen Scherkraft) للمادة التي صنعت منها اعضاء الاتصال ، عندئذ تصلح المتراجحة التالية :

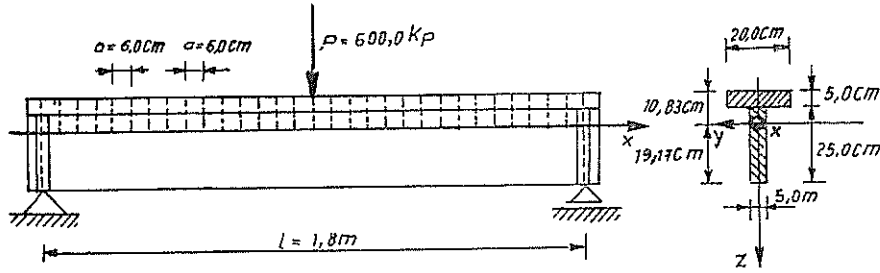
$$T(x) = \frac{Q_z(x) S_{yn}(e)}{I_{yy}} a(x) \leq \text{zul } T \quad (10.40)$$

بواسطتها يتم اجراء الكشف عن الاجهاد (Spannungsnachweis) او تعيين المسافة اللازمة :

$$\text{erf } a(x) \leq \frac{\text{zul } T}{Q_z(x)} \frac{I_{yy}}{S_{yn}(e)} \quad (10.41)$$

مثال (1.1) :

يتألف جائر (حامل) خشبي من لوحين متصلين مع بعض بواسطة المسامير (مسمرين) . يحمل الجائر في منتصفه بقوة وحيدة $P=600 \text{ kp}$. يبلغ طول الجائر $l=1,80 \text{ m}$ أما المقطع العرضي للجائر فهو الممثل في الشكل (10 33) . يبلغ البعد بين المسامير $a=6,0 \text{ cm}$. المطلوب : تعيين القوة القاصة الاعظمية في المسمار الواحد .



شكل 10.33

الحل :

في البداية يمين مركز الثقل وعزم العطالة السطحي $I_{yy} = 19,2 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$. ان القوة العرضية الموجودة على يسار وكذلك الموجودة على يمين القوة P هي ثابتة (يوضح ذلك بتخيل مخطط Q) وتبلغ القيمة المطلقة لكل منهما $|Q_z| = 300,0 \text{ kp}$. يبلغ العزم الستاتيكي S_{ya} القيمة التالية :

$$|S_{ya}| = 5,0 \cdot 25,0 \cdot (19,17 - 12,50) = 833,0 \text{ cm}^3$$

أو

$$|S_{ya}| = 5,0 \cdot 20,0 \cdot (10,83 - 2,50) = 833,0 \text{ cm}^3$$

وبذلك فان القوة القاصة في المسار الواحد هي :

$$T = \frac{300,0 \cdot 833,0}{19200,0} \cdot 6,0 = 78,1 \text{ kp}$$

مثال 141 :

تقوى أجنحة جائز (حامل) فولاذي من النوع IP 20 بصفيحتين فولاذيتين $300 \cdot 20$. الربط بين الصفائح وأجنحة الجائز سوف تستخدم براشيم يبلغ البعد بين كل منها $a = 7,0 \text{ cm}$ (شكل 10-34) .

المطلوب : حساب قطر البرشيم d الذي ينبغي اختياره كوسيلة للربط وذلك عندما تبلغ القوة العرضية التي يلزم نقلها (حملها) هي $Q_z = 50,0 \text{ Mp}$ وان اجهاد القص المسموح (zulaessige Scherspannung) هو $\tau = 1,2 \text{ Mp cm}^{-2}$.

الحل :

بإدخال ثقب البراشيم وما ينتج عنها من أضعاف المقطع العرضي بعين الاعتبار ، عندئذ يتم بواسطة عزم العطالة السطحي :

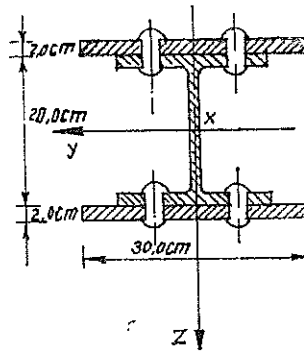
$$I_{yy} = 5950 + 2 \cdot \frac{30,0 \cdot 2,0^3}{12} + 2 \cdot 30,0 \cdot 2,0 \cdot 11,0^2 = 20510,0 \text{ cm}^4$$

والعزم الستاتيكي :

$$|S_{va}| = 30,0 \cdot 2,0 \cdot 11,0 = 660,0 \text{ cm}^3$$

التوصل للقوة التي ينقلها زوج من البراشيم :

$$T = \frac{51,0 \cdot 660,0 \cdot 7,0}{20510,0} = 11,3 \text{ Mp}$$



شكل 10.34

من العلاقة التالية :

$$2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{T}{\text{zul} \tau}$$

يتم تعيين القطر المطلوب للبراشيم :

$$d \geq \sqrt{\frac{2T}{\pi \text{zul} \tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11,3}{\pi \cdot 1,2}} = 2,45 \text{ cm}$$

لذلك سوف تختار للربط (التوصل) المذكور براشيم أقطارها 2,5 cm .

فرضيات المتانة « فرضيات الانكسار »

١١ - ١ عموميات

يقود تصميم عناصر الانشاءات المحملة (التي تعمل) على كل من الشد (او الضغط) والقص والقتل والانعطاف او على التحنيب الذي تم بحثه في الفصول السابقة الى مقارنة قيم الاجهادات الناعظمية او المماسية الاعظمية ($\max \sigma$ او $\max \tau$) مع قيم الاجهادات الناعظمية او المماسية المسموحة ($\text{zul } \sigma$ او $\text{zul } \tau$) . كما يتطلب الكشف عن الاجهادات في اجزاء الانشاءات الى مقارنة الاجهادات الموجودة مع الاجهادات المسموحة وذلك حسب العلاقات التالية :

$$\sigma \leq \text{zul } \sigma \quad \text{أو} \quad \tau \leq \text{zul } \tau$$

يتم تعيين الاجهادات المسموحة $\text{zul } \sigma$ و $\text{zul } \tau$ (التي تعتبر قيماً نوعية لكل مادة) بالاستعانة باجهاد الانسياب او اجهاد الانكسار (اجهاد الكسر) اللذين يتم الحصول عليها من تجربة الشد (او الضغط) وتجربة القتل التي تجرى على قضيب اختبار ثبت أبعاده في دوائر المواصفات . لكن قلما يوجد هناك عنصر انشائي يحتوي على حالة اجهاد محورية بسيطة امثال حالات الاجهاد السابقة الذكر بل على عكس ذلك فان غالب العناصر الانشائية تحتوي على حالات اجهاد معقدة تؤدي لان تشكل في نفس الوقت في كل نقطة من النقاط اجهادات ناعظمية ومماسية . وهنا تتجلى اهمية السؤال التالي :

كيف يجرى حساب (تصميم) العناصر الانشائية التي تحتوي على حالة اجهاد عامة وكيف يتم الكشف عن الاجهادات في تلك العناصر ، وهل ينكسر العنصر الانشائي المحمل بحالة اجهاد عامة عندما تصل في نقطة ما منه الاجهادات الناعظمية او الاجهادات المماسية الى قيمة الاجهاد الذي يؤدي لانكسار قضيب اختبار من نفس المادة ومحمل بحالة اجهاد محورية ام لا ، وماهي العلاقة التي تربط بين حادثة الانكسار في حالة الاجهاد العامة (المستوية او الفراغية) وبين حادثة الانكسار في حالة الاجهاد المحورية . يمكن التعبير عن هذه المشكلة بالطريقة التالية :

تسيطر (تسود) في نقطة ما من جسم حالة اجهاد معينة (عندما تكون حالة الاجهاد المذكورة حالة اجهاد مستوية فانها تتعين من خلال الاجهادات $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$) .

أما السؤال فيعبر عنه بالشكل التالي ، هل ينهار (ينكسر) الجسم المذكور عندما تبلغ احدى القيم الاربعة التالية ، الاجهاد الناطمي σ والاجهاد المماسي τ والتمدد ϵ وزاوية الانزلاق γ قيمة معينة ام هل ان السبب في الانهيار (الانكسار) عائد لقيمتين منها ام هل أن كافة القيم مسؤولة عن ذلك . ليست الاجابة على هذا السؤال بالامر السهل ولا المعين وذلك لتعدد المؤثرات التي تؤدي الى الانكسار ، لذا قام الباحثون على مرور الزمن بالتفتيش عن فرضيات تعالج طريقة الاجابة على هذا السؤال ، سيتم فيما يلي ذكر اهمها فقط ، وللتأكد من مدى صحة كل من هذه الفرضيات ومطابقتها لظاهرة الفعلية سوف يلجأ الى مقارنة نتائج الفرضيات مع نتائج التجارب والخبرات .

حالة خاصة (حالة الاجهاد المستوية) :

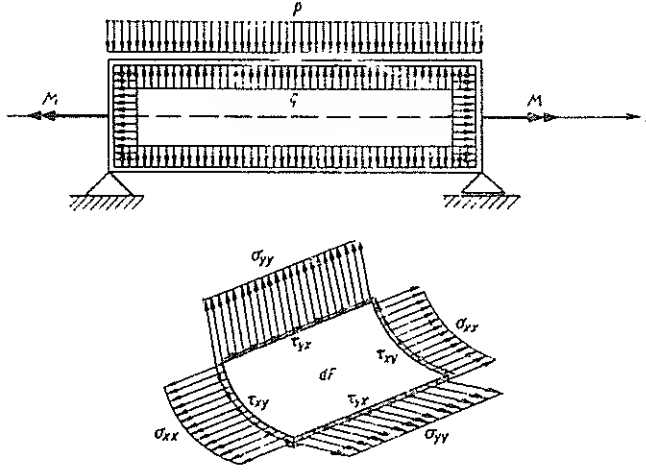
المعلوم : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$

تظهر حالة الاجهاد المستوية ، على سبيل المثال ، في الانبوب الممثل في الشكل (11.1) والمحمل على الانطاف نتيجة لتأثير الجولة الخطية الموزعة بانتظام p وعلى الشد نتيجة لتأثير الضغط الداخلي المنتظم q وعلى القتل نتيجة لتأثير العزم M . تبلغ القيم الحدية للاجهادات الناطمية والمماسية في نقطة ما من عنصر انشائي تسيطر عليه حالة اجهاد مستوية حسب العلاقات (2.28a) , (2.28 b) , (2.28 d) ما يلي :

$$\begin{aligned} \max \sigma &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \min \sigma &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \max \tau &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (11.1)$$

والآن يطرح السؤال التالي : كيف يتم الكشف عن الاجهادات في مثل هذه الحالة .

يمكن الافتراض ، بشكل مبني ، بأن كافة القيم الحدية للاجهادات الناطمية وكذلك أيضاً الاجهادات المماسية يجب ان تحقق بصورة مستقلة المتراجحات التالية :



شكل 11.1

$$\text{zul } \sigma_D \leq \max_{\min \sigma} \sigma \leq \leq \text{zul } \sigma_z$$

$$-\text{zul } \tau \leq \max \tau \leq \text{zul } \tau$$

لكن التجارب تشير الى عدم صحة ذلك الافتراض كما تشير الى وجود اجهاد واحد ، يسمى بالاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) ويرمز له بالرمز σ_v ، وينشأ عن الاجهادات σ_{xx} ، σ_{yy} ، τ_{xy} وهو المسؤول وحده عن ايجاد المادة (انكسار المادة) . أما العلاقة التي تربط بين σ_v وبين الاجهادات σ_{xx} ، σ_{yy} ، τ_{xy} فهي غير محددة وهي وظيفة الفرضيات التي سيتم دراستها لاحقاً . إذاً فإن هدف فرضيات المتانة هو اقتراح مقاييس لتعيين متانة عنصر انشائي موجود في حالة اجهاد معقدة (حالة اجهاد عامة) ووفق هذه المقاييس سوف تعين اجهادات المقارنة (الاجهادات المكافئة) (أي يعين اجهاد الشد المحوري) للعنصر الانشائي الذي يكافئ بمقاومته عنصراً يقع في حالة اجهاد معقدة .

١١ - ٢ فرضية الاجهادات الرئيسية (فرضية الاجهادات الناعظمية الاعظمية) (Rankine)

تعتبر فرضية الاجهادات الناعظمية الاعظمية (فرضية الاجهادات الرئيسية) أقدم فرضية للانكسار تعيد هذه الفرضية بصورة رئيسية انكسار الجسم (انكسار المادة) الى بلوغ احدى الاجهادات الناعظمية الاعظمية (الاجهادات الرئيسية) الثلاثة في نقطة ما منه ، اجهاد الانسياب σ_F او

بالأحرى اجهاد الانكسار σ_B . الذي يتم الحصول عليه من تجربة الشد المجرأة على قضيب اختبار من نفس المادة وبذلك يتم الحصول على الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) الاول ممثلاً بالعلاقة التالية :

$$\sigma_{vi} = \sigma_i$$

(حيث أن $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ وهي تمثل الاجهادات الرئيسية الثلاثة) . بواسطة هذه الفرضية يمكن التعبير عن الشرط التصميمي (شرط المقايسة) بسهولة وبالشكل التالي :

$$\begin{aligned} -\sigma_F &< \sigma_1 < \sigma_F \\ -\sigma_F &< \sigma_2 < \sigma_F \\ -\sigma_F &< \sigma_3 < \sigma_F \end{aligned} \quad (11-2)$$

تتطابق نتائج هذه النظرية مع نتائج تجارب المواد شديدة التقصف (sehr spröde Materialien)، اما بالنسبة للمواد الأخرى فتشير التجارب الى ان هذه النظرية ليست نظرية دقيقة (اي انها لا تمتلك الدقة الكافية) .

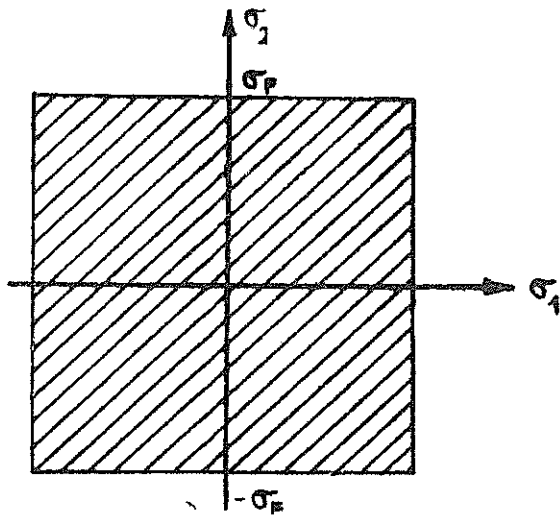
حالة خاصة (حالة الاجهاد المستوية) :

من اجل حالة الاجهاد المستوية ينعدم الاجهاد الناظمي الثالث $\sigma_3 = 0$. يمكن تمثيل الشرط التصميمي لحالة الاجهاد المستوية على شكل مخطط . استناداً على هذه الفرضية لا يظهر انكسار المادة عندما تقع حالة الاجهاد ضمن المجال المهر الممثل في الشكل (11.2) .

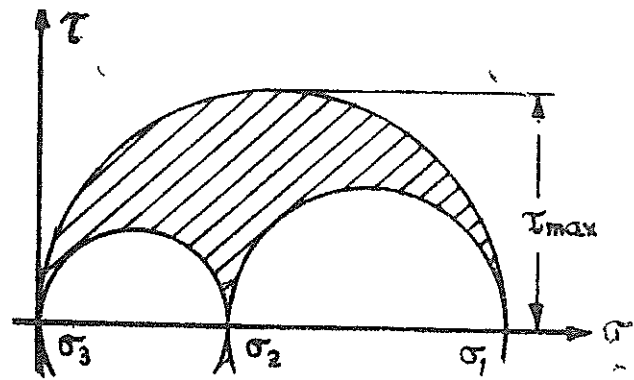
ان لهذه الفرضية نقاط ضعف كثيرة تظهر بمقارنة نتائج هذه الفرضية مع نتائج التجارب . فمثلاً ليس صحيحاً ان يكون للاجهاد الناظمي فقط التأثير على حادثة الانكسار . وكذلك تشير هذه الفرضية الى انكسار جسم محمل على الضغط من كل جوانبه عند بلوغ اجهاد الضغط اجهاد انسياب المادة وهذا مالا يتفق مع نتائج التجارب .

١١ - ٣ فرضية التمددات الرئيسية (Bach)

تعيد فرضية التمددات الرئيسية سبب حادثة الانكسار بصورة رئيسية الى التغيرات الاعظمية مما يؤدي للحصول على العلاقة التالية :



شكل 11.2



شكل 11.3

$$\sigma_{v2} = E |\epsilon_1| = |\sigma_1 - \mu_v(\sigma_2 + \sigma_3)| \quad (11-3)$$

حيث ان

$$|\epsilon_1| \geq |\epsilon_2| \geq |\epsilon_3|$$

تسير نتائج هذه النظرية الى اختلافات واضحة مع نتائج التجارب ولكنها بالرغم من ذلك مازال تستخدم في عديد من الطرائق الحسابية .

١١ . ٤ فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية (Coulomb, Saint - Venant, Guest)

لقد كانت الانكسارات القصية (الانكسارات الناتجة عن الاجهادات المماسية) التي تحدث في تجربة الشد / الضغط حافزاً لبعض العلماء في اعادة السبب في حادثة الانسياب وكذلك حادثة الانكسار الى الاجهادات المماسية الاعظمية وحددها . فحادثة الانسياب وكذلك حادثة الانكسار تعود حسب هذه الفرضية لبلوغ الاجهاد المماسي الاعظمي (الموجود في حالة الاجهاد العامة) القيم التالية :

$$\max \tau = \frac{\sigma_F}{2} \quad , \quad \max \tau = \frac{\sigma_B}{2} \quad (11-4)$$

أما $\sigma_B - \sigma_F$ فيتم الحصول عليها من تجربة الشد . هذه العلاقة (من وجهة نظر هذه الفرضية) هي التي تربط بين حالة الاجهاد العامة (المستوية او الفراغية) وبين حالة الاجهاد المحورية (الخطية) المتجانسة التي تتعين نتائجها بواسطة تجارب الشد / الضغط او

القتل (وتتلخص العمليات في هذه الفرضية بمقارنة الاجهادات المماسية الانظمة τ_1, τ_2, τ_3 الموجودة في حالة الاجهاد العامة مع الاجهادات المماسية اللازمة لحدوث الانسياب او بالاحرى الانكسار $\tau = \sigma_F/2 = \sigma_{v3}/2$ في قضيب الاختبار الذي يمثل حالة اجهاد خطية متجانسة والذي تبلغ اجهاداته الناعمية σ_{v3}) . من هذه الفرضية يتم الحصول على علاقة الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) الثالث التالية :

$$\sigma_{v3} = 2 \max \tau = \sigma_1 - \sigma_3$$

حسب هذه النظرية فان الاجهاد الناعمي المتوسط σ_2 لا يلعب دوراً في حادثة الانكسار (اي انه لا يؤثر على حادثة الانكسار) . تتأكد صحة هذه الفرضية فقط في المواد التي تحتوي على حد انسياب بارز وخاصة الفولاذ . وهذا ما قد شجع العالم مسور (MOHR) بالتفتيش عن فرضية تمتد مجال صلاحيتها على كل المواد ، لكن فرضية الحالة الحدية المرنة التي تمكن العالم مسور من الحصول عليها والتي تمثل ارتباطاً بين فرضية الاجهادات المماسية لم تستطع الاحتفاظ طويلاً بمركز الصدارة . بواسطة فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية يمكن التعبير عن شرط التصميم (شرط المقايسة) بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} & \text{--- } \max \tau < \tau_1 < \max \tau \\ & \text{--- } \max \tau < \tau_2 < \max \tau \\ & \text{--- } \max \tau < \tau_3 < \max \tau \end{aligned} \quad (11-5)$$

حسب النتائج التي تم الحصول عليها من العلاقة (231) يمكن التعبير عن الاجهادات المماسية بواسطة الاجهادات الرئيسية وذلك بالشكل التالي :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} , \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} , \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (11-6)$$

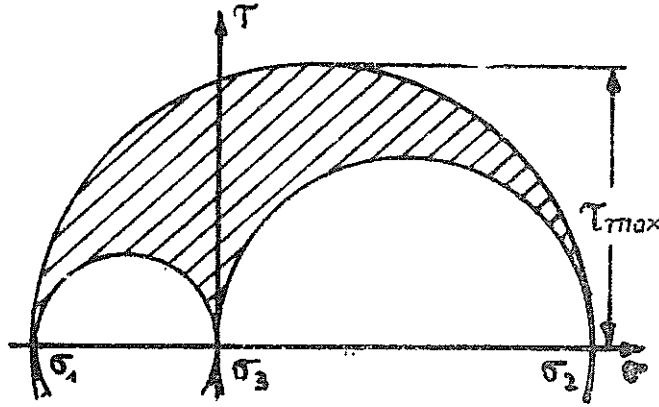
مما يجعل الشرط التصميمي يأخذ الشكل الآتي :

$$\begin{aligned} & \text{--- } \sigma_F < \sigma_2 - \sigma_3 < \sigma_F \\ & \text{--- } \sigma_F < \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_F \\ & \text{--- } \sigma_F < \sigma_1 - \sigma_2 < \sigma_F \end{aligned} \quad (11-7)$$

حالة خاصة (حالة الاجهاد المستوية $\sigma_3 = 0$) :

سيتم الآن التفريق بين حالتين :

أ - حالة كون $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ ، عندئذ تصلح دائرة اجهاد مور المثلة في الشكل (11.3) .



شكل 11.3b

وبذلك فان الشرط التصميمي يصبح بالشكل التالي :

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2} \leq \frac{\sigma_F}{2} \quad (11.8)$$

وهو يشير الى ان الاجهاد الوسطي σ_3 ، حسب هذه الفرضية ، لا يلعب دوراً في حادثة الانكسار . تعطى الاجهادات الحدية التي تحقق افكار هذه النظرية والتي تقع في الربع الاول من مخطط σ_1, σ_2 بواسطة القيم التالية (شكل 11.4) :

$$\sigma_1 = \text{const.} = \sigma_F \quad (11-9)$$

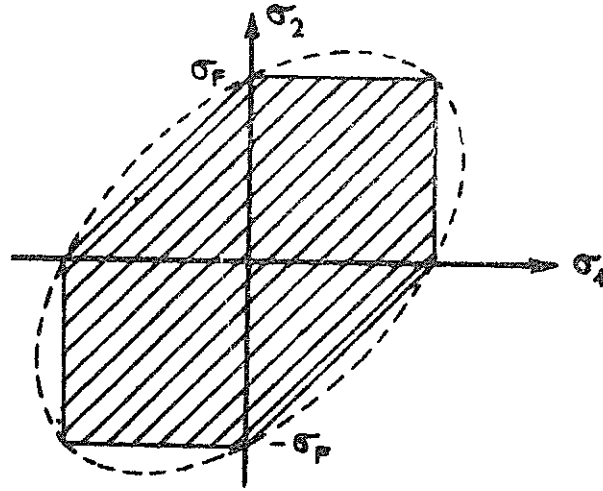
$$\sigma_2 = \text{const.} = \sigma_F$$

عندما تكون الاجهادات الناعمية σ_1, σ_2 أصغر من الصفر عندئذ يتم ، بنفس الفكرة ، الحصول على الاجهادات الحدية الواقعة في الربع الثالث .

ب - حالة كون $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$.

لقد تم تمثيل دائرة مور المائدة لهذه الحالة في الشكل (11.3b) . يعطى الاجهاد المماسي الاعظمي الآن بواسطة العلاقة التالية :

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} < \frac{\sigma_F}{2} \quad (11-10)$$



شكل 11.4

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_F \quad \text{أو} \quad (11.11)$$

تمثل حدود الاجهاد في الربع الثاني من مخطط σ_2, σ_1 ، وذلك كما تعطيه العلاقة (11.11) ، بواسطة مستقيم ولقد تم تمثيلها في الشكل (11.4) . تنطبق نفس الفكرة على حدود الاجهاد في الربع الرابع من مخطط σ_2, σ_1 . حسب نظرية الاجهادات المماسية الاعظمية يتم انكسار جسم عندما تقع حالة الاجهاد في موضع ما منه داخل المجال الممشر الممثل في الشكل (11.4) . يتطابق المخطط المذكور في مجاله الاول والثالث مع المخطط العائد لنظرية الاجهادات الناعظمية الاعظمية . يفضل ، في الحسابات العملية ، استخدام العلاقة (11.10) وذلك عندما تكون الاجهادات $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ هي المعلومة وتكون الاجهادات الرئيسة هي المجهولة .

من اجل الحالة آ $(\sigma_1 > \sigma_2 > 0)$:

من دائرة اجهاد مور يستطاع بسهولة ، من اجل هذه الحالة اشتقاق العلاقات التالية :

$$\max \tau = \frac{\sigma_1}{2} < \frac{\sigma_F}{2} \quad (11.12)$$

$$\max \tau = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right] < \frac{\sigma_F}{2} \quad (11.13)$$

على كل حال لا يجوز تصميم عنصر انشائي بحيث تبلغ اجهاداته الفعلية (الموجودة فيه) حد الانسياب ، بل يسمح للاجهادات الموجودة ، حسب الحالات المترتبة ، من بلوغ جزء من اجهاد الانسياب وهذا ما يسمى بالاجهاد المسموح . وبذلك يأخذ الشرط التصميمي الشكل الآتي :

$$\sigma_1 = \sigma_{3v} = \frac{1}{2}[\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} < \text{zul}\sigma \quad (11-11)$$

يسمى الاجهاد σ_{3v} بالاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) التابع للفرضية الثالثة (فرضية الاجهاد الماسي الاعظمي) وبواسطته يمكن مقارنة حالة الاجهاد العامة مع حالة الاجهاد المحورية .

من اجل الحالة ب ($\sigma_2 < 0$, $\sigma_1 > 0$) :

يصبح الشرط التصميمي من اجل هذه الحالة كالتالي :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} < \text{zul}\tau = \frac{\text{zul}\sigma}{2} \quad (11-15)$$

$$\sigma_{3v} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} < \text{zul}\sigma \quad (11-16)$$

في كثير من الحالات تنعدم $\sigma_{yy} = 0$ (على سبيل المثال ، القضيب المحمل على الانعطاف والقتل دفعة واحدة) مما يسهل الشرط التصميمي ليأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_{3v} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xy}^2} < \text{zul}\sigma \quad (11-18)$$

١١ - فرضية العمل الاعظمي للتشوه (Hencky , Mises , Huber , Scheicher)

ان افضل تطابق يتم بين نتائج التجارب وبين النتائج النظرية المحسوبة هو الذي ينتج عن فرضية العمل الاعظمي للتشوه . فلقد تبين اخيراً بأن الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) σ_v للمواد المستعملة في الحياة العملية والمحسوب بفرضية الاجهادات الناعظمية الاعظمية وكذلك المحسوب بفرضية التمددات الرئيسية (التغيرات النسبية الطولية الرئيسية) صغير جداً وان الاجهاد المقارن المحسوب بفرضية الاجهادات الماسية الاعظمية كبير جداً . أما فرضية العمل الاعظمي للتشوه فتعطي قيماً دقيقة وعلاوة على ذلك فهي تشير الى عدم إمكانية انكسار المادة بواسطة حالة اجهاد من نوع الضغط الهيدروستاتيكي الذي يؤثر من كل الجهات (ضغط ثابت) .

لكل هذه الاسباب فقد احتلت هذه الفرضية (فرضية العمل الاعظمي للتشوه) من وجهة النظر الحديثة لحادثة الانكسار مكاناً مرموقاً .

تعيد هذه الفرضية ، السبب الاول في انكسار المادة الى عمل تشوه معلوم يطبق على الجسم . يمكن اعادة عمل تغير الشكل الذي سيرمز له بالرمز A الى حدين ، الحد الاول ناتج عن تغير حجم العنصر الحجمي والحد الثاني ناتج عن تغير المظهر (تشوّهه) . يسمى الحد الاول عمل تغير الحجم ويرمز له بالرمز A_v اما الحد الثاني فيسمى عمل التشوه ويرمز له بالرمز A_g .

تشير التجارب الى ان الحد الاول (عمل تغير الحجم) لا يؤثر على حد الانكسار وبذلك فان المسؤول الاول عن ذلك هو عمل التشوه A_g وهو الذي سيجعل اساساً للمقارنة بين حالة الاجهاد العامة (الفراغية أو المستوية) وبين حالة الاجهاد المحورية . للحصول على عمل التشوه A_g سوف يطرح عمل تغير الحجم (كالذي تقوم به حالة إجهاد من نوع الضغط الهيدروستاتيكي المنتظم الذي يؤثر على الجسم من جميع الجهات والذي يؤدي الى تغير في الحجم فقط) A_v من عمل تغير الشكل A . يعطى عمل التشوه من اجل حالة الاجهاد الفراغية بالعلاقة التالية :

$$A_g = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (11-19)$$

بالاستعانة بالقيم التالية :

$$\sigma_x = \sigma ; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

يتم الحصول من العلاقة السابقة على عمل التشوه المائد لحالة الاجهاد الخطية التالي :

$$A_g = \frac{2\sigma^2}{12G} \quad (11-20)$$

وبمقارنة هذه العلاقة ، التي تمثل معادلة العمل التابعة لحالة الاجهاد المحورية (لتجربة الشد) مع علاقة العمل من اجل حالة الاجهاد العامة (11.19) يتم الحصول على الاجهاد المقارن الرابع الآتي :

$$\sigma_{v,4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (11-21)$$

بالاستعانة بالمحاور الرئيسية تصبح علاقة الاجهاد المقارن السابقة بالشكل التالي :

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \quad (11-22)$$

تصلح هاتين العلاقتين من أجل حالة الاجهاد الفراغية العامة . حسب هذه النظرية فإن للاجهادات الرئيسية الثلاثة تأثير على حادثة الانكسار . ولقد اظهرت المقارنة بين نتائج التجارب ونتائج هذه النظرية تطابقاً جيداً مما جعلها تحتل مكان الصدارة بين فرضيات الانكسار . أما الشرط التصميمي فيأخذ الشكل التالي :

$$\sigma_{v4} < \text{zul } \sigma \quad (11-23)$$

حالة الاجهاد المستوية ($\sigma_3 = 0$) :

من أجل حالة الاجهاد المستوية يتم الحصول من العلاقة (11.22) على علاقة الاجهاد المقارن التالية:

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} < \text{zul } \sigma \quad (11-24)$$

تمثل المعادلة التالية :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2$$

في مجموعة المحاور σ_1, σ_2 قطعاً ناقصاً . يمثل الفراغ الذي يغلقه القطع المذكور ، المجال الذي إذا وقعت فيه الاجهادات لم يحدث الانكسار . يعين القطع الناقص بدقة الحدود التي أوجبتها نظرية الاجهادات المماسية الاعظمية (شكل 10.4). للتمكن من إعطاء علاقة الاجهاد المقارن بدلالة $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ يابجاً لدائرة الاجهاد نستخلص منها العلاقة التي تربط بين σ_1, σ_2 وبين الاجهادات $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ التالية :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (11-25)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

بتعويض هذه العلاقة في العلاقة (11.24) ينتج :

$$\sigma_{v4} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3 \tau_{xy}^2} \quad (11-26)$$

عندما تكون $\sigma_{yy}=0$ عندئذ تصبح هذه العلاقة بالشكل التالي :

$$\sigma_{y4} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (11-27)$$

١١ - ٥ تطبيق الفرضيات على أنواع خاصة للتحميل

في حالة تشكّل اجهاد ناظمي واجهاد مماسي في آن واحد يصبح بناء معادلات حساب الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) اقل تعقيداً منه في حالة الاجهاد العامة . تظهر امثال هذه الحالة ، على سبيل المثال ، كما في حالة التحميل بالانعطاف والقتل دفعة واحدة .

بسبب كون :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 , \quad \tau_{xy} \neq 0 , \quad \sigma_{xx} \neq 0$$

تصبح علاقات حساب الاجهادات الرئيسية بالشكل التالي :

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \right] , \quad \sigma_2 = 0 \quad (11.28)$$

كما تصبح علاقة الاجهاد المقارن الاول (الناتج عن فرضية الاجهادات الناضمية الاعظمية) بالشكل التالي :

$$\sigma_{v1} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \right] \quad (11.29)$$

اما علاقة الاجهاد المقارن الثاني (الناتج عن فرضية التمددات الرئيسية) فتأخذ من اجل هذه الحالة ، الشكل التالي :

$$\sigma_{v2} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \left[1 - \mu + (1 + \mu) \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \right] \quad (10-30)$$

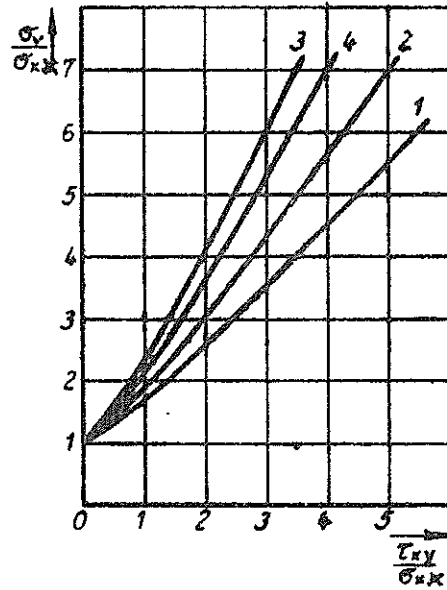
وكذلك تأخذ علاقة الاجهاد المقارن الثالث (الناتج عن فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية) الشكل التالي :

$$\sigma_{v3} = \sigma_{xx} \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \quad (11-31)$$

اما علاقة الاجهاد المقارن الرابع (الناتج عن فرضية عمل التشوه الاعظمي) فتأخذ الشكل الآتي :

$$\sigma_{v4} = \sigma_{xx} \sqrt{1 + 3\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx}}\right)^2} \quad (11-32)$$

لقد تم في الشكل (11-5) تمثيل σ_v/σ_{xx} (حاصل قسمة الاجهاد المقارن على الاجهاد الناطمي) بالنسبة لـ τ_{xy}/σ_{xx} (حاصل قسمة الاجهاد المماسي على الاجهاد الناطمي) .



شكل 11-5

يلاحظ من المنحنيات بأن فرضية الاجهادات الرئيسية وفرضية التمددات الرئيسية تعطي قيماً صغيرة نسبياً بينما تعطي فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية قيماً كبيرة نسبياً (اعلى من قيم بقية الفرضيات) . ان سبب هذه الفروقات ناتج عن إختلاف الفرضيات في تقدير تأثير الاجهادات المماسية .

مثال 1-12 :

محور اسطواناني دائري الشكل يحمل على الانعطاف والفتل (شكل 11.6) .

المعطى : قيم القطع في المقطع العرضي المدروس : عزم الانعطاف $M_y(x)$ وعزم الفتل $M_x(x)$.
 قطر دائرة المقطع العرضي للمحور D .

المطلوب : حساب اجهادات المقارنة للمقطع العرضي التي تنتج عن فرضية التناثنة الثالثة σ_{v3} والرابعة σ_{v4} .

الحل :

تبلغ العزوم المقاومة للانحناء في الدائرة القيم التالية :

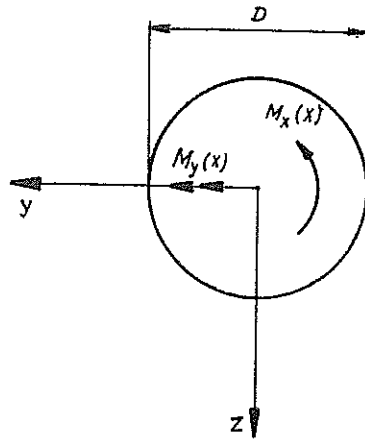
$$w_y = w_z = w = \frac{\pi D^3}{32}$$

كما يبلغ العزم المقاوم للفتل في الدائرة القيمة الآتية :

$$w_t = w_p = 2 w = \frac{\pi D^3}{16}$$

أما الاجهادات المتشكلة على حدود المقطع العرضي فتبلغ :

$$\sigma_{xx}(x) = \pm \frac{M_y(x)}{w} , \quad \sigma_{zz}(x) = 0 , \quad \tau(x) = \frac{M_z(x)}{2w}$$



شكل 11.6

يبلغ الاجهاد المقارن حسب فرضية الاجهاد المماسي الاعظمي القيمة التالية :

$$\sigma_{v3}(x) = \sqrt{\left[\frac{M_y(x)}{w}\right]^2 + 4\left[\frac{M_z(x)}{2w}\right]^2} = \frac{M_y(x)}{w} \sqrt{1 + \frac{[M_z(x)]^2}{[M_y(x)]^2}}$$

اما الاجهاد المقارن ، حسب فرضية العمل الاعظمي للتشوه ، فيبلغ :

$$\sigma_{v4}(x) = \sqrt{\left[\frac{M_y(x)}{w}\right]^2 + 3\left[\frac{M_x(x)}{2w}\right]^2} = \frac{M_y(x)}{w} \sqrt{1 + 0,75 \frac{[M_x(x)]^2}{[M_y(x)]^2}}$$

يستخلص من هذا المثال بان فرضية المتانة الثالثة (فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية) تعطي قيماً اكبر من القيم التي تنتج عن فرضية المتانة الرابعة (فرضية العمل الاعظمي للتشوه) التي تتطابق مع النتائج الفعلية بشكل جيد .

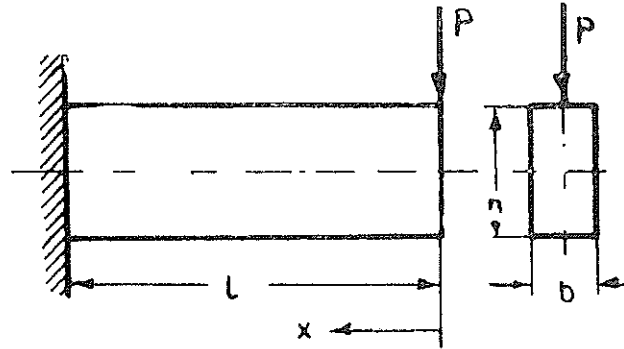
مثال 143 :

يتألف المقطع العرضي لجائز بارز (جائز موثوق من طرف وحرمن الطرف الآخر) من مستطيل أبعاده h, b . حمل هذا الجائز بقوة وحيدة P (شكل 11.7) .
المعطى :

$$P = 1000 \text{ kp} , \quad b = 2 \text{ cm} , \quad h = 4 \text{ cm} , \quad l_1 = 12 \text{ cm}$$

المطلوب :

- ١ - حساب نسبة الاجهاد المماسي الاعظمي على الاجهاد الناطمي الاعظمي عند نقطة الوتاقة وذلك بالامتناعة بنسبة ارتفاع المقطع العرضي على طول الجائز .
- ٢ - حساب توزيع الاجهاد المماسي للمقطع العرضي $x=l_1$ ثم رسمه .
- ٣ - رسم دائرة اجهاد مور من اجل $x=l=12 \text{ cm}$, $z=0,5 \text{ cm}$ ثم حساب الاجهاد المقارن باستخدام نظرية عمل التشوه الاعظمي .



شكل 11.7

الحل :

- ١ - حساب نسبة الاجهاد المماسي الاعظمي على الاجهاد الناطمي الاعظمي :

حساب الاجهاد المماسي الاعظمي :

القوة العرضية :

$$Q_z = P$$

عزم العطالة :

$$I_{yy} = bh^3/12$$

عرض الجائز :

$$b(z) = b$$

العزم الستاتيكي للنصف الاسفل من المستطيل :

$$S_y(z) = \left(b \frac{h}{2} \right) \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$$

بتبديل هذه القيم في علاقة الاجهاد المماسي :

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{I_{yy} b}$$

ينتج

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh}$$

حساب الاجهاد الناطمي الاعظمي :

$$\max \sigma = \frac{M_y}{W_{yy}} = \frac{Pl}{bh^2}$$

بتقسيم علاقتي الاجهاد يتم التوصل للمطلوب :

$$\frac{\max \tau}{\max \sigma} = \frac{h}{4l} = 0,25 \frac{h}{l}$$

باجراء حساب عددي لنسب الاجهاد وذلك من اجل بعض قيم h/l ينتج :

h/l	1	1/2	1/3	1/5	1/8	1/10
$\max \tau / \max \sigma$	0,25	0,125	0,083	0,05	0,03	0,025

من هذا الجدول يتبين ان تأثير الاجهادات المماسية على الاجهادات في حالة كون $h/l < 1/5$ صغير.

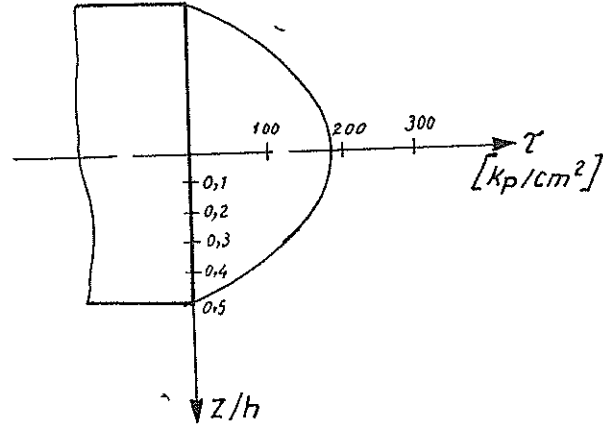
٢ - توزيع الاجهاد المماسي في المة طع العرضي $x=l_1$:

لقد تم في المثال 131 ايجاد توزيع الاجهاد المماسي للمستطيل وهو التالي :

$$\tau_{xz}(x) = \frac{6Q}{bh} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) = 750 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) \text{ kp/cm}^2$$

بواسطة هذه المعادلة يستطاع حساب الاجهادات المماسية في نقاط معينة من المقطع العرضي :

z/h	τ
—	kp/cm^2
0	187
0,1	180
0,2	158
0,3	120
0,4	68
0,5	0



شكل 11.8

لقد تم بواسطة القيم الموجودة في الجدول رسم توزيع الاجهاد المماسي الممثل في الشكل (11.8) بالمقياس . يصلح توزيع الاجهاد المماسي المذكور من اجل كافة المقاطع العرضية التي تتمدّد باستثناء المقاطع العرضية الواقعة على مقربة من الوثاقة ومن نقطة تطبيق القوة الوحيدة .

٣ - رسم دائرة اجهاد مور

يلغ الاجهاد الناطمي في المكان $x=12 \text{ cm}$, $z=0,5 \text{ cm}$ القيمة التالية :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_{yy}} z = \frac{-Plz}{bh^3} = \frac{-1000 \cdot 12 \cdot 0,5 \cdot 12}{2 \cdot 4^3} = -563 \text{ kp/km}^2$$

كما يلغ الاجهاد المماسي هناك ، حسب العلاقة المشتقة في الطلب السابق ، القيمة التالية :

$$\tau_{xz} (= \tau) = 750 \left(\frac{1}{4} - \frac{1^2}{4 \cdot 4^2} \right) = 176 \text{ kp/cm}^2$$

لقد تم في الشكل (11.9) تمثيل اتجاه الاجهادات وضفة القطع التي تؤثر عليها تلك الاجهادات. يستطاع الآن ، بعد اختيار مجموعة الاحداثيات x , z ، تثبيت النقاط العائدة لصفحتي القطع

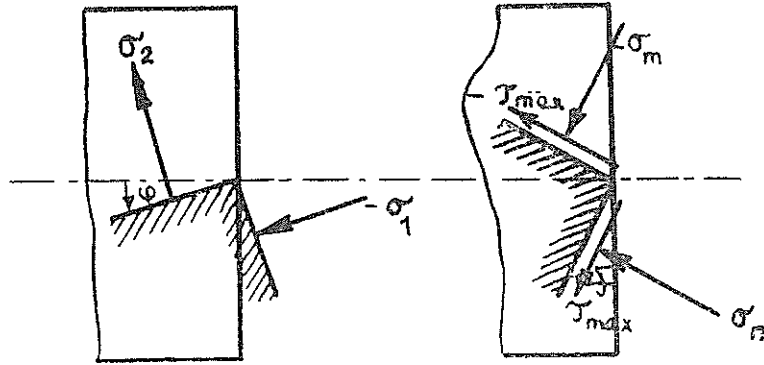
والاجهاد المماسي الاعظمي :

$$\max \tau = 330 \text{ kp/cm}^2$$

وكذلك مواضع ضفاف القطع التي تتشكل فيها الاجهادات الرئيسية ومواقع ضفاف القطع التي تتشكل عليها الاجهادات المماسية الاعظمية (شكل 11.11 و شكل 11.12) .

لحساب الاجهاد المماسي بواسطة فرضية العمل الاعظمي للتشوه تستعمل العلاقة (11.32) (حيث أن $\sigma_{yy}=0$) :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xz}^2} = \sqrt{563^2 + 3.176^2} = 640 \text{ kp/cm}^2$$



شكل 11.11

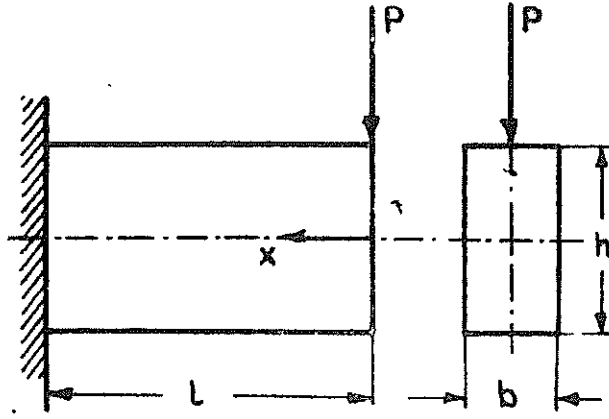
شكل 11.12

مثال 11.4 :

يتألف المقطع العرضي للجائز البارز (ظفر) القصير من مستطيل ابعائه h , b (شكل 11.13) .
المعطى : $b=2 \text{ cm}$, $h=4 \text{ cm}$, $l=30 \text{ cm}$.

المطلوب :

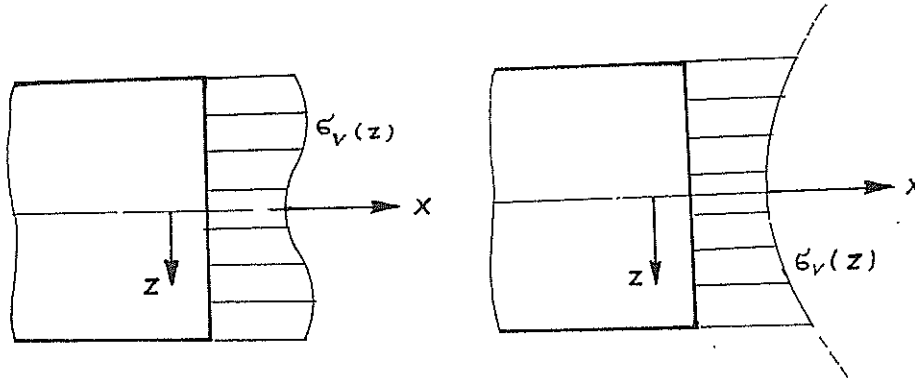
- ١ - حساب الاحداثي z الذي تتشكل عنده اكبر قيمة الاجهاد المقارن وذلك باستخدام نظرية عمل التشوه (Gestaltaenderungsarbeit) .
 - ٢ - المحولة المسموحة الاعظمية $zul P$.
- وذلك من اجل المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثافة .



شكل 11.13

الحل :

تشكل في المقطع العرضي الكائن عند الوثافة اجهادات ناظرية σ_{xx} ناتجة عن عزم الانعطاف (اجهادات الانعطاف) واجهادات مماسية τ_{xz} ناتجة عن القوة العرضية اما في المقاطع الطولية فلا تشكل الا اجهادات مماسية τ_{zx} (ازدواج الاجهادات المماسية) .



شكل 11.14

لحساب الاجهاد المقارن (الاجهاد المكافئ) ، حسب نظرية العمل الاعظمي للتشوه ، تطبق العلاقة التالية :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xyx}^2 + 3\tau_{xz}^2}$$

يبلغ الاجهاد الناظمي القيمة التالية :

مقاومة المواد م ٦٨

١٠٧٣

$$\sigma_{xx} = \frac{M_v}{I_{yy}} z = c_1 z$$

حيث أن c_1 هي قيمة ثابتة ، أما الاجهاد المماسي فيبلغ :

$$\tau_{xz}(z) = \frac{Q_z(x)}{I_{yy}} \cdot \frac{S_y(z)}{b(z)} = \frac{6Q}{bh} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) = c_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right)$$

بالتبديل في العلاقة الاولى يتم تعيين الاجهاد المقارن :

$$\sigma_v = \sqrt{c_1^2 z^2 + 3 c_2^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right)^2}$$

لقد اعطي الاجهاد المقارن في العلاقة السابقة كتابع للمتغير z . للحصول على القيمة العظمى للاجهاد المقارن ينبغي اشتقاق المعادلة السابقة وجعل المشتق يساوي الصفر :

$$\frac{d\sigma_v}{dz} = \frac{1}{2\sigma_v} \left[c_1^2 2z + 23 c_2^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(- \frac{2z}{h^2} \right) \right] = 0$$

ان احدى حلول هذه المعادلة هو :

$$z = 0$$

بعد الفحص يتبين ان هذا المكان هو مكان القيمة الصغرى للاجهاد المقارن . اما بقية الحلول فيتم التوصل اليها من العلاقة :

$$2 c_1^2 - \frac{12 c_2^2}{h^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) = 0$$

$$z = \pm h \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c_1^2 h^2}{c_2^2 6}}$$

من هذه المعادلة يمكن التوصل لنتيجة هامة هي التالية :

من اجل $c_1^2 h^2 / 6 c_2^2 < 1/4$ فقط فان z تأخذ قيمة حقيقية (reelle Werte) . اما في الحالات الاخرى فيتشكل الاجهاد المقارن على حواف المقطع العرضي (شكل 11.14) دون ان يشير الى قيمة اعظمية بمفهومها الرياضي . يتبين كما يشير الحساب الى ان القيمة الاعظمية الظاهرة تتشكل فقط عندما يكون $h > \sqrt{8/3}$. في الحالة المدروسة هنا فان الاجهاد المقارن الاعظمي يتشكل على حواف الجائز . وهي تساوي اذاً قيمة اجهاد الانعطاف في ذلك المكان :

$$\sigma_v = \max \sigma_B$$

بذلك يصبح شرط تصميم الجائز كالتالي :

$$\frac{|\max M|}{w} = \frac{Pl}{6bh^2} \leq \text{zul } \sigma$$

وبذلك فإن الحمل الأعظمية هي :

$$\text{zul } P = \frac{\text{zul } \sigma bh^2}{6l} = \frac{1400 \cdot 2.16}{6 \cdot 30} = 250 \text{ kp}$$

مثال 145 :

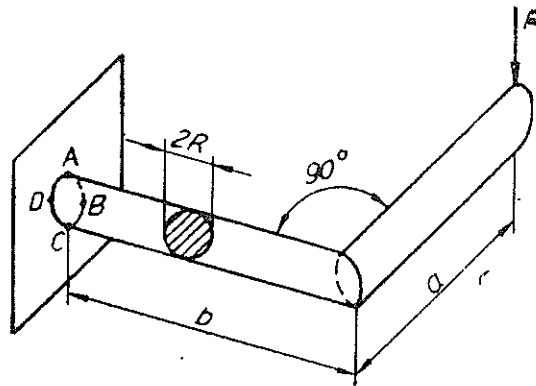
جائز بارز فواغي مقطعه العرضي دائري الشكل (شكل 11-15) .
المعطى :

١ - قضيب نحيف (schlanker Balken) :

$$\frac{b}{R} = 40 \quad , \quad \frac{a}{b} = 20$$

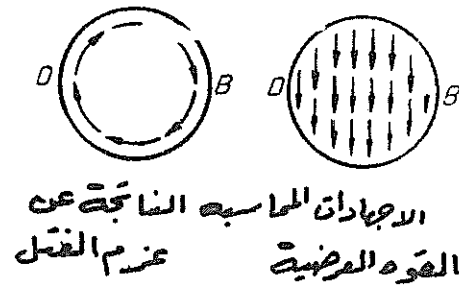
٢ - قضيب غليظ (dicker Balken) :

$$\frac{b}{R} = 4 \quad , \quad \frac{a}{R} = 2$$



شكل 11.15

المطلوب : حساب اجهادات المقارنة (الاجهادات المكافئة) σ_{x3} , σ_{x4} في مكان الوثاقة (في النقاط A , B , C , D) .



شكل 11.16

الحل :

حساب قيم القطع في مكان الوثاقة :

عزم القتل :

$$M_T = P a$$

عزم الانعطاف :

$$M_B = P b$$

القوة العرضية :

$$Q = J'$$

الاجهادات الناعمية :

من عزم الانعطاف يتشكل توزيع الاجهاد الناعمي التالي :

$$\sigma_x = \frac{M_B}{I_{yy}} z$$

حيث ان

$$I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

وبذلك تبلغ اجهادات الانعطاف في نقاط الوثاقة القيم التالية :

$$\sigma_x (A) = \sigma_x (z = R) = \frac{P b}{\frac{\pi R^3}{4}} = \frac{P}{F} \frac{4b}{R}$$

$$\sigma_x (B) = \sigma_x (z = 0) = 0$$

$$\sigma_x (C) = \sigma_x (z = -R) = - \frac{P b}{\frac{\pi R^3}{4}} = - \frac{P}{F} \frac{4b}{R}$$

$$\sigma_x (D) = \sigma_x (z = 0) = 0$$

الاجهادات المماسية :

الاجهادات المماسية الناتجة عن عزم القتل :

يتم حساب الاجهادات المماسية الناتجة عن القتل بواسطة العلاقة (7-11) ، من اجل الحافة فان تلك الاجهادات تحسب كما يلي :

$$\max \tau_T = \frac{M_T}{I_p} R$$

وبسبب كون

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

فان العلاقة الاخيرة تأخذ الشكل التالي :

$$\max \tau_T = \frac{P a}{\pi R^3/2} = \frac{P}{F} \frac{2a}{R}$$

الاجهادات المماسية الناتجة عن القوة العرضية :

يتم حساب الاجهادات المماسية الناتجة عن القوة العرضية بواسطة العلاقة التالية :

$$\tau_Q = \frac{Q \cdot S_y(z)}{I_{yy} \cdot b(z)}$$

من اجل النقاط A , C فان :

$$\tau_Q (z = \pm R) = 0$$

أما من أجل النقاط B , D فإن الاجهادات المماسية تبلغ :

$$\tau_Q (z = 0) = \frac{P}{R^3} \frac{4}{3\pi} = \frac{4P}{3F}$$

حيث أن

$$S_y (z = 0) = \frac{R^2}{2} \pi \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = \frac{2}{3} R^3$$

$$I_{yy} = \frac{R^4}{4} \pi$$

$$b (z = 0) = 2 R$$

بسبب وقوع الاجهادات المماسية الناتجة عن عزم الفتل في نفس المستوي الذي تقع فيه الاجهادات المماسية الناتجة عن القوى العرضية ، لذلك ينبغي تضامها مع بعض . اثناء التضام يجب الانتباه الى اتجاه الاجهادات . كما يشير الشكل (11.16) ينبغي جمع الاجهادات عند النقطة B اما عند النقطة D فينبغي طرحها ، واخيراً فإن محصلة الاجهادات المماسية (الاجهادات المماسية المحصلة) هي التالية :

$$\tau (B) = \tau_Q + \tau_T = \frac{P}{F} \left(\frac{4}{3} + \frac{2a}{R} \right)$$

$$\tau (D) = \tau_Q - \tau_T = \frac{P}{F} \left(\frac{4}{3} - \frac{2a}{R} \right)$$

$$\tau (A) = \tau (C) = \tau_T = \frac{P}{F} \frac{2a}{R}$$

إجهادات المقارنة (الاجهادات المكافئة) :

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad ; \quad \sigma_{v4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

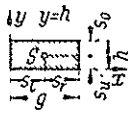
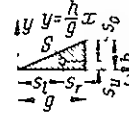
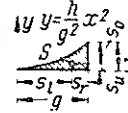
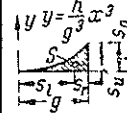
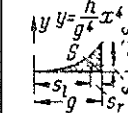
بتبديل المعطيات في هاتين العلاقتين يتم الحصول على اجهادات المقارنة ممثلة بالجدول العددي التالي :

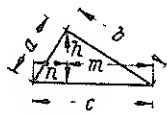
القضيب الغليظ				القضيب النحيف				النقطة
$\sigma_{v4} / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v3} / \frac{P}{F}$	$\tau / \frac{P}{F}$	$\sigma_B / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v4} / \frac{P}{F}$	$\sigma_{v3} / \frac{P}{F}$	$\tau / \frac{P}{F}$	$\sigma_B / \frac{P}{F}$	
17,4	17,9	4,00	16,00	174,0	179,0	40,00	160,00	A
9,22	10,7	5,33	0	71,6	82,7	41,33	0	B
17,4	17,9	4,00	-16,00	174,0	179,0	40,00	-160,00	C
4,62	5,3	2,67	0	66,9	77,3	38,67	0	D

توضح المقارنة بين اجهادات المقارنة في النقاط B , D للقضيب النحيف والقضيب الغليظ تأثير قص القوة العرضية (1,33/40 او بالاحرى 1,33/4) .

الملاحق

جدول 1 : مراکز ثقل السطوح

Rechteck	Dreieck	quadratische Parabel	kubische Parabel	biquadratische Parabel
 $y = h$ $F = 1 \cdot g \cdot h$	 $y = \frac{h}{3} x$ $F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$	 $y = \frac{h}{g^2} x^2$ $F = \frac{1}{3} \cdot g \cdot h$	 $y = \frac{h}{g^3} x^3$ $F = \frac{1}{4} \cdot g \cdot h$	 $y = \frac{h}{g^4} x^4$ $F = \frac{1}{5} \cdot g \cdot h$
$s_r = \frac{1}{2} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{3} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{4} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{5} \cdot g$	$s_r = \frac{1}{6} \cdot g$
$s_l = \frac{1}{2} \cdot g$	$s_l = \frac{2}{3} \cdot g$	$s_l = \frac{3}{4} \cdot g$	$s_l = \frac{4}{5} \cdot g$	$s_l = \frac{5}{6} \cdot g$
$s_u = \frac{1}{2} \cdot h$	$s_u = \frac{2}{6} \cdot h$	$s_u = \frac{3}{10} \cdot h$	$s_u = \frac{4}{14} \cdot h$	$s_u = \frac{5}{18} \cdot h$

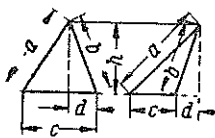


Rechtwinkliges Dreieck

$$F = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Satz von Pythagoras)}$$

$$h^2 = m \cdot n, a^2 = n \cdot c, b^2 = m \cdot c$$



Spitzwinkl., stumpfwinkl. Dreieck

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot d$$

für spitzwinkliges Dreieck

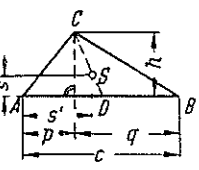
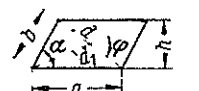
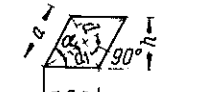
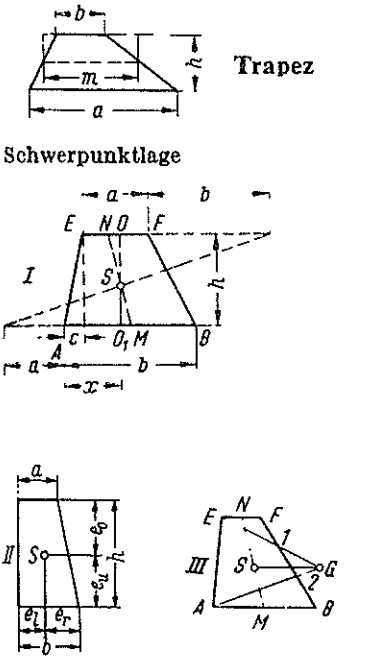
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot d$$

für stumpfwinkliges Dreieck

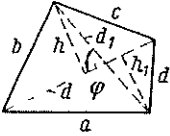
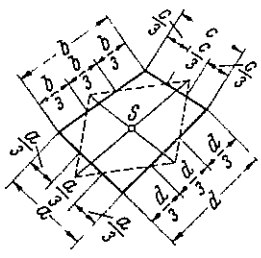
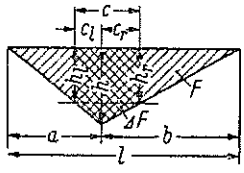
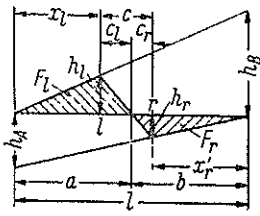
$$F = \frac{c \cdot h}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= q \cdot s = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$$

worin $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$; q und r die Halbmesser des ein- bzw. umliegenden Kreises

 <p>Dreieck Schwerpunkt- lage</p>	$SD = \frac{1}{3} CD; AD = BD$ S liegt im Abstände $s = \frac{h}{3}$ von AB und fällt zus. mit dem Schwerpunkt der 3 gleichschweren Ecken ABC . $s' = \frac{1}{3} (q + 2p) = \frac{1}{3} (c + p)$
 <p>Parallelo- gramm</p>	$F = ah = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d d_1 \sin \varphi$
 <p>Rhombus</p>	$F = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d d_1$
 <p>Trapez Schwerpunktlage</p>	$F = \frac{a+b}{2} \cdot h = mh$ Mittellinie (Parallele in halber Höhe) $m = \frac{a+b}{2}$ $OS = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}; O_1S = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$ $(OS \perp O_1S \perp a \text{ und } b)$ Hieraus folgt die Konstruktion von S nach Abb. I. — M und N Mittellinie von AB und EF . Ferner ist $x = b(\epsilon + \beta\gamma)$, worin $\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta(1-\alpha); \alpha = a:b$ $\beta = \frac{1+2\alpha}{3(1+\alpha)}; \gamma = c:b$ Für $c = 0$ ($EA \perp AB$) ist $\gamma = 0$ und daher $x = b\epsilon$, d. h., für den Sonderfall gemäß Abb. II wird $x = e_1 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$ $e_r = \frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3(a+b)} = \frac{2}{3}b - \frac{a^2}{3(a+b)}$ $e_o = \frac{a+2b}{3(a+b)}h; e_u = \frac{2a+b}{3(a+b)} \cdot h$

S ergibt sich auch durch die Konstruktion nach Abb. III. Die Drittpunkte 1 und 2 der Strecke FB werden ermittelt. Die Geraden $E1$ und $A2$, die sich in G schneiden, ergeben die Schwerlinie $SG \parallel BA$. Der Schnittpunkt dieser Schwerlinie mit der Mittellinie MN ist der gesuchte Schwerpunkt S .

 <p>Viereck</p>	$F = \frac{d}{2} (h + h_1) = \frac{d d_1}{2} \sin \varphi$
	<p>„Nach Wittenbauer sind die Drittelpunkte der Vierecksseiten, die durch die Eckpunkte des gegebenen Vierecks getrennt sind, durch Geraden miteinander zu verbinden. In dem sich ergebenden neuen Viereck sind die Diagonalen zu ziehen, in deren Schnittpunkt der Schwerpunkt S des gegebenen Vierecks liegt.“¹⁾</p>
<p>Einflußflächen</p> 	$F = \frac{1}{2} l h$ <p>Für $h_l = h_r$ kann ΔF ohne Zwischenrechnung unmittelbar angeschrieben werden zu</p> $\Delta F = \frac{h c}{2} \cdot \frac{2l - c}{l} \text{ sowie}$ $h_l = h_r = h \left(1 - \frac{c}{l} \right) \text{ und}$
	$c_l = a \cdot \frac{c}{l}; c_r = b \cdot \frac{c}{l}$ $h_l = x_l \cdot \frac{h_B}{l}; h_r = x_r' \cdot \frac{h_A}{l}$ $c_l = c \cdot \frac{h_l}{h_l + h_r}; c_r = c \cdot \frac{h_r}{h_l + h_r}$ $a = x_l + c_l; b = x_r' + c_r$ $F_l = \frac{1}{2} a h_l; F_r = \frac{1}{2} b h_r$

Regelmäßige Vielecke

s = Seite des Vielecks, R = Halbmesser des umliegenden Kreises, r = Halbmesser des einliegenden Kreises, n = Anzahl der Seiten, F = Flächeninhalt.

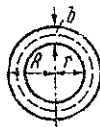
n	$\frac{R}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{s}{R}$	$\frac{s}{r}$	$\frac{F}{s^2}$	$\frac{F}{R^2}$	$\frac{F}{r^2}$
3	0,577	0,289	2,000	1,732	3,464	0,433	1,299	5,196
4	0,707	0,500	1,414	1,414	2,000	1,000	2,000	4,000
5	0,851	0,688	1,236	1,176	1,453	1,721	2,378	3,633
6	1,000	0,866	1,155	1,000	1,155	2,598	2,598	3,464
7	1,152	1,038	1,110	0,868	0,963	3,634	2,736	3,371
8	1,307	1,207	1,082	0,765	0,828	4,828	2,828	3,314
9	1,462	1,374	1,064	0,684	0,728	6,182	2,892	3,276
10	1,618	1,539	1,052	0,618	0,650	7,694	2,939	3,249
12	1,932	1,866	1,035	0,518	0,536	11,196	3,000	3,215



Kreis
Tafel S. 67 u. 68

$$F = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0,7854 d^2$$

Länge der Kreislinie oder Umfang
der Kreisfläche = $2 \pi r = \pi d$



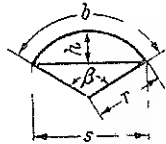
Kreisring

$$F = \pi (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$= \pi d_m b$$

worin: D = äußerer Durchmesser
 d = innerer Durchmesser

$$d_m = \frac{D + d}{2}$$



Kreisabschnitt
Tafel für
 h , b , s und F
(s. S. 39 u. 40)

$$F = \frac{b r}{2} - \frac{s (r - h)}{2}$$

$$= \left(\frac{\pi \beta}{180} - \sin \beta \right) \frac{r^2}{2}$$

$$r = \frac{s^2 + 4 h^2}{8 h}$$

$$s = 2 \sqrt{h (2 r - h)} = 2 r \sin \frac{\beta}{2}$$

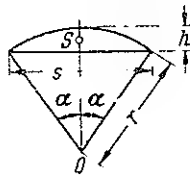
$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

$$b = \pi r \cdot \frac{\beta}{180} \quad (\beta \text{ in Grad})$$


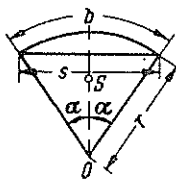
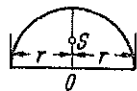
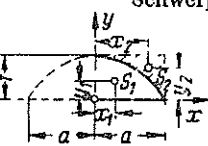
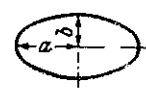
Bei flachem Kreisabschnitt, also
kleinem Zentriwinkel β , ist

$$F \approx \frac{2}{3} \cdot s h; b \approx s \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{s} \right)^2 \right]$$

$$O S = \frac{s^3}{12 F} = \frac{2}{3} \frac{r \sin^3 \alpha}{\alpha^0 \cdot \pi - \sin \alpha \cos \alpha}$$



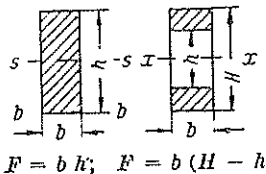
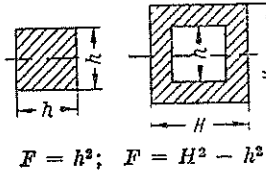
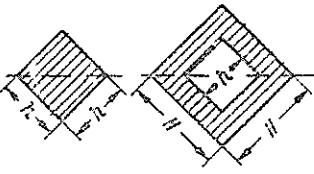
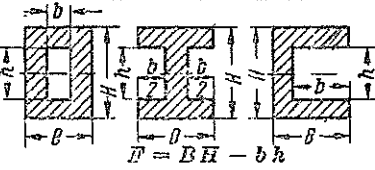
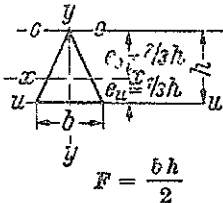
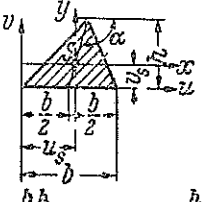
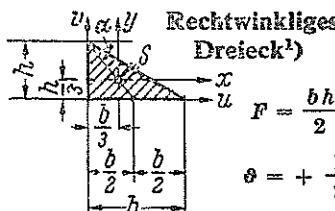
Schwerpunktage:

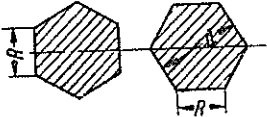
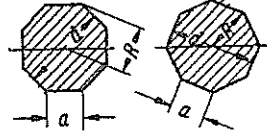
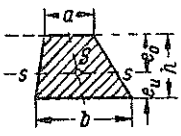
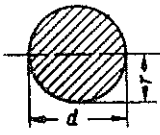
 <p>Kreisausschnitt</p>  <p>Schwerpunktlage</p>  <p>Halbkreisfläche</p>	<p>Bogen $b = \frac{\pi r \beta}{180}$ (β in Grad) (s. S. 39 u. 40)</p> <p>$F = \frac{br}{2} = \frac{\pi r^2 \beta}{360} = 0,00873 r^2 \beta$</p> <p>$\beta = \frac{180 b}{\pi r} = 57,295 \frac{b}{r}$</p> <p>$OS = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{180}{\pi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b}$ $= \frac{r^2 s}{3 F}$</p> <p>Halbkreisfläche $OS = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244 r$</p> <p>Viertelkreisfläche: $OS = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r$ $= 0,6002 r$</p> <p>Sechstelkreisfläche: $OS = \frac{2r}{\pi}$ $= 0,6366 r$</p>																						
<p>Parabelabschnitt (quadrat. Parabel)</p> <p>Schwerpunktlagen:</p> 	<p>$F = \frac{2}{3} sh$; Für $\frac{h}{s} < \frac{1}{4}$ ist die</p> <p>Bogenlänge $b \approx s \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{s} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{s} \right)^4 \right]$</p> <p>$x_1 = \frac{3}{8} a$ $y_1 = \frac{2}{5} h$</p> <p>$x_2 = \frac{3}{4} a$ $y_2 = \frac{7}{10} h$</p>																						
 <p>Ellipse</p>	<p>$F = \pi ab$</p> <p>Für $a \geq b$ ist der Umfang der Ellipse</p> <p>$U = \pi (a + b) \mu$ worin mit $\lambda = (a - b) / (a + b)$</p> <p>$\mu = 1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{1}{256} \lambda^6 + \frac{25}{16384} \lambda^8 + \dots$</p> <table border="1"> <tr> <td>$\lambda = 0$</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$\mu = 1$</td> <td>1,0025</td> <td>1,0100</td> <td>1,0226</td> <td>1,0401</td> <td>1,0635</td> <td>1,0922</td> <td>1,1269</td> <td>1,1679</td> <td>1,2162</td> <td>1,2732</td> </tr> </table>	$\lambda = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$\mu = 1$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0401	1,0635	1,0922	1,1269	1,1679	1,2162	1,2732
$\lambda = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1													
$\mu = 1$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0401	1,0635	1,0922	1,1269	1,1679	1,2162	1,2732													

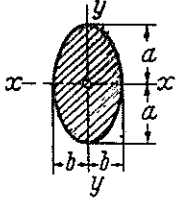
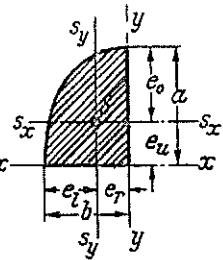
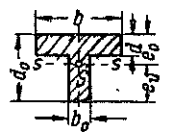
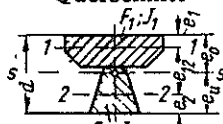
جدول 2 : الاحرف الأبجدية اليونانية

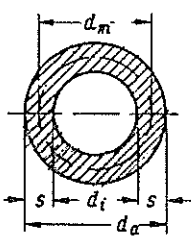
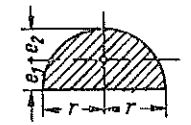
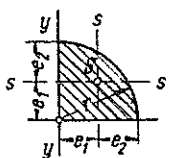
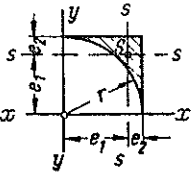
A α Alpha	H η Eta	N ν Ny	T τ Tau
B β Beta	θ ϑ Theta	Ξ ξ Xi	Φ φ Phi
Γ γ Gamma	I i Iota	O o Omikron	χ χ Chi
Δ δ Delta	K κ Kappa	Π π Pi	Υ υ Ypsilon
E ϵ Epsilon	Λ λ Lambda	P ρ Rho	Ψ ψ Psi
Z ζ Zeta	M μ My	Σ σ Sigma	Ω ω Omega

جدول 3 : عزوم الدرجة الثانية والعزم المقاوم للسطوح

Gegenstand	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
 <p>$F = b h$; $F = b (H - h)$</p>	$I_s = \frac{b h^3}{12} = \frac{F h^2}{12}$ $I_b = \frac{b h^3}{3} = \frac{F h^2}{3}$ <p>bzw.</p> $I_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	$W = \frac{b h^2}{6} = 0,1667 b h^2$ <p>bzw.</p> $W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$
 <p>$F = h^2$; $F = H^2 - h^2$</p>	$I = \frac{h^4}{12} = \frac{F h^2}{12}$ <p>bzw.</p> $I = \frac{H^4 - h^4}{12}$ $= \frac{F}{12} (H^2 + h^2)$	$W = \frac{h^3}{6} = 0,1667 h^3$ <p>bzw.</p> $W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$
	$I = \frac{h^4}{12} = \frac{F h^2}{12}$ <p>bzw.</p> $I = \frac{H^4 - h^4}{12}$ $= \frac{F}{12} (H^2 + h^2)$	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0,1179 h^3$ <p>bzw.</p> $W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H}$ $= 0,1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$
 <p>$F = B H - b h$</p>	$I = \frac{B H^3 - b h^3}{12}$ $W = \frac{B H^3 - b h^3}{6 H}$	
<p>Gleichschenkeliges Dreieck</p>  <p>$F = \frac{b h}{2}$</p>	$I_x = \frac{b h^3}{36} = \frac{F h^2}{18}$ $I_y = \frac{h b^3}{48} = \frac{F b^2}{24}$ $I_u = \frac{b h^3}{12} = \frac{F h^2}{6}$ $I_o = \frac{b h^3}{4} = \frac{F h^2}{2}$	$W_{x0} = \frac{b h^2}{24}$ $W_{xu} = \frac{b h^2}{12}$
<p>Beliebiges Dreieck¹⁾</p>  <p>$F = \frac{b h}{2}$ $c_y = \frac{h}{3} \cdot \cot \alpha$</p>	$u_s = \frac{b}{6} (3 - 2 \vartheta); v_s = \frac{h}{3}$ $I_x = \frac{F h^2}{18}; I_y = \frac{F b^2}{72} (3 + 4 \vartheta^2)$ $I_{xv} = -\frac{F^2}{9} \cdot \vartheta$ $I_u = \frac{F h^2}{6}; I_v = \frac{F b^2}{24} [3 + 4(1 - \vartheta)^2]$ $I_{uv} = \frac{F^2}{2} (1 - \vartheta)$	
<p>Rechtwinkliges Dreieck¹⁾</p>  <p>$F = \frac{b h}{2}$ $\vartheta = + \frac{1}{2}$</p>	$I_x = \frac{F h^2}{18}; I_y = \frac{F b^2}{18}$ $I_{xv} = -\frac{F^2}{18}$ $I_u = \frac{F h^2}{6}; I_v = \frac{F b^2}{6}$ $I_{uv} = + \frac{F^2}{6}$	

Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
 $F = \frac{3}{2} \sqrt{3} R^2 = 2,60 R^2$	$I = \frac{5 \sqrt{3}}{16} R^4 = \frac{F R^2}{4,8}$ $= 0,5413 R^4$ $= 0,06014 d^4$	$W_1 = 0,5413 R^3$ $= 0,10414 d^3$ <p>In bezug auf eine Diagonale ist</p> $W_2 = 0,6250 R^3$ $= 0,12028 d^3$
 $R = 1,307 a$ $F = \sqrt{8} \cdot R^2 = 4,83 a^2$	$I = \frac{1 + 2 \sqrt{2}}{6} R^4$ $= 0,6381 R^4$ $= 0,05474 d^4$ $= \frac{F R^2}{4,43} = \frac{F a^2}{2,60}$	$W_1 = 0,6906 R^3$ $= 0,10948 d^3$ <p>In bezug auf eine Diagonale ist</p> $W_2 = 0,6381 R^3$ $= 0,10115 d^3$
<p>Regelmäßiges Vieleck F ist der Flächeninhalt, a die Seite, R der Halbmesser des umliegenden Kreises, r der des umliegenden Kreises. Beliebige Achse durch den Mittelpunkt. Fläche s. Tafel S. 49</p>	$I = \frac{F}{24} (5 R^2 - a^2)$ $= \frac{F}{48} (12 r^2 + a^2)$ $I \approx \frac{F R^2}{4}$	$W \approx \frac{F R}{4}$
 $F = \frac{a+b}{2} \cdot h$	$I_s = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a+b}$ $e_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $e_u = h - e_0$	$W_o = \frac{I}{e_o} \quad (< W_u)$ $W_u = \frac{I}{e_u}$
 $F = \frac{\pi d^2}{4}$	$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{F d^2}{16}$ $= 0,04909 d^4 \approx 0,05 d^4$ <p>(Tafel S. 67)</p>	$W = \frac{\pi d^3}{32} = 0,09817 d^3$ $\approx 0,1 d^3$ <p>(Tafel S. 67)</p>

<p>Ellipse</p> 	$F = \pi a b$ <p style="text-align: right;">Umfang s. S. 50</p> $I_x = \frac{\pi}{4} \cdot b a^3 = \frac{F a^2}{4}; \quad W_x = \frac{\pi}{4} \cdot b a^2 = \frac{F a}{4}$ $I_y = \frac{\pi}{4} \cdot a b^3 = \frac{F b^2}{4}; \quad W_y = \frac{\pi}{4} \cdot a b^2 = \frac{F b}{4}$
<p>Vierteilellipse</p> 	$F = \frac{\pi}{4} \cdot a b$ $e_u = \frac{4}{3\pi} \cdot a = 0,424 a; \quad e_o = \frac{3\pi - 4}{3\pi} \cdot a = 0,576 a$ $e_l = \frac{3\pi - 4}{3\pi} \cdot b = 0,576 b; \quad e_r = \frac{4}{3\pi} \cdot b = 0,424 b$ $I_{xx} = b a^3 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0,0549 b a^3 = \frac{F a^2}{14,31}$ $I_{yy} = a b^3 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0,0549 a b^3 = \frac{F b^2}{14,31}$ $I_x = \frac{\pi}{16} \cdot b a^3 = \frac{F a^2}{4}; \quad I_y = \frac{\pi}{16} \cdot a b^3 = \frac{F b^2}{4}$
<p>Plattenbalken-Querschnitt</p> 	$b d = F_p \text{ Plattenquerschnitt}$ $b_o (d_o - d) = F_{st} \text{ Stegquerschnitt}$ $I_p = \frac{F_p d^2}{12}; \quad I_{st} = \frac{F_{st} (d_o - d)^2}{12}$ $e_o = \frac{d_o}{2} \cdot \frac{F_{st}}{F_p + F_{st}} + \frac{d}{2}; \quad e_u = d_o - e_o$ $I_s = I_p + I_{st} + \frac{F_p \cdot F_{st}}{F_p + F_{st}} \left(\frac{d_o}{2} \right)^2$ <p>Einfacher und meistens ausreichend genau ist die Anwendung der Gleichung $J_s = \mu \cdot b \cdot d_o^3$ (μ-Werte siehe Zahlentafel S. 63)</p>
<p>Beliebig zweiteilig zusammengesetzter Querschnitt</p> 	$F = F_1 + F_2$ $e_o = e_1 + \frac{F_2}{F} e_{12}; \quad e_u = d - e_o$ $I_s = I_1 + I_2 + \frac{F_1 F_2}{F} e_{12}^2$

<p>Rohrquerschnitt</p> 	$d_m = (d_a + d_i) / 2; \quad s = (d_a - d_i) / 2$ $F = \pi d_m s$ $I = \pi (d_a^4 - d_i^4) / 64 = 0,0491 (d_a^4 - d_i^4)$ <p>Falls $s / d_a \leq 1/10$ kann gesetzt werden:</p> $I \approx \pi \left(\frac{d_m}{2} \right)^3 s = \frac{F d_m^3}{8}$ $W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = \frac{2I}{d_a}$
<p>Halbkreisfläche</p> 	$e_1 = 0,4244 r; \quad e_2 = 0,5756 r$ $F = \pi r^2 / 2 =$ $I = 0,1098 r^4 = F r^2 / 14,31$ $W_1 = 0,2587 r^3; \quad W_2 = 0,1907 r^3$
<p>Viertelkreisfläche</p> 	$e_1 = \frac{4r}{3\pi} = 0,424 r; \quad e_2 = 0,576 r$ $F = \pi r^2 / 4 = 0,7854 r^2$ $I_s = 0,0549 r^4 = F r^2 / 14,31$ $I_x = I_y = \pi r^4 / 16 = 0,1963 r^4 = F r^4 / 4$ $I_{xy} = r^4 / 8; \quad I_{ss} = -0,01647 r^4$ $W_{s1} = 0,1296 r^3; \quad W_{s2} = 0,0956 r^3$
<p>Viertelkreis-Restfläche</p> 	$e_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{4 - \pi} = 0,777 r; \quad e_2 = 0,223 r$ $F = r^2 (1 - \pi/4) = 0,215 r^2$ $I_s = 0,00754 r^4 = F r^2 / 28,5$ $W_{s1} = 0,00970 r^3; \quad W_{s2} = 0,0338 r^3$ $I_x = I_y = r^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) = 0,1370 r^4 = \frac{F r^4}{1,567}$ $I_{xy} = r^4 / 8; \quad I_{ss} = -0,00444 r^4$

جدول 4 : عزوم الانعطاف والقوى العرضية وخط الانعطاف لتضيب بمجال واحد وتكون فيه $EI = \text{const}$

الاصطلاحات :

$\max M$	أكبر عزم مجال موجب
f	أكبر انتقال w ناتج عن M
f_Q	أكبر انتقال ناتج عن Q
EI	عامل المرونة \times عزم العطالة
GF	عامل الانزلاق \times مساحة المقطع العرضي
w	خط الانعطاف الناتج عن M

$$\xi = \frac{x}{l} \quad ; \quad \xi' = \frac{x'}{l}$$

$$\alpha = \frac{a}{l} \quad ; \quad \beta = \frac{b}{l} \quad ; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

1.

$$\begin{aligned}
 B &= P = -Q_B \\
 Q(x) &= -P \\
 M_B &= -Pl; \quad M(x) = -Px \\
 f &= \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{|M_B|l^2}{3EJ}; \quad f_Q = \kappa_Q \frac{Pl}{GF} \\
 w(x) &= \frac{Pl^3}{6EJ} (2 - 3\xi + \xi^3)
 \end{aligned}$$

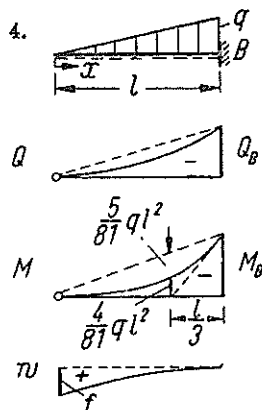
2.

$$\begin{aligned}
 B &= ql = -Q_B \\
 Q(x) &= -qx \\
 M_B &= -\frac{ql^2}{2}; \quad M(x) = -\frac{qx^2}{2} \\
 f &= \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{|M_B|l^2}{4EJ}; \quad f_Q = \kappa_Q \frac{ql^3}{2GF} \\
 w(x) &= \frac{ql^4}{24EJ} (3 - 4\xi + \xi^4)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 q(x) &= q_A (1 - \xi) + q_B \xi \\
 B &= \frac{q_A + q_B}{2} l = -Q_B \\
 Q(x) &= -\frac{q_A l}{2} (2\xi - \xi^2) - \frac{q_B l}{2} \xi^2 \\
 M_B &= -\frac{l^2}{6} (2q_A + q_B) \\
 M(x) &= -\frac{x^2}{6} [q_A (3 - \xi) + q_B \xi] \\
 f &= \frac{l^4}{120EJ} (11q_A + 4q_B) \\
 w(x) &= \frac{l^4}{120EJ} [q_A (11 - 15\xi + 5\xi^4 - \xi^5) + q_B (4 - 5\xi + \xi^5)]
 \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$



$$B = \frac{ql}{2} = -Q_B$$

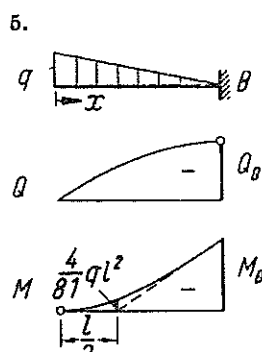
$$Q(x) = -\frac{qx^2}{2l}$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{8}; \quad M(x) = -\frac{qx^3}{6l}$$

$$f = \frac{ql^4}{80 EJ} = \frac{|M_B| l^2}{5 EJ}$$

$$f_Q = \kappa_Q \frac{ql^2}{8 GF}$$

$$w(x) = \frac{ql^4}{120 EJ} (4 - 5\xi + \xi^5)$$



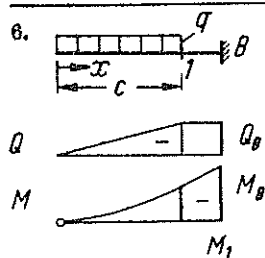
$$B = \frac{ql}{2} = -Q_B; \quad Q(x) = -\frac{qx}{2} (2 - \xi)$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{3}; \quad M(x) = -\frac{qx^2}{6} (3 - \xi)$$

$$f = \frac{11ql^4}{120 EJ} = \frac{|M_B| l^2}{3,636 EJ}$$

$$f_Q = \kappa_Q \frac{ql^2}{3 GF}$$

$$w(x) = \frac{ql^4}{120 EJ} (11 - 15\xi + 5\xi^4 - \xi^5)$$

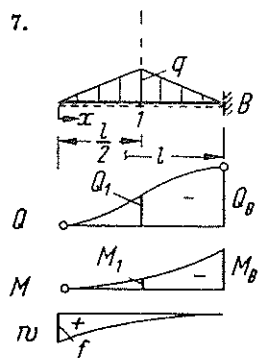


$$B = qc = -Q_B$$

$$M_1 = -\frac{qc^2}{2}; \quad M_B = qc \left(l - \frac{c}{2} \right)$$

$$f = \frac{ql^3 c}{24 EJ} (8 - 6\gamma + \gamma^3)$$

7.



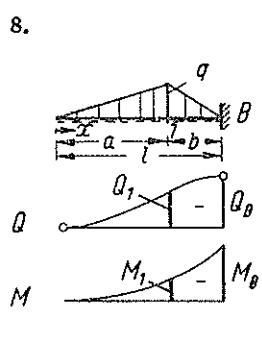
$$B = \frac{ql}{2} = -Q_B; \quad Q_1 = -\frac{ql}{4}$$

$$M_1 = -\frac{ql^3}{24}$$

$$M_B = -\frac{ql^3}{4}$$

$$f = \frac{11ql^4}{192EJ}$$

8.



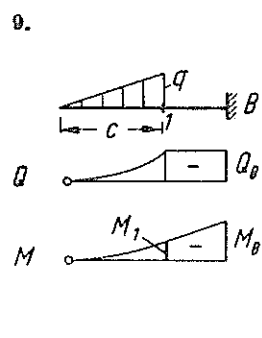
$$B = \frac{ql}{2} = -Q_B; \quad Q_1 = -\frac{qa}{2}$$

$$M_1 = -\frac{qa^3}{6}$$

$$M_B = -\frac{ql}{6}(l+b)$$

$$f = \frac{ql^5}{120bEJ}(11 - 20\alpha + 10\alpha^2 - \alpha^4)$$

9.



$$B = \frac{qc}{2} = -Q_B$$

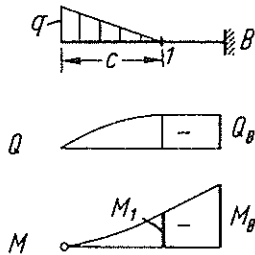
$$M_1 = -\frac{qc^3}{6}$$

$$M_B = -\frac{qc}{2}\left(l - \frac{2}{3}c\right)$$

$$f = \frac{ql^3c}{30EJ}(5 - 5\gamma + \gamma^2)$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

10.



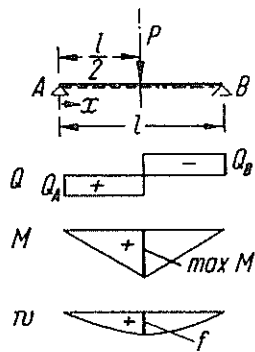
$$B = \frac{q c}{2} = -Q_B$$

$$M_1 = -\frac{q c^2}{3}$$

$$M_B = -\frac{q c}{2} \left(l - \frac{c}{3} \right)$$

$$f = \frac{q l^3 c}{120 EJ} (20 - 10 \gamma + \gamma^4)$$

11.



$$A = B = \frac{P}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = \frac{P l}{4}$$

$$M(x) = \frac{P x}{2} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

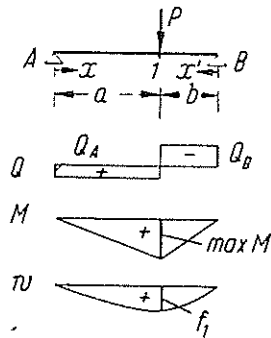
$$f = \frac{P l^3}{48 EJ} = \frac{\max M l^2}{12 EJ}$$

$$f_Q = \kappa_Q \frac{\max M}{GF}$$

$$w(x) = \frac{P l^3}{48 EJ} (3 \xi - 4 \xi^3) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$w(x) = \frac{P l^3}{48 EJ} \cdot w_A$$

$$f [\text{cm}] = \frac{\text{vorh. } \sigma [\text{Mp/cm}^2] l^2 [\text{m}]}{1,26 h [\text{cm}]} \text{ bei Stahl}$$



$$A = P \frac{b}{l} = Q_A; \quad B = P \frac{a}{l} = -Q_B$$

$$\max M = \frac{P a b}{l}$$

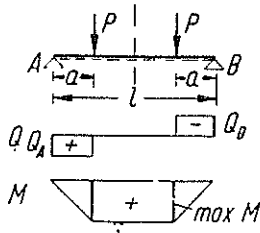
$$f_1 = \frac{P a^2 b^2}{3 E J l} = \frac{\max M a b}{3 E J}$$

$$f_{1Q} = \kappa_Q \frac{\max M}{G F}$$

$$w(x) = \frac{P l^2 b}{6 E J} \xi (1 - \beta^2 - \xi^2) \text{ für } x \leq a$$

$$w(x) = \frac{P l^2 a}{6 E J} \xi' (1 - \alpha^2 - \xi'^2) \text{ für } x' \leq b$$

13.

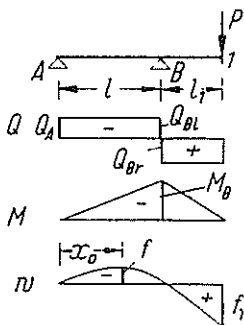


$$A = B = P = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = P a$$

$$f = \frac{P l^2 a}{24 E J} (3 - 4 \alpha^2) = \frac{\max M l^2}{24 E J} (3 - 4 \alpha^2)$$

14.



$$A = -P \frac{l_1}{l}; \quad B = P \frac{l_1 + l}{l}$$

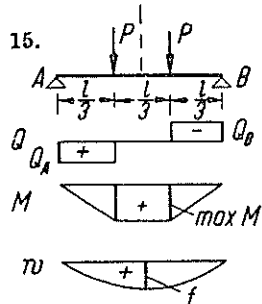
$$Q_A = -Q_B = -P \frac{l_1}{l}; \quad Q_{Br} = P$$

$$M_B = -P l_1$$

$$f = \frac{|M_B| l^2}{15,59 E J} \text{ bei } x_0 = 0,577 l$$

$$f_1 = \frac{P l_1^3}{3 E J} (l + l_1)$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$



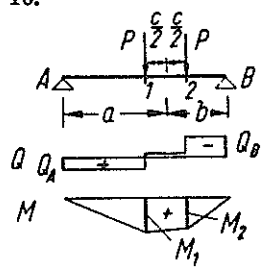
$$A = B = P = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = \frac{P l}{3}$$

$$f = \frac{23 P l^3}{648 E J} = \frac{\max M l^3}{9,39}$$

$$f_Q = \kappa_Q \frac{P l}{3 G F} = \kappa_Q \frac{\max M}{G F}$$

16.



$$A = \frac{2 P b}{l} = Q_A; \quad B = \frac{2 P a}{l} = -Q_B$$

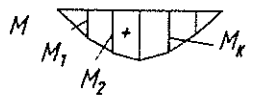
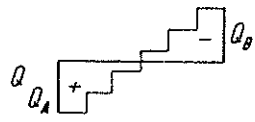
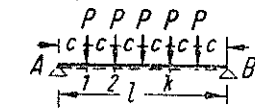
$$M_1 = \frac{2 P b}{l} \left(a - \frac{c}{2} \right); \quad M_2 = \frac{2 P a}{l} \left(b - \frac{c}{2} \right)$$

$$\text{Sonderfall für } a = \frac{l}{2} + \frac{c}{4} :$$

$$\max M_1 = \frac{P l}{8} (2 - \gamma)^2; \quad A = P \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right); \quad B = P \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right)$$

$\gamma = \frac{c}{l}$	$\max M_1$	A	B
0	0,500 Pl	1,00 P	1,00 P
0,1	0,451 Pl	0,95 P	1,05 P
0,2	0,405 Pl	0,90 P	1,10 P
0,3	0,361 Pl	0,85 P	1,15 P
0,4	0,320 Pl	0,80 P	1,20 P
0,5	0,281 Pl	0,75 P	1,25 P
0,586	0,250 Pl	0,707 P	1,293 P
> 0,586	Einzellast in Feldmitte maßgebend		

17. $n-1$ gleiche Lasten P



$$A = B = \frac{P(n-1)}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$M_1 = \frac{Pl}{2} \frac{n-1}{n}$$

$$M_2 = \frac{Pl}{2} \frac{n-2}{n}$$

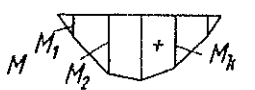
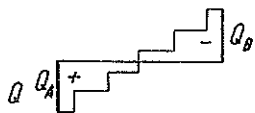
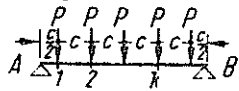
$$M_k = \frac{Pl}{2} \frac{n-k}{n}$$

$$\max M = \frac{Pl}{\eta_M} ; \quad f = \frac{\max M l^3}{\eta_f EJ}$$

$n =$	2	3	4	5	6	7
η_M	4	3	2	1,66	1,33	1,16
η_f	12	9,39	10,11	9,25	9,81	9,56

18.

n gleiche Lasten P



$$A = B = \frac{Pn}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$M_1 = \frac{Pl}{4}$$

$$M_2 = \frac{Pl}{4} \frac{3n-4 \cdot 1}{n}$$

$$M_3 = \frac{Pl}{4} \frac{5n-4(1+2)}{n}$$

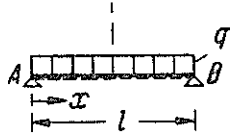
$$M_k = \frac{Pl}{4} \frac{(2k-1)n-2(k-1)k}{n}$$

$$\max M = \frac{Pl}{\eta_M} ; \quad f = \frac{\max M l^3}{\eta_f EJ}$$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7
η_M	4	4	2,4	2	1,538	1,33	1,12
η_f	12	8,72	10,19	9,37	9,82	9,49	9,72

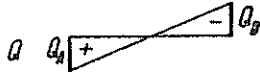
$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

19.

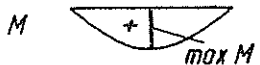


$$A = B = \frac{ql}{2} = Q_A = -Q_B$$

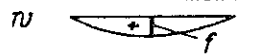
$$Q(x) = \frac{ql}{2}(1 - 2\xi); \quad \max M = \frac{ql^2}{8}$$



$$M(x) = \frac{ql^2}{2}(\xi - \xi^2) = 4 \max M \omega_R$$

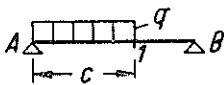


$$I = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{\max M l^3}{9,6 EJ}$$



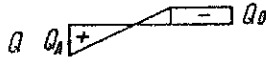
$$w(x) = \frac{ql^4}{24 EJ}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = \frac{ql^4}{24 EJ} \omega_{P1}$$

20.

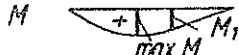


$$A = \frac{qc}{2}(2 - \gamma) = Q_A$$

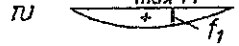
$$B = \frac{qc^2}{2l} = -Q_B; \quad M_1 = \frac{qc^2}{2}(1 - \gamma)$$



$$\max M = \frac{qc^2}{2}(1 - \gamma + 0,25\gamma^2) \text{ bei } x_0 = c(1 - 0,5\gamma)$$



$$f_1 = \frac{qc^3(1 - \gamma)}{6 EJ}(l - 0,75c)$$

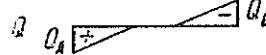


21.

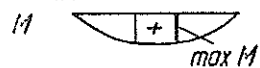


$$A = B = qc = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = \frac{qc^2}{2}$$

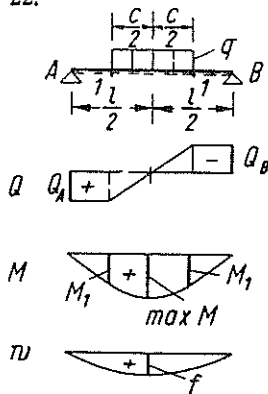


$$M(x) = qx(c - 0,5x) \text{ für } x \leq c$$



$$I = \frac{ql^2 c^3}{48 EJ}(3 - 2\gamma^2)$$

22.



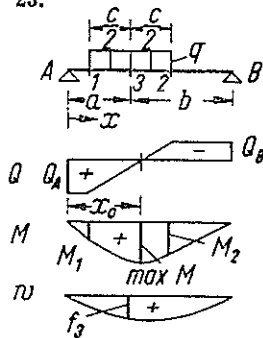
$$A - B = \frac{q c}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = \frac{q l c}{8} (2 - \gamma)$$

$$M_1 = \frac{q l c}{4} (1 - \gamma)$$

$$f = \frac{q c}{96 E J} (2 l^3 - l c^2 + 0,25 c^3)$$

23.



$$A = q b \gamma = Q_A$$

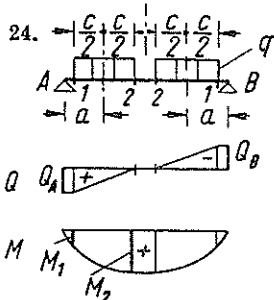
$$B = q a \gamma = -Q_B$$

$$\max M = \frac{q a b}{2} \gamma (2 - \gamma) \text{ bei } x_0 = a + c \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)$$

$$M_1 = \frac{q b c}{2} (2 \alpha - \gamma)$$

$$M_2 = q a c (1 - \alpha - \gamma)$$

$$f_3 = \frac{q \gamma}{384 E J} (l c^3 - 16 a b c^2 + 128 a^2 b^2)$$



$$A = B = q c = Q_A = -Q_B$$

$$M_1 = q c (a - 0,5 c)$$

$$M_2 = \max M = q a c$$

$$f = \frac{q l^4}{24 E J} \alpha \cdot \gamma (3 - 4 \alpha^2 - \gamma^2)$$

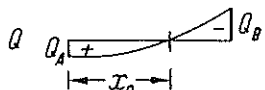
$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

25.

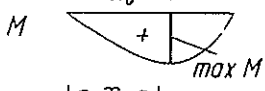


$$A = \frac{1}{6} q l = Q_A; \quad B = \frac{1}{3} q l = -Q_B$$

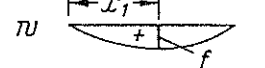
$$Q(x) = \frac{q l}{6} (1 - 3 \xi^2)$$



$$\max M = \frac{q l^2}{9 \sqrt{3}} \text{ bei } x_0 = 0,577 l$$



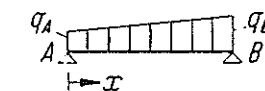
$$M(x) = \frac{q l x}{6} (1 - \xi^2) = \frac{q l^2}{6} \omega_D$$



$$f = 0,00652 \frac{q l^4}{EJ} \text{ bei } x_1 = 0,519 l$$

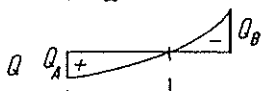
$$w(x) = \frac{q l^3 x}{360 EJ} (7 - 10 \xi^2 + 3 \xi^4)$$

26.

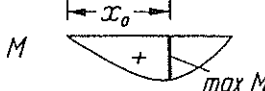


$$A = \frac{l}{6} (2 q_A + q_B) = Q_A$$

$$B = \frac{l}{6} (q_A + 2 q_B) = -Q_B$$



$$Q(x) = \frac{q_A l}{6} (2 - 6 \xi + 3 \xi^2) + \frac{q_B l}{6} (1 - 3 \xi^2)$$



$$M(x) = \frac{q_A l^2}{6} (2 \xi - 3 \xi^2 + \xi^3) + \frac{q_B l^2}{6} (\xi - \xi^3) =$$

$$= \frac{l^2}{6} (q_A \omega_D' + q_B \omega_D)$$

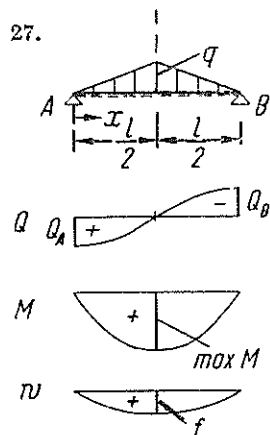
Aus nachstehender Tafel ist für $q_B > q_A$

mit $P = \frac{q_A + q_B}{2} l$: $\max M = \frac{P l}{n}$ bei $x_0 = \xi_0 l$

$\frac{q_A}{q_B}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ_0	0,577	0,566	0,555	0,545	0,536	0,528	0,520	0,514	0,508	0,504	0,500
n	7,79	7,82	7,85	7,89	7,91	7,93	7,94	7,96	7,98	7,99	8,00

$E J f = 0,01303 P \cdot l^3$ zwischen $\xi = 0,500$ (Fall 19) und $\xi = 0,519$ (Fall 25)

27.



$$A = B = \frac{q l}{4} = Q_A = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q l}{4} (1 - 4 \xi^2) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2}$$

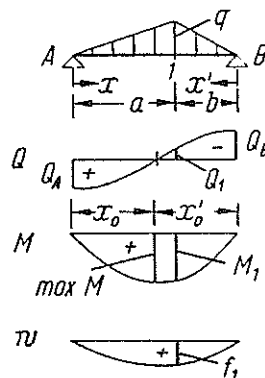
$$M(x) = \frac{q l^2}{12} (3 \xi - 4 \xi^3) \quad \text{für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$M(x) = \frac{q l^2}{12} \omega_A; \quad \max M = \frac{q l^2}{12}$$

$$I = \frac{q l^4}{120 E J} = \frac{\max M l^2}{10 E J}$$

$$w(x) = \frac{q l^3 x}{120 E J} \left(\frac{25}{8} - 5 \xi^2 + 2 \xi^4 \right)$$

28.



$$A = \frac{q}{6} (l + b) = Q_A$$

$$B = \frac{q}{6} (l + a) = -Q_B$$

$$Q_1 = \frac{q}{3} (b - a); \quad M_1 = \frac{q a b}{3}$$

$$I_1 = \frac{q a b}{9 E J} \left[a b + \frac{1}{5 l} (a^3 + b^3) \right]$$

$$x \leq a: \quad Q(x) = \frac{q l}{6 a} (1 - \beta^2 - 3 \xi^2)$$

$$M(x) = \frac{q l}{6 a} x (1 - \beta^2 - \xi^3)$$

$$- \quad x \geq a: \quad Q(x) = \frac{q l}{6 \beta} (1 - \alpha^2 - 3 \xi'^2); \quad M(x) = \frac{q l}{6 \beta} x' (1 - \alpha^2 - \xi'^3)$$

$$a > b: \quad \max M = \frac{2}{3} A x_0 \quad \text{bei } x_0 = \sqrt{a \frac{l+b}{3}}$$

$$a < b: \quad \max M = \frac{2}{3} B x_0' \quad \text{bei } x_0' = \sqrt{b \frac{l+a}{3}}$$

Nebenpol	Relative instant center	قطب جانبي
Normalspannung	Normal stress	اجهاد ناظمي
— — Kraft	Normal force	قوة ناظمية
Nulllinie	Zero axis	خط صفر
Partielle Differentiation	Partial Differentiation	مشتق جزئي
Platte	Plate	صفحة (بلاطة)
—, Kreis —	Circular plate	صفحة دائرية
Poisson'sche Querkontraktionszahl	Poisson's ratio	عامل بواسون للتقلص العرضي
Polstrahl	Polar line	شعاع قطبي
Potential	Potential	كمون
Prinzip der virtuellen-Arbeit	Theorem of virtual work	مبدأ العمل الوهمي
— — — verrückungen	Theorem of virtual displacements	مبدأ الانتقالات الوهمية
Quer — kraft	Transverse (shear) force	قوة عرضية
Quer — schnittskern	Core of section	نواة المقطع العرضي
Quer — dehnungszahl	Poisson's ratio	عامل التقلص العرضي (عامل بواسون)
Rahmen	Frames	إطار
—, Zweigelenk —	Two — hinged frames	إطار ثنائي المفصل
—, Dreigelenk —	Three — hinged frames	إطار ثلاثي المفصل
Randbedingungen	Boundary conditions	شروط الاطراف
Schalen	Shell	قشرية
—, Kreiszylinder —	Circular cylindrical shell	قشرية أسطوانية دائرية
Schubmittelpunkt	Shear centre	مركز القص
Schubspannungen	Shearing stress	الاجهادات المماسية (القصية)
Spannungen	Stress	اجهادات
Spannungs — dehnungs — diagram	Stress — strain — diagram	مخطط الاجهاد — التغير النسبي
Spannungszustand	State of stress	حالة الاجهاد
Stab	Bars	قضيب
Stabilitätstheorie	Theory of stability	نظرية الاستقرار
Stabknickung	Buckling of bars	تحنيب القضبان
Statische Bestimmtheit	Static determinacy	التقرير الستاتيكي

Hauptpol	Instant center (of velocity)	قطب اساسي
Hooke'sches Gesetz	Hooke's law	قانون هوك
Homogen	Homogeneous	متجانس
Isotrop	Isotropic	متشابه (متماثل) الناحي (ايزوتروبي)
Knicklast	Buckling load	حمولة التجنيب
Knickspannung	Buckling stress	اجهاد التجنيب
Knickung	Buckling	التجنيب
Knickung , elastischer—	Elastic buckling	التجنيب المرن
—, plastischer —	Inelastic buckling	التجنيب اللدن
Kompatibilitaetsbedingungen	Compatibility equations	شروط التوافق
Kinematische Kette	Kinematic chain	سلسلة حركية
— Methode	Kinematic method	طريقة حركية
Kraft	Force	قوة
—, Aeußere —	External force	قوة خارجية
—, Innere —	Internal force	قوة داخلية
—, Normal —	Normal force	قوة ناظرية
—, Quer —	Transverse force	قوة عرضية
—, Schub —	Shearing force	قوة قص
—, Laengs —	Longitudinal (axial) force	قوة طولية
Kraftgroößenverfahren	Force Method	طريقة قيم القطع (طريقة القوى)
Last	Load	حمولة
—, Einzel—	Concentrated load	حمولة وحيدة (مركزة)
—, Kritische —	Critical load	حمولة حرجية
Linie , elastische—	Elastic curve	الخط المرن
Matrix	Matrix	ماتريس
Maxwell , Satz von —	Maxwell's law	علاقة ماكسويل
Moment	Moment	عزم
—, Biege —	Bending moment	عزم انعطاف
—, Torsious —	Torsional moment (Torque)	عزم قتل

Dehnung	Strain	تغير نسي (إنفغال ، تمدد)
Dreigelenk-bogen	Three - hinged arch	قوس ثلاثي المفصل
— — Rahmen	Three - hinged fram	اطار ثلاثي المفصل
Dreigelenk — Träger	Three - hinged beam	جائز (حامل) ثلاثي المفصل
Dreimomentengleichung	Three moment equations	معادلة العزوم الثلاثة
Diagramm	Diagram	مخطط
Durchbiegung	Deflections	الانفعال الشاقولي
Durchlaufbalken	Continuous beam	جائز مستمر
Dynamisches Effekt	Dynamic Factor	معامل حركي (ديناميكي)
Einflußlinie	Influence line	خط التأثير
Elastizitäts - gleichung	Equation of elasticity	معادلة المرونة
— — modul	Modulus of elasticity	عامل المرونة
— — theorie	Theor. of elasticity	نظرية المرونة
Energie	Energy	طاقة (قدرة)
—, Kinetische —	Kinetic energy	طاقة حركية
—, Potentielle —	Potential energy	طاقة كامنة
Euler - Hyperbel	Euler hyperbolic	قطع زائد اويلر
Euler'she Differentialgleichung	Euler differential equations	معادلة اويلر التفاضلية
F' — Figur	F' — figure	شكل - F'
Fachwerk	Truss	جائز شبكي
Fachwerksbogen	Trussed arch	قوس شبكي
Feder	Spring	نابض
— — Konstante	Stiffness of Spring	ثابت النابض
Gelenk	Hinge (link , joint)	مفصل
Gerbertraeger	Gerber beam	جائز جبر
Grad der statischenunbestimmtheit	Degree of statical indeterminacy	درجة عدم التقرير الستاتيكي
Hauptachsen	Principal axis	محاور اساسية (رئيسية)
Hauptspannungen	Principal stresses	اجهادات اساسية (رئيسية)

معجم المصطلحات

الالمانى	الانكليزي	العربي
Achse, Neutrale —	Neutral axis	المحور الحيادي
Arbeit	Work	عمل
—, Prinzip der virtuellen —	Theorem of virtual Work	مبدأ العمل الوهمي
—, Virtuelle —	Virtual work	العمل الوهمي
Auflager	Support	مسند
—, Festes —	Hinged Support	مسند ثابت (مسماري)
—, Bewegliches —	Rolling support	مسند متحرك
—, Eingespanntes —	Fixed support	مسند موثوق
— — Kraft	Support force	قوة رد فعل المسند
— — reaktionen	Support reaction (bearing reactions)	ردود أفعال المساند
Beansprucht	Strained	مجهد ، محمل
Belastung	Loading	حمولة
Bereich	Limit	مجال
—, Elastischer	Elastic limit	مجال مرن
Betti, Satz von —	Betti's law	علاقة بيتي (قانون بيتي)
Biegelinie	Elastic curve	خط الانعطاف (الخط المرن)
Biege — moment	Bending moment	عزم انعطاف
— — momentenverlauf	Bending moment diagram	توزيع (خط) عزم الانعطاف
— — steifigkeit	Flexural stiffness (or rigidity or bending resistance)	صلابة الانعطاف
Biegung	Bending	انعطاف
—, Reine (Einfache) —	Simple bending	انعطاف بسيط (صافي)
—, Schiefe —	Oblique (double) bending	انعطاف منحرف
Bogen	Arch	قوس
Castigliano , Satz von —	Castigliano's theorem	مبدأ كاستيليانو

9. Rüdiger-Kneschke :

Technische Mechanik Bd 1 u. 2 . . .
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1965

10. Marguerre K. :

Technische Mechanik , Teil I u. II
Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New-York, 1965 , 1968 .

11. Betonkalender I u. II Band 1971

Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn . Berlin-Mü-Dü.

12. Göldner H. :

Leitfaden der Technischen Mechanik .
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1973.

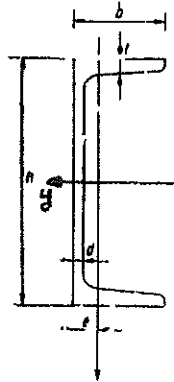
المراجع الأساسية

مراجع باللغة العربية

1. ١ - الدكتور عبدالرزاق عرعور :
مقاومة المواد ، للصف الثاني كهرباء .
الطبعة الاولى ، جامعة حلب ١٩٧٣ - ١٩٧٤ .
2. ٢ - المرشد في المقاومة :
ترجمة الدكتور خالد رشدي بركات والمهندس فاروق عواد ١٩٧٣ .
3. ٣ - س تيموشنكو و د . ه . يونغ :
ميكانيك الهندسة ، علم السكون .
ترجمة وجيه القدسي وعبدالرزاق قدورة والوليد ملحس ١٩٧٣ - ١٩٧٢
4. ٤ - ف . فيودوسيف :
مقاومة المواد .
ترجمة الدكتور خالد رشدي بركات (مطبعة جامعة دمشق ١٩٧٣) .

مراجع باللغة الالمانية

5. Chmelka F. , Melan E. :
Einführung in die Festigkeitslehre .
Wien : Springer Verlag 196٠) .
6. Chmelka F. , Melan E. :
Einführung in die Statik
Wien : Springer Verlag 1961
7. Stahlbau :
Ein Handbuch für Studium und Praxis Bd. I 1961 .
Stahlbau – Varlags-GMBH Klön
8. Rothe A. :
Statik der Stabtragwerke . Bd I u, II .
Berlin: VEB - Verlag für Bauwesen 1965 .



q: Gewicht pro lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الارتفاع h	b	d	t	e	F	q	من أجل المحور							
							y - y				z - z			
							I_{yy}	$W_o = W_y$	i_y	I_{zz}	$W_o = W_z$	i_z		
							cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm		
8	80	45	6	8	1,45	11,0	106	26,5	3,10	19,4	6,36	13,4	1,33	
10	100	50	6	8,5	1,55	13,5	206	41,2	3,91	29,3	8,49	18,9	1,47	
12	120	55	7	9	1,60	17,0	364	60,7	4,62	43,2	11,1	27,0	1,59	
14	140	60	7	10	1,75	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	35,8	1,75	
16	160	65	7,5	10,5	1,84	24,0	925	116	6,21	85,3	18,3	46,4	1,89	
18	180	70	8	11	1,92	28,0	1 350	150	6,95	114	22,4	59,4	2,02	
20	200	75	8,5	11,5	2,01	32,2	1 910	191	7,70	148	27,0	73,6	2,14	
22	220	80	9	12,5	2,14	37,4	2 690	245	8,48	197	33,6	92,1	2,30	
24	240	85	9,5	13	2,23	42,3	3 600	300	9,22	248	39,6	111	2,42	
26	260	90	10	14	2,36	48,3	4 820	371	9,99	317	47,7	134	2,56	
28	280	95	10	15	2,53	53,3	6 280	448	10,9	399	57,2	158	2,74	
30	300	100	10	16	2,70	58,8	8 030	535	11,7	495	67,8	183	2,90	
32	320	100	14	17,5	2,60	75,8	10 870	679	12,1	597	80,6	230	2,81	
35	350	100	14	16	2,40	77,3	12 840	734	12,9	570	75,0	238	2,72	
40	400	110	14	18	2,65	91,5	20 350	1020	14,9	846	102	319	3,04	

الرمز L	a	b	d	e	f	u _u	u _o	v _u	v _o	cot φ _o	F	q	من أجل الجور y-y	
													I _y	W _y
	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	—	cm ²	kpm ⁻¹	cm ⁴	cm ³
75.130.8	75	130	8	4,36	1,65	4,26	2,99	6,01	8,73	0,339	15,9	12,5	276	31,9
75.130.10			10	4,45	1,73	4,24	3,08	6,05	8,66	0,336	19,6	15,4	337	39,4
75.130.12			12	4,53	1,81	4,21	3,18	6,09	8,61	0,332	23,3	18,3	395	46,6
75.150.9	75	150	9	5,28	1,57	4,46	2,90	6,62	9,79	0,265	19,5	15,3	455	46,8
75.150.11			11	5,37	1,65	4,44	2,97	6,66	9,73	0,261	23,6	18,6	545	56,6
75.150.13			13	5,45	1,73	4,42	3,04	6,70	9,67	0,258	27,7	21,7	631	66,1
80.120.8	80	120	8	3,83	1,87	4,20	3,27	5,99	8,23	0,441	15,5	12,2	226	27,6
80.120.10			10	3,92	1,95	4,19	3,37	6,03	8,18	0,438	19,1	15,0	276	34,1
80.120.12			12	4,00	2,03	4,18	3,46	6,06	8,14	0,433	22,7	17,8	323	40,4
80.120.14			14	4,08	2,10	4,17	3,55	6,08	8,10	0,429	26,2	20,5	368	46,4
80.160.10	80	160	10	5,63	1,69	4,76	3,07	7,06	10,5	0,263	23,2	18,2	611	58,9
80.160.12			12	5,72	1,77	4,75	3,15	7,10	10,4	0,259	27,5	21,6	720	70,0
80.160.14			14	5,81	1,85	4,72	3,23	7,16	10,3	0,256	31,8	25,0	823	80,7
90.130.10	90	130	10	4,15	2,18	4,62	3,75	6,69	8,92	0,472	21,2	16,6	358	40,5
90.130.12			12	4,24	2,26	4,60	3,85	6,72	8,88	0,468	25,1	19,7	420	48,0
90.130.14			14	4,32	2,34	4,58	3,96	6,74	8,85	0,465	29,0	22,8	480	55,3
100.150.10	100	150	10	4,80	2,34	5,25	4,10	7,50	10,3	0,441	24,2	19,0	552	54,1
100.150.12			12	4,89	2,42	5,24	4,19	7,53	10,2	0,439	28,7	22,6	650	64,2
100.150.14			14	4,97	2,50	5,23	4,28	7,56	10,2	0,435	33,2	26,1	744	74,1
100.200.10	100	200	10	6,93	2,01	5,98	3,75	8,76	13,2	0,266	29,2	23,0	1220	93,2
100.200.12			12	7,03	2,10	5,95	3,84	8,82	13,1	0,264	34,8	27,3	1440	111
100.200.14			14	7,12	2,18	5,92	3,93	8,88	13,0	0,262	40,3	31,6	1650	128
100.200.16			16	7,20	2,26	5,88	4,02	8,93	12,9	0,259	45,7	35,9	1860	145

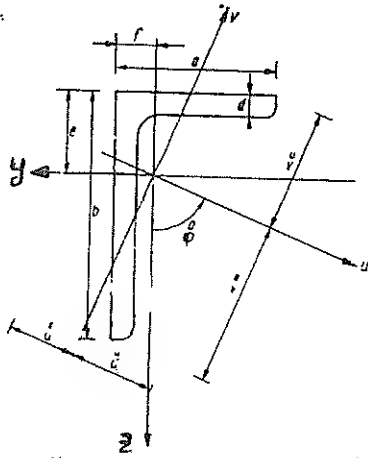
من أجل المحاور

y-y		Z-Z					" - "					v-v			
W_O	i_v	I_{ZZ}	W_U	W_O	i_z	I_{yz}	I_{uu}	W_U	W_O	i_U	I_{vo}	W_U	W_O	i_V	
cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	
63,3	4,17	68,3	11,7	41,4	2,08	79,5	303	50,4	34,7	4,37	41,3	9,69	13,8	1,61	
75,7	4,14	82,9	14,4	47,9	2,06	98,1	369	61,0	42,6	4,34	50,6	11,9	16,4	1,61	
87,2	4,12	96,5	17,0	53,3	2,04	111	432	70,0	50,2	4,31	59,0	14,2	18,7	1,60	
86,2	4,83	78,3	13,2	48,9	2,00	107	424	73,1	49,4	4,96	50,0	11,2	17,2	1,60	
101	4,80	93,0	15,9	56,4	1,93	127	578	86,8	59,4	4,85	59,8	13,5	20,1	1,59	
116	4,78	107	18,5	61,8	1,93	145	668	99,7	69,1	4,91	60,4	15,7	22,3	1,58	
59,0	3,82	80,8	13,2	43,2	2,29	79,3	261	43,6	31,7	4,10	45,8	10,9	14,0	1,72	
70,4	3,80	98,1	16,2	50,3	2,27	98,0	312	52,7	39,9	4,97	56,1	13,4	16,6	1,71	
80,8	3,77	114	19,1	56,2	2,25	111	371	61,0	48,0	4,96	63,1	15,6	19,1	1,71	
90,2	3,75	130	22,0	61,9	2,23	125	421	69,2	52,0	4,91	75,8	18,8	21,4	1,70	
109	5,14	104	16,5	61,5	2,12	142	648	91,8	61,7	5,29	67,0	14,1	21,6	1,70	
126	5,11	122	19,6	68,9	2,10	166	763	107	73,4	5,23	78,9	16,6	25,0	1,69	
142	5,09	139	22,5	75,1	2,09	183	871	122	84,6	5,23	90,5	18,8	28,0	1,69	
88,3	4,11	141	20,6	64,7	2,53	132	420	62,6	47,1	4,46	72,5	17,0	20,6	1,93	
99,1	4,09	165	24,4	73,0	2,56	154	482	73,2	55,4	4,43	92,6	20,1	24,1	1,92	
111	4,07	187	28,1	79,9	2,54	174	550	83,1	63,3	4,40	106	23,1	26,8	1,82	
115	4,78	198	25,8	84,6	2,86	194	637	84,9	61,8	5,19	112	21,3	27,3	2,15	
133	4,76	232	30,6	95,9	2,84	227	749	99,5	73,4	5,10	132	25,2	31,5	2,15	
150	4,73	264	35,2	106	2,82	258	856	113	82,9	5,07	152	29,1	35,5	2,14	
176	6,46	210	28,3	104	2,66	289	1300	148	98,5	6,66	133	22,2	35,5	2,14	
205	6,43	247	31,3	118	2,67	339	1520	173	117	6,62	158	26,6	41,1	2,13	
232	6,41	282	36,1	129	2,65	386	1760	198	135	6,60	181	30,6	46,1	2,12	
258	6,38	316	40,8	140	2,63	430	1970	221	152	6,57	204	34,7	50,7	2,11	

الرمز	من أجل المحور														
	y-y														
	a	b	d	e	f	u	u ₀	i	v ₀	cot φ ₀	F	q	I _{yy}	W _y	
L	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	—	cm ²	kpm ⁻¹	cm ⁴	cm ³	
50.65.5	50	65	5	1,99	1,25	2,38	2,08	3,61	4,52	0,583	5,54	4,35	23,1	5,11	
50.65.7			7	2,07	1,33	2,37	2,19	3,62	4,50	0,574	7,60	5,97	31,0	6,99	
50.65.9			9	2,15	1,41	2,36	2,28	3,63	4,48	0,567	9,58	7,52	38,2	8,77	
50.100.6	50	100	6	3,49	1,04	2,98	1,91	4,39	6,50	0,263	8,73	6,85	89,7	13,8	
50.100.8			8	3,59	1,13	2,95	2,00	4,44	6,48	0,258	11,5	8,99	116	18,0	
50.100.10			10	3,67	1,20	2,91	2,08	4,49	6,43	0,252	14,1	11,1	141	22,2	
55.75.5	55	75	5	2,31	1,33	2,71	2,27	4,00	5,19	0,530	6,30	4,95	35,8	6,84	
55.75.7			7	2,40	1,41	2,70	2,37	4,02	5,16	0,525	8,66	6,80	47,9	9,39	
55.75.9			9	2,47	1,48	2,70	2,46	4,04	5,14	0,518	10,9	8,59	59,4	11,8	
60.90.6	60	90	6	2,89	1,41	3,16	2,46	4,50	6,14	0,442	8,69	6,82	71,7	11,7	
60.90.8			8	2,97	1,49	3,15	2,56	4,54	6,11	0,437	11,4	8,96	92,5	15,4	
60.90.10			10	3,05	1,56	3,14	2,66	4,57	6,08	0,431	14,1	11,0	112	18,8	
65.75.6	65	75	6	2,19	1,70	2,75	2,68	4,60	5,28	0,740	8,11	6,37	44,0	8,30	
65.75.8			8	2,28	1,78	2,78	2,79	4,62	5,26	0,736	10,6	8,34	56,7	10,9	
65.75.10			10	2,35	1,86	2,79	2,89	4,64	5,23	0,732	13,1	10,3	68,4	13,3	
65.80.6	65	80	6	2,39	1,65	2,94	2,69	4,63	5,61	0,649	8,41	6,60	52,8	9,41	
65.80.8			8	2,47	1,73	2,94	2,79	4,65	5,59	0,645	11,0	8,66	68,1	12,3	
65.80.10			10	2,55	1,81	2,95	2,90	4,68	5,56	0,640	13,6	10,7	82,7	15,1	
65.80.12			12	2,63	1,88	2,98	3,00	4,70	5,54	0,634	16,0	12,6	97,4	17,8	
65.100.7	65	100	7	3,23	1,51	3,48	2,66	4,91	6,83	0,419	11,2	8,77	114	16,6	
65.100.9			9	3,32	1,59	3,46	2,76	4,94	6,78	0,415	14,2	11,1	141	21,0	
65.100.11			11	3,40	1,67	3,45	2,85	4,97	6,74	0,410	17,1	13,4	167	25,3	
65.115.8	65	115	8	3,94	1,46	3,73	2,61	5,30	7,63	0,324	13,8	10,9	188	24,8	
65.115.10			10	4,02	1,54	3,72	2,70	5,34	7,57	0,321	17,1	13,4	229	30,6	
65.130.8	65	130	8	4,56	1,37	3,86	2,49	5,71	8,50	0,263	15,1	11,9	269	31,1	
65.130.10			10	4,65	1,45	3,82	2,58	5,76	8,43	0,259	18,6	14,6	321	38,4	
65.130.12			12	4,74	1,53	3,80	2,66	5,81	8,37	0,255	22,1	17,3	376	45,5	
75.90.7	75	90	7	2,67	1,93	3,32	3,11	5,33	6,32	0,683	11,1	8,74	88,1	13,9	
75.90.9			9	2,76	2,01	3,34	3,22	5,35	6,30	0,679	14,1	11,1	110	17,6	
75.90.11			11	2,83	2,09	3,35	3,33	5,37	6,28	0,675	17,0	13,4	130	21,1	
75.100.7	75	100	7	3,06	1,83	3,61	3,10	5,42	6,96	0,553	11,9	9,32	118	17,0	
75.100.9			9	3,15	1,91	3,63	3,22	5,45	6,91	0,549	15,1	11,8	148	21,4	
75.100.11			11	3,23	1,99	3,65	3,32	5,49	6,87	0,545	18,2	14,3	176	25,3	

من أجل المحور

y - y		z - z					u - u					v - v			
W_0	i_v	I_{zz}	W_u	W_0	i_z	I_{zz}	I_{uu}	W_u	W_0	i_u	I_{vv}	W_v	W_0	i_v	
cm ³	cm	cm ⁴	cm ²	cm ³	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ²	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	
11.0	2.04	11.9	3.18	9.52	1.47	9.81	28.8	7.98	6.37	2.28	6.21	2.61	2.99	1.06	
15.0	2.02	15.8	4.31	11.9	1.44	13.0	38.4	10.6	8.53	2.25	8.37	3.53	3.82	1.05	
17.8	2.00	19.4	5.39	13.8	1.42	15.7	47.0	12.9	10.5	2.22	10.5	4.45	4.61	1.05	
25.7	3.20	15.3	3.86	14.7	1.32	21.0	95.2	21.7	14.6	3.30	9.78	3.28	5.12	1.06	
32.3	3.18	19.5	5.04	17.3	1.31	26.7	123	27.7	19.0	3.28	12.6	4.27	6.30	1.05	
38.4	3.16	23.4	6.17	19.5	1.29	31.0	149	33.2	23.2	3.25	15.5	5.33	7.45	1.04	
15.4	2.37	16.2	3.89	12.2	1.60	14.2	43.1	10.8	8.30	2.61	8.68	3.20	3.82	1.17	
20.0	2.35	21.8	5.32	15.5	1.59	18.9	57.9	14.4	11.2	2.59	11.8	4.37	4.98	1.17	
24.0	2.33	26.8	6.66	18.1	1.57	23.1	71.3	17.6	13.9	2.55	14.8	5.48	6.02	1.16	
24.8	2.87	25.8	5.61	18.3	1.72	25.2	82.8	18.4	13.5	3.09	14.6	4.62	5.93	1.30	
31.1	2.85	33.0	7.31	22.1	1.70	32.2	107	23.6	17.5	3.06	19.0	6.08	7.42	1.29	
36.7	2.82	39.6	8.92	25.4	1.68	38.3	129	28.2	21.2	3.02	23.1	7.36	8.68	1.28	
20.1	2.33	30.7	6.39	18.1	1.94	21.9	60.2	13.1	11.4	2.73	14.4	5.24	5.37	1.34	
24.9	2.31	39.4	8.34	22.1	1.92	27.9	77.3	16.7	14.7	2.70	18.8	6.76	6.74	1.33	
29.1	2.29	47.3	10.2	25.4	1.90	33.2	92.7	20.0	17.7	2.66	23.0	8.24	7.96	1.33	
22.1	2.51	31.2	6.44	18.9	1.93	24.2	68.5	14.8	12.2	2.85	15.6	5.31	5.80	1.36	
27.6	2.49	40.1	8.41	23.2	1.91	30.8	88.0	18.9	15.7	2.82	20.3	6.90	7.28	1.36	
32.2	2.46	48.3	10.3	26.7	1.89	36.8	106	22.6	19.1	2.79	24.8	8.41	8.55	1.35	
36.3	2.44	55.8	12.1	29.7	1.87	42.0	122	26.0	22.0	2.76	29.2	9.80	9.73	1.35	
35.0	3.17	37.6	7.54	24.9	1.84	38.1	128	26.1	18.7	3.39	21.6	6.31	8.12	1.39	
42.5	3.15	46.7	9.52	29.4	1.82	47.0	160	32.4	23.6	3.36	27.2	7.63	9.86	1.39	
49.1	3.13	55.1	11.4	33.0	1.80	55.1	190	38.2	28.2	3.34	32.6	9.45	11.4	1.38	
47.7	3.69	44.2	8.78	30.3	1.79	52.5	205	38.7	26.9	3.85	27.4	7.35	10.5	1.41	
57.0	3.66	53.5	10.8	34.7	1.77	62.9	249	46.6	32.9	3.82	33.2	8.92	12.3	1.40	
57.7	4.17	44.8	8.72	32.7	1.72	61.5	280	49.0	32.9	4.31	28.6	7.41	11.5	1.38	
69.0	4.15	54.2	10.7	37.4	1.71	74.0	340	59.0	40.3	4.27	35.0	9.16	13.6	1.37	
79.3	4.12	63.0	12.7	41.2	1.69	85.3	397	68.3	47.4	4.24	41.2	10.8	15.5	1.37	
33.0	2.81	55.5	9.98	28.8	2.23	41.6	117	22.0	18.5	3.24	27.1	8.16	8.71	1.56	
39.9	2.79	69.1	12.6	34.4	2.21	51.5	145	27.1	23.0	3.21	34.1	10.2	10.6	1.56	
45.9	2.77	81.7	15.5	39.1	2.19	60.4	171	31.8	27.2	3.17	40.9	12.2	12.3	1.56	
38.6	3.17	56.9	10.0	31.1	2.19	48.6	145	26.8	20.8	3.49	30.1	8.34	9.71	1.56	
47.0	3.13	71.0	12.7	37.2	2.17	60.3	181	33.2	26.2	3.47	37.8	10.4	11.7	1.56	
54.5	3.11	84.0	15.3	42.2	2.15	70.9	214	39.0	31.1	3.44	45.4	12.4	13.7	1.56	



q: Gewicht pro lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الرمز													من أجل المحاور	
													y-y	
	a	b	d	e	f	u _u	u _o	v _u	v _o	cot φ	F	q	I _{yy}	W _y
L	mm	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	—	cm²	kpm ⁻¹	cm⁴	cm³
20 . 30 . 3	20	30	3	0,99	0,50	1,04	0,86	1,51	2,04	0,431	1,42	1,11	1,25	0,62
20 . 30 . 4	20	30	4	1,03	0,54	1,03	0,91	1,52	2,02	0,423	1,85	1,45	1,59	0,81
20 . 40 . 3	20	40	3	1,43	0,44	1,19	0,79	1,77	2,61	0,259	1,72	1,35	2,79	1,08
20 . 40 . 4	20	40	4	1,47	0,48	1,18	0,83	1,80	2,57	0,252	2,25	1,77	3,59	1,42
30 . 45 . 4	30	45	4	1,48	0,74	1,58	1,27	2,26	3,07	0,436	2,87	2,25	5,78	1,91
30 . 45 . 5	30	45	5	1,52	0,78	1,58	1,32	2,27	3,05	0,430	3,53	2,77	6,99	2,36
30 . 60 . 5	30	60	5	2,15	0,68	1,77	1,20	2,67	3,90	0,256	4,29	3,37	15,6	4,04
30 . 60 . 7	30	60	7	2,24	0,76	1,73	1,28	2,72	3,83	0,248	5,85	4,59	20,7	5,60
40 . 50 . 3	40	50	3	1,48	0,99	1,87	1,02	2,85	3,50	0,632	2,63	2,06	6,58	1,87
40 . 50 . 4	40	50	4	1,52	1,03	1,84	1,07	2,85	3,50	0,629	3,46	2,71	8,54	2,47
40 . 50 . 5	40	50	5	1,56	1,07	1,84	1,73	2,88	3,49	0,625	4,27	3,35	10,4	3,02
40 . 60 . 5	40	60	5	1,96	0,97	2,09	1,68	3,01	4,08	0,437	4,79	3,76	17,2	4,25
40 . 60 . 6	40	60	6	2,00	1,01	2,08	1,72	3,02	4,06	0,433	5,68	4,46	20,1	5,03
40 . 60 . 7	40	60	7	2,04	1,05	2,07	1,77	3,03	4,04	0,429	6,55	5,14	23,0	5,79
40 . 80 . 6	40	80	6	2,85	0,88	2,42	1,55	3,53	5,21	0,259	6,89	5,41	44,9	8,73
40 . 80 . 8	40	80	8	2,94	0,95	2,38	1,65	3,57	5,15	0,253	9,01	7,07	57,6	11,4

من أجل المحور

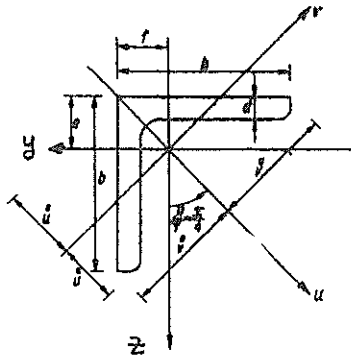
من أجل المحور															
y-y		Z-Z					- u - u				v - v				
W_O	i_v	I_{yy}	W_U	W_O	i_z	I_{zz}	I_{uu}	W_U	W_O	i_{ij}	I_{vv}	W_U	W_O	i_v	
cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	
1,26 1,54	0,94 0,93	0,44 0,55	0,29 0,38	0,88 1,02	0,56 0,55	0,43 0,53	1,43 1,81	0,95 1,19	0,70 0,90	1,00 0,99	0,25 0,33	0,24 0,32	0,29 0,36	0,42 0,42	
1,95 2,44	1,27 1,26	0,47 0,60	0,30 0,39	1,07 1,25	0,52 0,52	0,64 0,81	2,96 3,79	1,67 2,11	1,13 1,47	1,31 1,30	0,30 0,39	0,25 0,33	0,38 0,47	0,42 0,42	
3,91 4,60	1,42 1,41	2,05 2,47	0,91 1,11	2,77 3,17	0,85 0,84	2,01 2,39	6,65 8,02	2,94 3,53	2,17 2,63	1,52 1,51	1,18 1,44	0,75 0,91	0,93 1,09	0,64 0,64	
7,26 9,24	1,90 1,88	2,60 3,41	1,12 1,52	3,82 4,49	0,78 0,76	3,55 4,56	16,5 21,8	6,18 8,01	4,23 5,69	1,69 1,93	1,69 2,28	0,95 1,32	1,41 1,78	0,63 0,62	
4,45 5,62 6,67	1,58 1,57 1,56	3,76 4,86 5,89	1,25 1,64 2,01	3,80 4,72 5,50	1,20 1,19 1,18	2,97 3,82 4,60	8,46 10,9 13,3	2,97 3,82 4,62	2,42 3,11 3,81	1,79 1,78 1,76	1,89 2,46 3,02	1,01 1,34 1,64	1,17 1,47 1,75	0,85 0,84 0,84	
8,78 10,1 11,3	1,89 1,88 1,87	6,11 7,12 8,07	2,02 2,38 2,74	6,30 7,05 7,69	1,13 1,12 1,11	5,98 6,94 7,81	19,8 23,1 26,3	6,58 7,65 8,68	4,85 5,69 6,51	2,03 2,02 2,00	3,50 4,12 4,73	1,67 1,98 2,29	2,08 2,40 2,67	0,86 0,85 0,85	
15,8 19,6	2,55 2,53	7,59 9,68	2,44 3,18	8,63 10,2	1,05 1,04	10,4 13,0	47,6 60,9	13,5 17,1	9,14 11,8	2,63 2,60	4,90 6,41	2,02 2,69	3,16 3,88	0,84 0,84	

الرمز	من أجل المحاور										
	$x - x, y - y$										
	b	d	$e = f$	u_U	u_O	$v_U = v_O$	F	q	$I_{xx} = I_{yy}$	W_U	W_O
L	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm ²	kpm ⁻¹	cm ⁴	cm ³	cm ³
100 . 100 . 10	100	10	2,82	3,54	3,99	7,07	19,2	15,1	177	24,7	62,8
100 . 100 . 12		12	2,90	3,57	4,10		22,7	17,8	207	29,2	71,4
100 . 100 . 14		14	2,98	3,60	4,21		26,2	20,6	235	33,5	78,9
100 . 100 . 16		16	3,06	3,63	4,32		29,6	23,2	262	37,7	85,6
110 . 110 . 10	110	10	3,07	3,89	4,34	7,78	21,2	16,6	239	30,1	77,9
110 . 110 . 12		12	3,15	3,93	4,45		25,1	19,7	280	35,7	88,9
110 . 110 . 14		14	3,21	3,98	4,54		29,0	22,8	319	41,0	99,4
120 . 120 . 11	120	11	3,36	4,24	4,75	8,49	25,4	19,9	341	39,5	101
120 . 120 . 13		13	3,44	4,27	4,86		29,7	23,3	394	46,0	115
120 . 120 . 15		15	3,51	4,31	4,96		33,9	26,6	446	52,5	127
120 . 120 . 17		17	3,59	4,34	5,08		38,1	29,9	493	58,7	137
130 . 130 . 12	130	12	3,64	4,60	5,15	9,10	30,0	23,6	472	50,4	130
130 . 130 . 14		14	3,72	4,63	5,26		34,7	27,2	540	58,2	145
130 . 130 . 16		16	3,80	4,66	5,37		39,3	30,9	605	65,8	159
140 . 140 . 13	140	13	3,92	4,96	5,54	9,90	35,0	27,5	638	63,3	163
140 . 140 . 15		15	4,00	4,99	5,66		40,0	31,4	723	72,3	181
140 . 140 . 17		17	4,08	5,02	5,77		45,0	35,3	805	81,2	197
150 . 150 . 14	150	14	4,21	5,31	5,95	10,6	40,3	31,6	845	78,2	201
150 . 150 . 16		16	4,29	5,34	6,07		45,7	35,9	949	88,7	221
150 . 150 . 18		18	4,36	5,38	6,17		51,0	40,1	1050	99,3	241
160 . 160 . 15	160	15	4,49	5,67	6,35	11,3	46,1	36,2	1100	95,6	245
160 . 160 . 17		17	4,57	5,70	6,46		51,8	40,7	1230	108	269
160 . 160 . 19		19	4,65	5,73	6,58		57,5	45,1	1350	118	290
180 . 180 . 16	180	16	5,02	6,39	7,11	12,7	55,4	43,5	1680	130	335
180 . 180 . 18		18	5,10	6,41	7,22		61,9	48,6	1870	145	367
180 . 180 . 20		20	5,18	6,44	7,33		68,4	53,7	2040	160	394
200 . 200 . 16	200	16	5,52	7,09	7,80	14,1	61,8	49,5	2340	162	424
200 . 200 . 18		18	5,60	7,12	7,92		69,1	54,3	2600	181	464
200 . 200 . 20		20	5,68	7,15	8,04		76,4	59,9	2850	199	502

من أجل المحور									الرمز
$z - z$ $y - y$	$u - u$				$v - v$				
$i_y = i_z$	I_{yx}	I_{uz}	$W_U = W_O$	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	i_v	
cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm	L
3,04	104	280	39,6	3,82	73,3	20,7	18,4	1,95	100 . 100 . 10
3,02	121	328	46,4	3,80	86,2	24,1	21,0	1,95	100 . 100 . 12
3,00	137	372	52,6	3,77	98,3	27,3	23,4	1,94	100 . 100 . 14
2,97	151	413	58,4	3,74	111	30,6	25,6	1,93	100 . 100 . 16
3,36	140	379	48,7	4,23	98,6	25,3	22,7	2,16	110 . 110 . 10
3,34	164	444	57,1	4,21	116	29,5	26,1	2,15	110 . 110 . 12
3,32	186	505	64,9	4,18	133	33,4	29,3	2,14	110 . 110 . 14
3,66	201	541	63,7	4,62	140	33,0	29,5	2,35	120 . 120 . 11
3,64	232	625	73,6	4,59	162	37,9	33,3	2,34	120 . 120 . 13
3,63	260	705	83,0	4,56	186	43,2	37,5	2,34	120 . 120 . 15
3,60	287	778	91,6	4,51	208	47,9	41,0	2,34	120 . 120 . 17
3,97	278	750	81,6	5,00	194	42,1	37,7	2,54	130 . 130 . 12
3,94	317	857	93,3	4,97	223	48,2	42,4	2,53	130 . 130 . 14
3,92	354	959	104	4,94	251	53,9	46,7	2,52	130 . 130 . 16
4,27	376	1010	102	5,38	262	52,8	47,3	2,74	140 . 140 . 13
4,25	425	1150	116	5,36	298	59,7	52,7	2,73	140 . 140 . 15
4,23	471	1280	129	5,33	334	66,5	57,9	2,72	140 . 140 . 17
4,58	498	1340	126	5,77	347	65,3	58,3	2,94	150 . 150 . 14
4,56	558	1510	142	5,74	391	73,2	64,4	2,93	150 . 150 . 16
4,54	612	1670	158	5,70	438	81,4	71,0	2,93	150 . 150 . 18
4,88	648	1750	155	6,15	453	79,9	71,3	3,14	160 . 160 . 15
4,86	722	1950	173	6,13	506	88,8	78,3	3,13	160 . 160 . 17
4,84	791	2140	189	6,10	558	97,4	84,8	3,12	160 . 160 . 19
5,51	1000	2690	212	6,96	679	106	95,5	3,50	180 . 180 . 16
5,49	1110	2970	234	6,93	757	118	105	3,49	180 . 180 . 18
5,47	1210	3260	257	6,90	830	129	113	3,49	180 . 180 . 20
6,15	1400	3740	265	7,78	943	133	121	3,91	200 . 200 . 16
6,13	1550	4150	294	7,75	1050	147	133	3,90	200 . 200 . 18
6,11	1690	4540	322	7,72	1160	162	144	3,89	200 . 200 . 20

الرمز	من أجل المحاور										
	$z - z, y - y$										
	b	d	$e = f$	u_U	u_O	$v = v_O$	F	q	$I_{zz} = I_{yy}$	W_U	W_O
L	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm ²	kpm ⁻¹	cm ⁴	cm ³	cm ³
50 . 50 . 5	50	5	1,40	1,76	1,98	3,54	4,80	3,77	11,0	3,05	7,86
50 . 50 . 6		6	1,45	1,77	2,04		5,69	4,47	12,8	3,61	8,83
50 . 50 . 7		7	1,49	1,78	2,11		6,56	5,15	14,6	4,15	9,80
50 . 50 . 9		9	1,56	1,82	2,21		8,24	6,47	17,9	5,20	11,5
55 . 55 . 6	55	6	1,56	1,94	2,21	3,89	6,31	4,95	17,3	4,40	11,1
55 . 55 . 8		8	1,64	1,97	2,32		8,23	6,46	22,1	5,72	13,5
55 . 55 . 10		10	1,72	2,00	2,43		10,1	7,90	26,3	6,97	15,3
60 . 60 . 6	60	6	1,69	2,11	2,39	4,24	6,91	5,42	22,8	5,29	13,5
60 . 60 . 8		8	1,77	2,14	2,50		9,03	7,09	29,1	6,88	16,4
60 . 60 . 10		10	1,85	2,17	2,62		11,1	8,09	34,9	8,41	18,9
65 . 65 . 7	65	7	1,85	2,29	2,62	4,60	8,70	6,83	33,4	7,18	18,1
65 . 65 . 9		9	1,93	2,32	2,73		11,0	8,62	41,3	9,04	21,4
65 . 65 . 11		11	2,00	2,36	2,83		13,2	10,31	48,8	10,8	24,4
70 . 70 . 7	70	7	1,97	2,47	2,79	4,95	9,40	7,38	42,4	8,43	21,5
70 . 70 . 9		9	2,05	2,50	2,90		11,9	9,34	52,6	10,6	25,7
70 . 70 . 11		11	2,13	2,53	3,01		14,3	11,2	61,8	12,7	29,0
75 . 75 . 7	75	7	2,09	2,63	2,95	5,30	10,1	7,94	52,4	9,67	25,1
75 . 75 . 8		8	2,13	2,65	3,01		11,5	9,03	58,9	11,0	27,7
75 . 75 . 10		10	2,21	2,68	3,12		14,1	11,1	71,4	13,5	32,3
75 . 75 . 12		12	2,29	2,71	3,24		16,7	13,11	82,4	15,8	36,0
80 . 80 . 8	80	8	2,26	2,62	3,20	5,63	12,3	9,66	72,3	12,6	32,0
80 . 80 . 10		10	2,34	2,85	3,31		15,1	11,9	87,5	15,5	37,4
80 . 80 . 12		12	2,41	2,89	3,41		17,9	14,1	102	18,2	42,3
80 . 80 . 14		14	2,48	2,93	3,51		20,0	16,1	115	20,8	46,4
90 . 90 . 9	90	9	2,54	3,18	3,59	6,36	15,5	12,2	116	18,0	45,7
90 . 90 . 11		11	2,62	3,21	3,70		18,7	14,7	138	21,6	52,7
90 . 90 . 13		13	2,70	3,24	3,81		21,8	17,1	158	25,1	58,5
90 . 90 . 16		16	2,81	3,29	3,97		26,4	20,7	186	30,1	66,2

من أجل المحور										الرمز
$x - x_0$ $y - y_0$		$u - u_0$			$v - v_0$					
$i_y = i_z$	I_{yy}	I_{uu}	$W_u = W_o$	i_u	I_{vv}	W_u	W_o	i_v		
cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm		
1,51 1,50 1,49 1,47	6,41 7,56 8,58 10,2	17,4 20,4 23,1 28,1	4,92 5,76 6,53 7,94	1,90 1,89 1,88 1,85	4,59 5,24 6,02 7,67	2,61 2,96 3,38 4,21	2,32 2,57 2,85 3,47	0,98 0,98 0,96 0,97	50 . 50 . 5 50 . 50 . 6 50 . 50 . 7 50 . 50 . 9	
1,66 1,64 1,62	10,1 12,7 15,0	27,4 34,8 41,4	7,04 8,95 10,6	2,08 2,06 2,02	7,24 9,35 11,3	3,73 4,75 5,65	3,28 4,03 4,65	1,07 1,07 1,06	55 . 55 . 6 55 . 55 . 8 55 . 55 . 10	
1,82 1,80 1,78	13,4 17,0 20,3	36,1 46,1 55,1	8,51 10,9 13,0	2,29 2,28 2,23	9,43 12,1 14,6	4,47 5,65 6,73	3,95 4,84 5,57	1,17 1,16 1,15	60 . 60 . 6 60 . 60 . 8 60 . 60 . 10	
1,96 1,94 1,91	19,6 24,1 28,1	53,0 65,4 76,8	11,5 14,2 16,7	2,47 2,44 2,42	13,8 17,2 20,7	6,03 7,41 8,77	5,27 6,30 7,31	1,26 1,26 1,25	65 . 65 . 7 65 . 65 . 9 65 . 65 . 11	
2,12 2,10 2,08	24,8 30,6 35,8	67,1 83,1 97,6	13,6 16,8 19,7	2,67 2,64 2,61	17,6 22,0 26,0	7,13 8,80 10,3	6,31 7,59 8,64	1,37 1,36 1,35	70 . 70 . 7 70 . 70 . 9 70 . 70 . 11	
2,28 2,26 2,25 2,22	31,3 34,5 41,6 47,7	83,9 93,3 113 130	15,8 17,6 21,3 24,5	2,83 2,85 2,83 2,79	21,1 24,4 29,8 34,7	8,02 9,21 11,1 12,8	7,15 8,11 9,55 10,7	1,45 1,46 1,45 1,44	75 . 75 . 7 75 . 75 . 8 75 . 75 . 10 75 . 75 . 12	
2,42 2,41 2,39 2,36	42,7 51,6 59,0 66,4	115 139 161 181	20,3 24,6 28,4 32,0	3,06 3,03 3,00 2,96	29,6 35,9 43,0 48,0	10,5 12,6 14,9 16,6	9,25 10,9 12,6 13,9	1,55 1,54 1,53 1,54	80 . 80 . 8 80 . 80 . 10 80 . 80 . 12 80 . 80 . 14	
2,74 2,72 2,69 2,66	68,2 80,9 92,1 107	184 219 250 294	28,9 34,3 39,3 46,2	3,45 3,41 3,30 3,34	47,8 57,1 65,0 79,1	15,0 17,8 20,3 24,0	13,3 15,4 17,3 19,9	1,76 1,75 1,74 1,73	90 . 90 . 9 90 . 90 . 11 90 . 90 . 13 90 . 90 . 16	

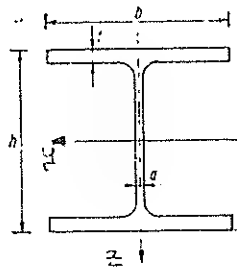


q: Gewicht pro Lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الرمز L	b	d	s=f	u	u ₀	u ₁	v	v ₀	v ₁	F	q	من أجل المحاور			
												x-x, y-y			
												$I_{xx} = I_{yy}$	W_u	W_o	
	mm	mm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	kpm ⁻¹	cm ⁴	cm ³	cm ³	
20.20.3 20.20.4	20	3 4	0,60 0,64	0,70 0,71	0,85 0,90	1,41	1,12 1,45	0,88 1,14				0,39 0,48	0,28 0,35	0,65 0,75	
25.25.3 25.25.4 25.25.5	25	3 4 5	0,73 0,76 0,80	0,87 0,89 0,91	1,03 1,08 1,13	1,77	1,42 1,85 2,28	1,12 1,45 1,77				0,79 1,01 1,18	0,45 0,58 0,69	1,08 1,33 1,48	
30.30.3 30.30.4 30.30.5	30	3 4 5	0,84 0,89 0,92	1,04 1,05 1,07	1,18 1,24 1,30	2,12	1,74 2,27 2,78	1,36 1,78 2,18				1,41 1,61 2,16	0,65 0,86 1,04	1,66 2,03 2,35	
35.35.4 35.35.5 35.35.6	35	4 5 6	1,00 1,04 1,08	1,24 1,25 1,27	1,41 1,47 1,53	2,47	2,67 3,28 3,87	2,10 2,57 3,04				2,96 3,56 4,14	1,18 1,45 1,71	2,96 3,42 3,83	
40.40.4 40.40.5 40.40.6	40	4 5 6	1,12 1,16 1,20	1,40 1,42 1,43	1,58 1,64 1,70	2,83	3,08 3,79 4,48	2,42 2,97 3,52				4,48 5,43 6,33	1,56 1,91 2,26	4,00 4,88 5,28	
45.45.5 45.45.7	45	5 7	1,23 1,36	1,58 1,61	1,81 1,92	3,18	4,30 5,86	3,38 4,60				7,83 10,4	2,43 3,31	6,12 7,65	

من أجل المحاور										الرمز L
$x - x_c$ $y - y_c$		$u - u_c$			$v - v_c$					
$i_y = i_z$	I_{yz}	I_{ux}	$W_O = W_U$	i_U	I_{vv}	W_U	W_O	$i_{v'}$		
cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm ³	cm		
0,59 0,58	0,24 0,29	0,62 0,77	0,44 0,55	0,74 0,73	0,15 0,19	0,21 0,27	0,18 0,21	0,36 0,37	20 . 20 . 3 20 . 20 . 4	
0,75 0,74 0,72	0,48 0,61 0,69	1,27 1,61 1,87	0,72 0,91 1,06	0,95 0,93 0,91	0,31 0,40 0,50	0,36 0,45 0,55	0,30 0,37 0,44	0,47 0,47 0,47	25 . 25 . 3 25 . 25 . 4 25 . 25 . 5	
0,90 0,89 0,88	0,84 1,05 1,25	2,24 2,85 3,41	1,06 1,34 1,61	1,14 1,12 1,11	0,57 0,76 0,91	0,55 0,72 0,85	0,48 0,61 0,70	0,57 0,58 0,57	30 . 30 . 3 30 . 30 . 4 30 . 30 . 5	
1,05 1,04 1,04	1,72 2,07 2,37	4,68 5,63 6,50	1,89 2,28 2,63	1,33 1,31 1,30	1,24 1,49 1,77	1,00 1,19 1,39	0,88 1,10 1,16	0,68 0,67 0,68	35 . 35 . 4 35 . 35 . 5 35 . 35 . 6	
1,21 1,20 1,19	2,62 3,20 3,66	7,09 8,64 9,98	2,51 3,05 3,53	1,52 1,51 1,49	1,86 2,22 2,67	1,33 1,56 1,87	1,18 1,35 1,57	0,78 0,77 0,77	40 . 40 . 4 40 . 40 . 5 40 . 40 . 6	
1,35 1,33	4,58 6,01	12,4 16,4	3,90 5,16	1,70 1,67	3,25 4,39	2,06 2,73	1,80 2,29	0,87 0,87	45 . 45 . 5 45 . 45 . 7	

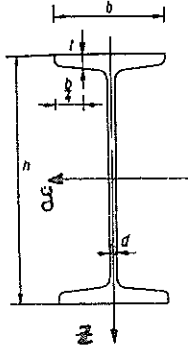


q. Gewicht pro lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الرمز IP	h mm	b mm	d mm	t mm	F cm ²	q kpm ⁻¹	من أجل المحاور					
							y-y			z-z		
							I_{yy}	$W_o = W_u$	i_y	I_{zz}	$W_o = W_u$	i_z
							cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
18	180	180	9	14	65,8	51,6	3 830	426	7,63	1 360	151	4,55
20	200	200	10	16	82,7	64,9	5 950	595	8,48	2 140	214	5,08
22	220	220	10	16	91,1	71,5	8 050	732	9,37	2 840	258	5,59
24	240	240	11	18	111	87,4	11 680	974	10,3	4 150	346	6,11
26	260	260	11	18	121	94,8	15 050	1 160	11,2	5 280	406	6,61
28	280	280	12	20	144	113	20 720	1 480	12,0	7 320	523	7,14
30	300	300	12	20	164	121	25 760	1 720	12,9	9 610	600	7,65
32	320	300	13	22	171	135	32 250	2 020	13,7	9 910	661	7,60
34	340	300	13	22	174	137	36 940	2 170	14,5	9 910	661	7,55
36	360	300	14	24	192	150	45 120	2 510	15,3	10 810	721	7,51
38	380	300	14	24	194	153	50 950	2 680	16,2	10 810	721	7,46
40	400	300	14	26	209	164	60 640	3 030	17,0	11 710	781	7,49
42 1/2	425	300	14	26	212	166	69 480	3 270	18,1	11 710	781	7,43
45	450	300	15	28	232	182	84 220	3 740	19,0	12 620	841	7,38
47 1/2	475	300	15	28	235	185	95 120	4 010	20,1	12 620	841	7,32
50	500	300	16	30	255	200	113 200	4 530	21,0	13 530	902	7,28
55	550	300	16	30	263	207	140 300	5 100	23,1	13 530	902	7,17
60	600	300	17	32	289	227	180 800	6 030	25,0	14 440	962	7,07
65	650	300	17	32	297	234	216 800	6 670	27,0	14 440	962	6,97
70	700	300	18	34	324	254	270 300	7 720	28,9	15 350	1020	6,88
75	750	300	18	34	333	261	316 300	8 430	30,8	15 350	1020	6,79
80	800	300	18	34	342	268	366 400	9 160	32,7	15 350	1020	6,70
90	900	300	19	36	381	299	506 000	11 250	36,4	16 270	1080	6,53
100	1000	300	19	36	400	314	644 700	12 900	40,1	16 280	1080	6,37

جدول 5 : بعض البروفيلات الفولاذية الهامة



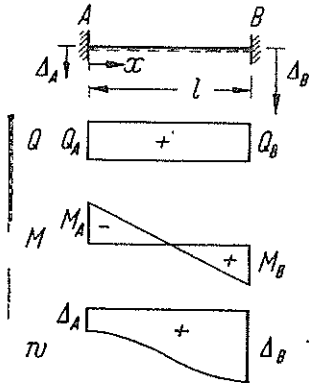
q: Gewicht pro lfd. Meter

الوزن لكل متر طول

الرمز							من أجل المحاور					
							y - y			z - z		
	h	b	d	t	F	q	I_{yy}	$W_o = W_y$	i_y	I_{zz}	$W_o = W_z$	i_z
I	mm	mm	mm	mm	cm ²	kpm ⁻¹	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,4	573	81,9	5,01	35,2	10,7	1,40
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,9	1 450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
20	200	90	7,5	11,3	33,5	26,3	2 140	214	8,00	117	26,0	1,87
22	220	98	8,1	12,2	39,6	31,1	3 060	278	8,80	162	33,1	2,02
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,2	4 250	354	9,59	221	41,7	2,20
26	260	113	9,4	14,1	53,4	41,9	5 740	442	10,4	288	51,0	2,32
28	280	119	10,1	15,2	61,1	48,0	7 590	542	11,1	384	61,2	2,45
30	300	125	10,8	16,2	69,1	54,2	9 800	653	11,9	451	72,2	2,56
32	320	131	11,5	17,3	77,8	61,1	12 510	782	12,7	555	84,7	2,67
34	340	137	12,2	18,3	86,8	68,1	15 700	923	13,5	674	98,4	2,80
36	360	143	13,0	19,5	97,1	76,2	19 610	1090	14,2	818	114	2,90
40	400	155	14,4	21,3	115	92,6	29 210	1460	15,7	1160	149	3,13
42 $\frac{1}{2}$	425	163	15,3	23,0	132	104	36 970	1740	16,7	1440	176	3,30
45	450	170	16,2	24,3	147	115	45 850	2040	17,7	1730	203	3,43
47 $\frac{1}{2}$	475	178	17,1	25,6	163	128	56 480	2380	18,6	2090	235	3,60
50	500	185	18,0	27,0	180	141	68 740	2750	19,6	2480	268	3,72
55	550	200	19,0	30,0	213	167	99 180	3610	21,6	3490	349	4,02
60	600	215	21,6	32,4	254	199	139 000	4630	23,4	4670	434	4,30

56. Stützensenkung Δ

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$



$$A = -B = \frac{12 EJ}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) = Q_A = Q_B$$

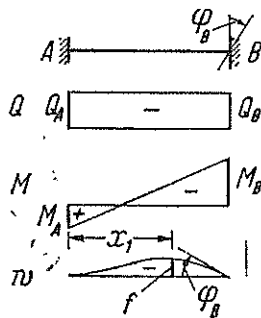
$$Q(x) = \frac{12 EJ}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A)$$

$$M_A = -M_B = -\frac{6 EJ}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A)$$

$$M(x) = -\frac{6 EJ}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A) (1 - 2\xi)$$

$$w(x) = \Delta_A + (\Delta_B - \Delta_A) (3\xi^2 - 2\xi^3)$$

57. Stützenverdrehung



$$A = -B = \frac{6 EJ}{l^2} \varphi_B = Q_A = Q_B$$

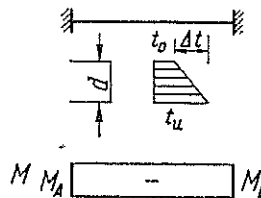
$$M_A = 2 \frac{EJ}{l} \varphi_B; \quad M_B = -4 \frac{EJ}{l} \varphi_B$$

$$M(x) = 2 \frac{EJ}{l} \varphi_B (1 - 3\xi)$$

$$f = -\frac{4}{27} l \varphi_B \text{ bei } x_1 = \frac{2}{3} l$$

$$w(x) = -l \varphi_B (\xi^2 - \xi^3) = -l \varphi_B \omega_{T1}$$

58. ungleichmäßige Temperatur Δt



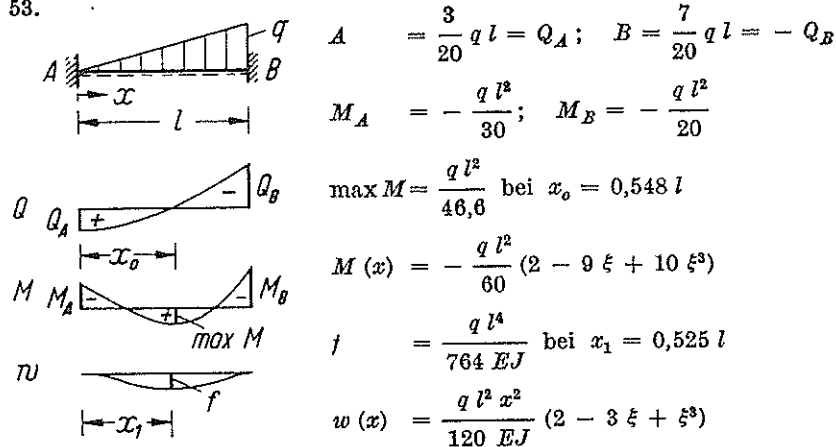
$$A = B = 0$$

$$M_A = M_B = -EJ \alpha_T \frac{\Delta t}{d}$$

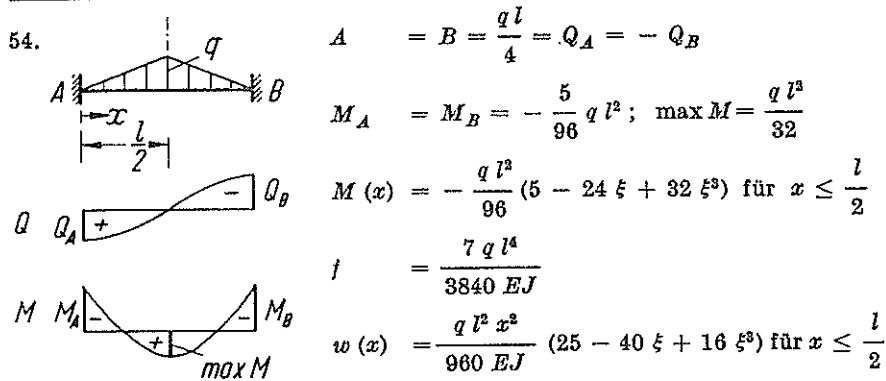
$$w(x) = 0$$

Fortsetzung Tafel 2.3

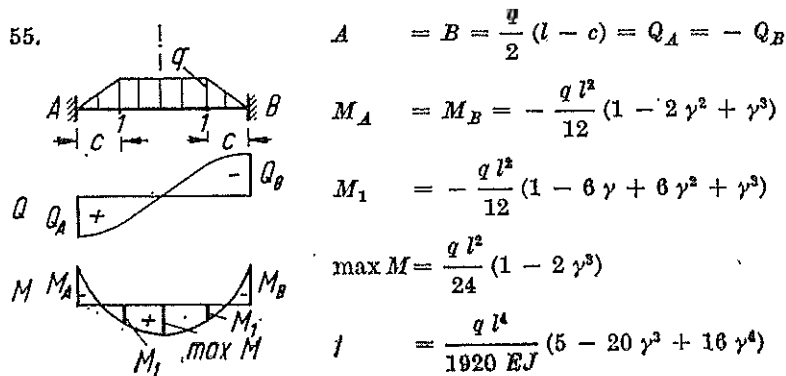
53.



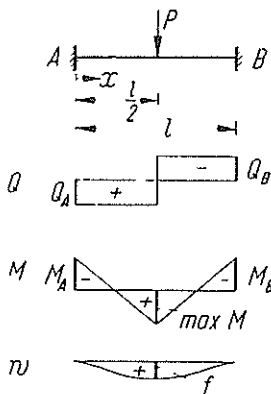
54.



55.



50.



$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

$$A = B = \frac{P}{2} = Q_A = -Q_B$$

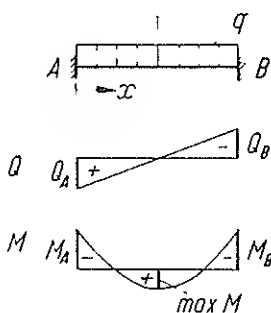
$$M_A = M_B = -\frac{Pl}{8}; \quad \max M = \frac{Pl}{8}$$

$$M(x) = -\frac{Pl}{8}(1 - 4\xi) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$f = \frac{Pl^3}{192 EJ} - \frac{\max M l^2}{24 EJ}$$

$$w(x) = \frac{Plx^2}{48 EJ}(3 - 4\xi) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

51.



$$A = B = \frac{ql}{2} = Q_A = -Q_B$$

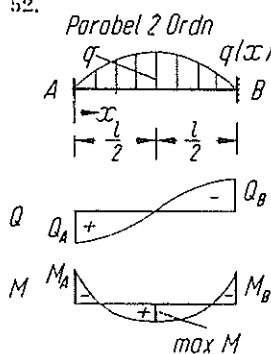
$$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}; \quad \max M = \frac{ql^2}{24}$$

$$M(x) = -\frac{ql^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi + \xi^2\right)$$

$$f = \frac{ql^4}{384 EJ}$$

$$w(x) = \frac{ql^4}{24}(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)$$

52.



$$A = B = \frac{1}{3}ql = Q_A = -Q_B$$

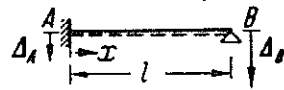
$$M_A = M_B = -\frac{1}{15}ql^2; \quad \max M = \frac{3}{80}ql^2$$

$$M(x) = -\frac{ql^2}{15}(1 - 5\xi + 10\xi^3 - 5\xi^4)$$

$$f = \frac{13}{5760} \frac{ql^4}{EJ}$$

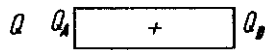
$$w(x) = \frac{ql^2x^2}{90 EJ}(3 - 5\xi + 3\xi^3 - \xi^4)$$

47. Stützensenkung Δ

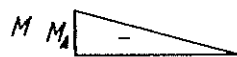


$$A = -B = \frac{3 EJ}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) = Q_A = Q_B$$

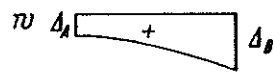
$$M_A = -\frac{3 EJ}{l^2} (\Delta_B - \Delta_A)$$



$$M(x) = M_A (1 - \xi)$$

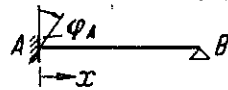


$$w(x) = \Delta_A \cdot \xi' + \Delta_B \cdot \xi - \frac{1}{2} (\Delta_B - \Delta_A) (\xi' - \xi'^3)$$



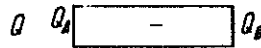
$$= \Delta_A \cdot \xi' + \Delta_B \cdot \xi - \frac{1}{2} (\Delta_B - \Delta_A) \omega_D'$$

48. Stützenverdrehung φ

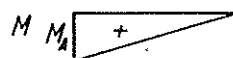


$$A = -B = -\frac{3 EJ}{l^2} \varphi_A = Q_A = Q_B$$

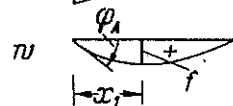
$$M_A = \frac{3 EJ}{l} \varphi_A$$



$$M(x) = M_A (1 - \xi)$$

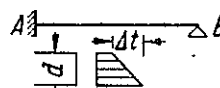


$$l = \frac{\varphi_A l}{3 \sqrt{3}} \text{ bei } x_1 = 0,423 l$$



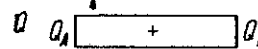
$$w(x) = \varphi_A \frac{l}{2} (\xi' - \xi'^3) = \varphi_A \frac{l}{2} \omega_D'$$

49.

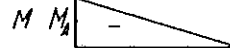


$$A = -B = \frac{3 EJ}{2 l} \alpha_T \frac{\Delta t}{d} = Q_A = Q_B$$

$$M_A = -\frac{3 EJ}{2} \alpha_T \frac{\Delta t}{d}$$



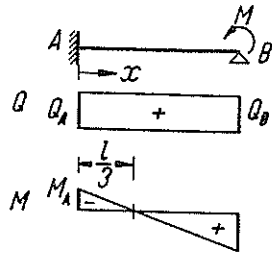
$$M(x) = M_A (1 - \xi)$$



$$w(x) = \frac{l^2}{4} \alpha_T \frac{\Delta t}{d} (\xi^2 - \xi^3) = \frac{l^2}{4} \alpha_T \frac{\Delta t}{d} \omega_{T1}$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

45.



$$A = -B = \frac{3}{2} \frac{M}{l} = Q_A = Q_B$$

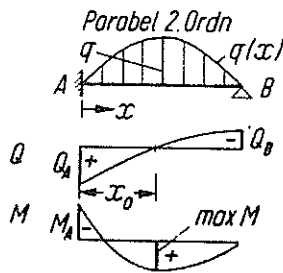
$$M_A = -\frac{M}{2}$$

$$M(x) = \frac{M}{2} (3\xi - 1)$$

$$I = \frac{M l^2}{27 EJ} \text{ bei } x = \frac{2}{3} l$$

$$w(x) = \frac{M l^2}{4 EJ} (\xi^2 - \xi^3) = \frac{M l^2}{4 EJ} w_{T1}$$

46.



$$A = \frac{13}{30} q l = Q_A; \quad B = \frac{7}{30} q l = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q l}{30} (13 - 60\xi^2 + 40\xi^3)$$

$$M_A = -\frac{q l^2}{10}$$

$$\max M = \frac{q l^2}{16,89} \text{ bei } x_0 = 0,601 l$$

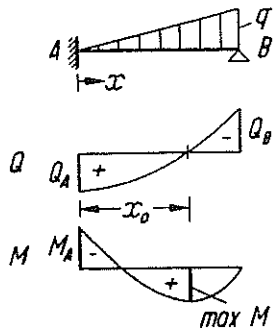
$$M(x) = \frac{q l^2}{30} (-3 + 13\xi - 20\xi^3 + 10\xi^4)$$

$$I = \frac{q l^4}{222,5 EJ} \text{ bei } x_1 = 0,573 l$$

$$w(x) = \frac{q l^2 x^2}{180 EJ} (9 - 13\xi + 6\xi^3 - 2\xi^4)$$

\\ \\ \\

43.



$$A = \frac{9}{40} q l = Q_A; \quad B = \frac{11}{40} q l = -Q_B$$

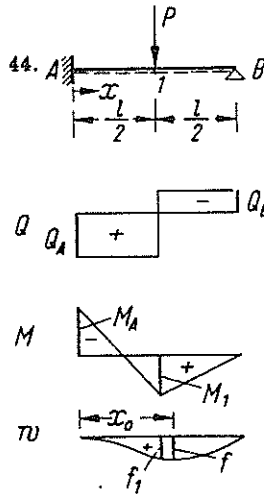
$$Q(x) = \frac{q l}{40} (9 - 20 \xi^2); \quad M_A = -\frac{7}{120} q l^2$$

$$\max M = \frac{q l^2}{23,6} \text{ bei } x_0 = 0,671 l$$

$$M(x) = -\frac{q l^2}{120} (7 - 27 \xi + 20 \xi^3)$$

$$f = \frac{q l^4}{328,1 EJ} \text{ bei } x_1 = 0,598 l$$

$$w(x) = \frac{q l^3 x^2}{240 EJ} (7 - 9 \xi + 2 \xi^3)$$



$$A = \frac{11}{16} P = Q_A; \quad B = \frac{5}{16} P = -Q_B$$

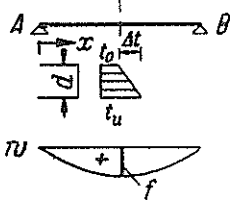
$$M_A = -\frac{3}{16} P l$$

$$M_1 = \frac{5}{32} P l$$

$$f = \frac{P l^3}{48 \sqrt{5} EJ} \text{ bei } x_0 = 0,553 l$$

$$f_1 = \frac{7 P l^3}{768 EJ}$$

40.

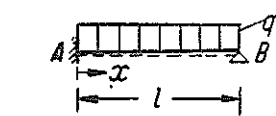
ungleichmäßige Temperatur Δt

$$A = B = Q = M \equiv 0$$

$$w(x) = \frac{l^2}{2} \alpha_T \frac{\Delta t}{d} (\xi - \xi^2) = \frac{l^2}{2} \alpha_T \frac{\Delta t}{d} w_R$$

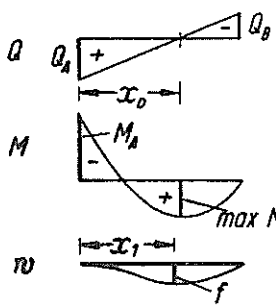
$$f = \frac{l^2}{8} \alpha_T \frac{\Delta t}{d}$$

41.



$$A = \frac{5}{8} q l = Q_A; \quad B = \frac{3}{8} q l = -Q_B$$

$$\max M = \frac{9}{128} q l^2 \text{ bei } x_0 = \frac{5}{8} l$$



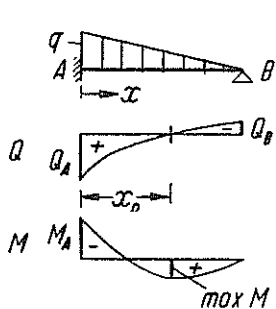
$$M_A = -\frac{q l^2}{8}$$

$$M(x) = -\frac{q l^3}{8} (1 - 5\xi + 4\xi^2)$$

$$f = \frac{q l^4}{184,6 EJ} \text{ bei } x_1 = 0,579 l$$

$$w(x) = \frac{q l^2 x^3}{48 EJ} (3 - 5\xi + 2\xi^2)$$

42.



$$A = \frac{2}{5} q l = Q_A; \quad B = \frac{q l}{10} = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{q l}{10} (4 - 10\xi + 5\xi^2); \quad M_A = -\frac{q l^2}{15}$$

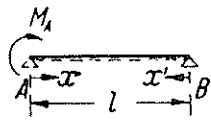
$$\max M = \frac{q l^2}{15\sqrt{5}} \text{ bei } x_0 = 0,553 l$$

$$M(x) = -\frac{q l^2}{30} (2 - 12\xi + 15\xi^2 - 5\xi^3)$$

$$f = \frac{q l^4}{419,3 EJ} \text{ bei } x_1 = 0,553 l$$

$$w(x) = \frac{q l^2 x^3}{120 EJ} (4 - 8\xi + 5\xi^2 - \xi^3)$$

37.

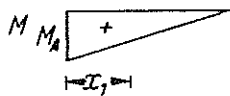


$$A = -B = -\frac{M_A}{l} = Q_A = Q_B$$

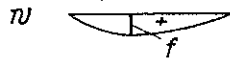
$$Q(x) = -\frac{M_A}{l}$$

$$Q \quad Q_A \quad \boxed{-} \quad Q_B$$

$$M(x) = M_A \xi'$$

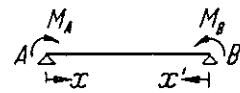


$$I = \frac{M_A l^2}{9 \sqrt{3} EJ} \quad \text{bei } x_1 = 0,423 l$$



$$w(x) = \frac{M_A l^2}{6 EJ} (\xi' - \xi'^3) = \frac{M_A l^2}{6 EJ} \omega_D'$$

38



$$A = -B = \frac{M_B - M_A}{l} = Q_A = Q_B = Q(x)$$

$$M(x) = M_A \xi' + M_B \xi$$

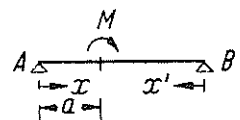
$$Q \quad Q_A \quad \boxed{-} \quad Q_B$$

$$w(x) = \frac{l^2}{6 EJ} [M_A (\xi' - \xi'^3) + M_B (\xi - \xi^3)]$$

$$M \quad M_A \quad \boxed{+} \quad M_B$$

$$w(x) = \frac{l^2}{6 EJ} (M_A \omega_D' + M_B \omega_D)$$

39.

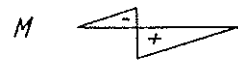


$$A = -B = -\frac{M}{l} = Q_A = Q_B = Q(x)$$

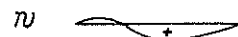
$$M(x) = -M \xi \quad \text{für } x \leq a$$

$$Q \quad Q_A \quad \boxed{-} \quad Q_B$$

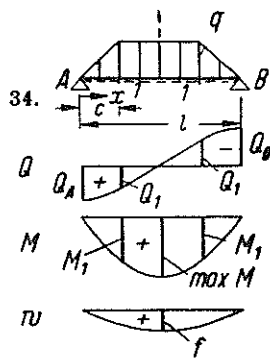
$$M(x') = M \xi' \quad \text{für } x \geq a$$



$$w(x) = \frac{M l x}{6 EJ} (\xi^2 - \alpha^2 - 2 \alpha^2 \beta + 2 \beta^3) \quad \text{für } x \leq a$$



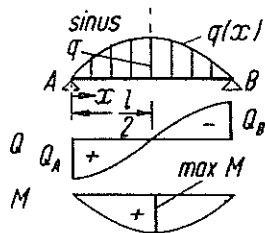
$$w(x) = -\frac{M l x'}{6 EJ} (\xi'^2 + 2 \alpha^3 - 2 \alpha \beta^2 - \beta^2) \quad \text{für } x \geq a$$



$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \alpha = \frac{a}{l}; \quad \beta = \frac{b}{l}; \quad \gamma = \frac{c}{l}$$

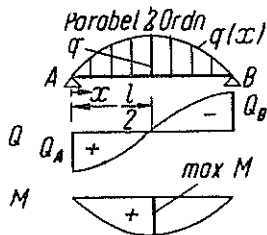
$$\begin{aligned} A &= B = \frac{q l}{2} (1 - \gamma) = Q_A = -Q_B \\ Q_1 &= \frac{q l}{2} (1 - 2\gamma); \quad M_1 = \frac{q l c}{6} (3 - 4\gamma) \\ \max M &= \frac{q l^3}{24} (3 - 4\gamma^3) \\ &= \frac{q l^4}{1920 E J} (25 - 40\gamma^3 + 16\gamma^4) \end{aligned}$$

35.

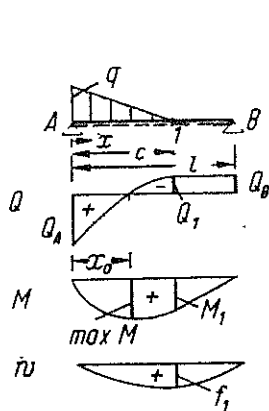


$$\begin{aligned} A &= B = \frac{q l}{\pi} = Q_A = -Q_B \\ q(x) &= q \sin(\pi \xi); \quad Q(x) = \frac{q l}{\pi} \cos(\pi \xi) \\ M(x) &= \frac{q l^2}{\pi^2} \sin(\pi \xi); \quad \max M = \frac{q l^2}{\pi^2} \\ w(x) &= \frac{q l^4}{\pi^4 E J} \sin(\pi \xi) \\ f &= \frac{q l^4}{\pi^4 E J} = \frac{\max M l^2}{\pi^2 E J} \end{aligned}$$

36.



$$\begin{aligned} q(x) &= 4q(\xi - \xi^2) \\ A &= B = \frac{q l}{3} = Q_A = -Q_B \\ Q(x) &= \frac{q l}{3} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3) \\ M(x) &= q \frac{l^2}{3} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) = q \frac{l^2}{3} \omega_P \\ \max M &= \frac{5}{48} q l^2; \quad f = \frac{61 q l^4}{5760 E J} \\ w(x) &= \frac{q l^3 x}{90 E J} (3 - 5\xi^2 + 3\xi^4 - \xi^5) \end{aligned}$$



$$A = \frac{q c}{6} (3 - \gamma) = Q_A$$

$$B = \frac{q c^3}{6 l} = -Q_B = -Q_1$$

$$\max M = \frac{q c^2}{6 l} \left(l - c + \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \right)$$

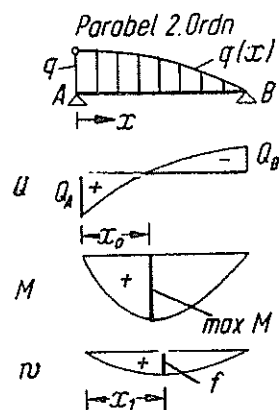
$$M_1 = \frac{q c^2}{6} (1 - \gamma); \quad x_0 = c + c \sqrt{\frac{\gamma}{3}}$$

$$x \leq c: \quad Q(x) = \frac{q l}{6 \gamma} [\gamma^2 (3 - \gamma) - 3 \xi (2 \gamma - \xi)]$$

$$M(x) = \frac{q l^2}{6} \frac{\xi}{\gamma} [\gamma^2 (3 - \gamma) - \xi (3 \gamma - \xi)]$$

$$f_1 = \frac{q c^3}{360 E J} (1 - \gamma) (20 l - 13 c)$$

33.



$$q(x) = q(1 - \xi^2)$$

$$A = \frac{5}{12} q l = Q_A; \quad B = \frac{q l}{4} = -Q_B$$

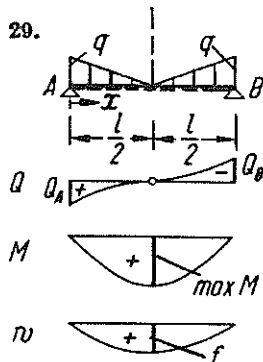
$$Q(x) = \frac{q l}{12} (5 - 12 \xi + 4 \xi^3)$$

$$\max M = \frac{q l^2}{8,97} \quad \text{bei } x_0 = 0,446 l$$

$$M(x) = \frac{q l^2}{12} (5 \xi - 6 \xi^2 + \xi^4)$$

$$f = \frac{11 q l^4}{120 E J} \quad \text{bei } x_1 = 0,486 l$$

$$w(x) = \frac{q l^3 x}{360 E J} (11 - 25 \xi^2 + 15 \xi^3 - \xi^5)$$



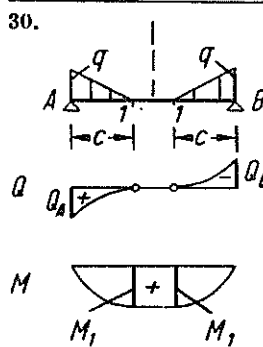
$$A = B = \frac{ql}{4} = Q_A = -Q_B$$

$$Q(x) = \frac{ql}{4} (1 - 4\xi + 4\xi^2) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$M(x) = \frac{qlx}{12} (3 - 6\xi + 4\xi^2) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

$$\max M = \frac{ql^3}{24} ; \quad f = \frac{3ql^4}{640 EJ}$$

$$w(x) = \frac{ql^3x}{120 EJ} \left(\frac{15}{8} - 5\xi^2 + 5\xi^3 - 2\xi^4 \right) \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$



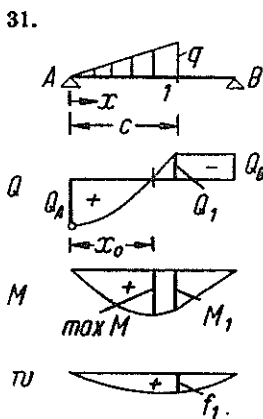
$$A = B = \frac{qc}{2} = Q_A = -Q_B$$

$$\max M = M_1 = \frac{qc^3}{6}$$

$$x \leq c : Q(x) = \frac{q}{2} \left(c - 2x + \frac{x^2}{c} \right)$$

$$M(x) = \frac{q}{6} x \left(3c - 3x + \frac{x^2}{c} \right)$$

$$f = \frac{qc^3}{240} (5l^2 - 2c^2)$$



$$A = \frac{qc}{6} (3 - 2\gamma) = Q_A ; \quad B = \frac{qc^2}{3l} = -Q_B$$

$$\max M = \frac{qc^2}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)^3} \text{ bei } x_0 = c \sqrt{1 - \frac{2}{3}\gamma}$$

$$M_1 = \frac{qc^2}{3} (1 - \gamma)$$

$$x \leq c : Q(x) = A - \frac{qx^2}{2c}$$

$$M(x) = \frac{qc}{6} x \left(3 - 2\gamma - \frac{x^2}{c^2} \right)$$

$$f_1 = \frac{qc^3}{45 EJ} (1 - \gamma) (5l - 4c)$$

Scheibe	Disks	قرص
—, rotierende —	Rotating disks	قرص دوار
Steife Ecke	Rigid joint	عقدة صلبة
Schub modul	Shear modulus	عامل القص
Theorie erster Ordnung	First order theory	نظرية المرتبة الاولى
— zweiter Ordnung	Second order theory	نظرية المرتبة الثانية
— dritter Ordnung	Third order theory	نظرية المرتبة الثالثة
Torsion	Torsion	قتل
Traegheitsmoment	Moment of inertia	عزم العطالة
Traeger	Beam	جائر (حامل)
Verformungen	Deformations	التغيرات
Vertraeglichkeitsbedingungen	Compatibility	شروط التوافق
Verschiebungen	Displacements	إنتقالات
Werkstoff	Material	مادة التصنيع
Winkelaenderung	Angular deformation	تغير زاوي

علم ككون القوى

١٠	١ - مجموعة القوى المستوية التي تؤثر على الجسم الصلب
١٠	١ - ١ القوة
١٢	١ - ١ - ١ تصنيف القوى
١١	١ - ١ - ٢ القوة الوحيدة والجسم الصلب
١١	١ - ٢ مجموعة القوى المستوية المركزة
١٢	١ - ٢ - ١ معالجة مجموعة القوى المستوية المركزة تخطيطياً
١٥	١ - ٢ - ٢ معالجة مجموعة القوى المستوية المركزة تحليلياً
١٧	١ - ٢ - ٣ شروط التوازن
٢٢	١ - ٣ مجموعة القوى المستوية العامة
٢٢	١ - ٣ - ١ مبدأ زلق القوة على حاملها في الجسم الصلب
٢٣	١ - ٣ - ٢ معالجة مجموعة القوى المستوية العامة تخطيطياً
٣٢	١ - ٣ - ٣ إيجاد محصلة مجموعة القوى المستوية العامة تحليلياً
٣٢	١ - ٣ - ٤ العزم
٣٥	١ - ٣ - ٥ مزدوجة القوى
٣٦	١ - ٣ - ٦ إنتقال القوة بموازاة نفسها
٣٨	١ - ٣ - ٧ شروط التوازن
٥٣	٢ - مركز ثقل الاجسام المتجانسة
٥٣	٢ - ١ مفهوم مركز الثقل

٥٥	٢ - ٢	مركز ثقل الاجسام
٦٣	٣ - ٢	مركز ثقل جسم سطحي
٦٥	٢ - ٣ - ١	أمثلة
٧٠	٢ - ٣ - ٢	العزم الستاتيكي لسطوح
٧١	٢ - ٣ - ٣	تأثير حمل النسب على مركز الثقل
٧٣	٢ - ٣ - ٤	مركز ثقل سطح مركب يتألف من عدة سطوح بسيطة
٧٤	٢ - ٣ - ٥	مركز ثقل سطح يحتوي على ثقب وفجوات
٧٦	٢ - ٣ - ٦	أمثلة
٨٢	٢ - ٤	مركز ثقل جسم قضبي الشكل
٨٥	٢ - ٤ - ١	أمثلة
٨٧	٢ - ٤ - ٢	مركز ثقل خط مستوي مركب
٨٩	٣ -	مجموعة القوى الفراغية
٨٩	٣ - ١	مجموعة القوى الفراغية المركزة
٨٩	٣ - ١ - ١	مركبات القوى
٩٠	٣ - ١ - ٢	شروط التوازن
٩١	٣ - ١ - ٣	السقالة الفراغية
٩٢	٣ - ٢	مجموعة القوى الفراغية العامة
٩٣	٣ - ٢ - ١	العزم
٩٤	٣ - ٢ - ٢	تركيب مجموعة قوى عامة
٩٧	٣ - ٢ - ٣	شروط التوازن

علم سكون الاجسام الخاملة

٩٩	١ -	أفكار عامة
٩٩	١ - ١	أنواع التوازن
١٠٠	١ - ٢	أنواع المساند
١٠٥	١ - ٣	أنواع الانشاءات
١١٢	١ - ٤	أنواع المحولات
١١٢	١ - ٤ - ١	تقسيم المحولات حسب توزيعها
١١٤	١ - ٤ - ٢	تقسيم المحولات حسب طبيعة عملها

١١٤	١ - ٤ - ٣	تقسيم المحولات تبعاً لأهمية المحولة على الانشاء
١١٥	١ - ٤ - ٤	تقسيم المحولات حسب طبيعتها الحركية
١١٦	٢ -	الجيزان المقررة ستاتيكياً
١١٦	٢ - ١ -	مقدمة وتعريف
١١٨	٢ - ٢ -	ردود افعال المساند وطرائق إيجادها
١١٨	٢ - ٢ - ١	الاستناد بواسطة مسند ثابت ومسند متحرك
١٢٠	٢ - ٢ - ٢	الاستناد بواسطة ثلاثة مساند أو ثلاثة قضبان
١٢١	٢ - ٢ - ٣	الوثاقعة
١٢٢	٢ - ٢ - ٤	ردود افعال المساند في حالة المحولات الموزعة
١٢٣	٢ - ٢ - ٥	أمثلة
١٤٤	٢ - ٣ -	ردود افعال القطع « قيم القطع » في الجائز المستقيم
١٤٤	٢ - ٣ - ١	مبدأ القطع
١٤٨	٢ - ٣ - ٢	توزيع قيم القطع
	٢ - ٣ - ٣	العلاقات التفاضلية التي تربط بين المحولات الموزعة وبين قيم القطع في
١٥٧		القضيب المستقيم
١٧٠	٢ - ٤ -	الجائز البسيط
١٧٠	٢ - ٤ - ١	أمثلة على الجائز البسيط
٢٠٥	٢ - ٥ -	الجائز البارز (الظفر)
٢٠٥	٢ - ٥ - ١	أمثلة على الجائز البارز
٢١٣	٢ - ٦ -	الجائز البسيط ممتد الاطراف
٢٣٣	٢ - ٧ -	الجائز المفصلي المركب
٢٣٣	٢ - ٧ - ١	مفاصل الوصل تقع على مستقيم واحد (جائز جرير)
٢٣٦	α -	عدد المفاصل الداخلية ومواضعها
٢٣٧	β -	الحركة الاقمية وانواع المساند المفصلية
٢٣٩	γ -	طرائق حل الجيزان المفصلية المركبة تحليلياً
٢٥٩	٢ - ٧ - ٢	مفاصل الوصل لا تقع على مستقيم واحد
٢٥٩	α - -	أمثلة
٢٦٤	٢ - ٨ -	الجيزان الاطارية (الاطارات)
٢٩٢	٢ - ٩ -	الجيزان المختلطة (جيزان قضيبية ذات اشكال شبكية)

٢٩٨	الجيزان المنحنية	١٠ - ٢
٣٠٣	الاقواس	١١ - ٢
٣٠٣	١ - كيفية تحمل الاقواس	١١ - ٢
٣٠٤	٢ - العلاقات التفاضلية للجيزان المنحنية	١١ - ٢
٣٤٤	٢ - أمثلة على الطريقة العكسية	١٢ - ٢
٣٥٤	٢ - قانون التمنضد (نانون جمع الآثار)	١٣ - ٢
٣٥٧	٢ - الجيزان الشبكية المستوية	١٤ - ٢
٣٥٧	٢ - ١٤ - ١ - عموميات وتعاريف	
٣٦٤	٢ - ١٤ - ٢ - العلاقة التي تربط بين عدد القضبان وعدد العقد	
	٢ - ١٤ - ٣ - تحديد نوعية الجيزان الشبكية من الناحية الستاتيكية باستخدام	
٣٦٨	الشرط التعدادي	
٣٧٠	٢ - ١٤ - ٤ - قواعد لتشكيل الجيزان الشبكية ، الجيزان الشبكية الاستثنائية	
٣٧٢	٢ - ١٤ - ٥ - الجمل الشبكية البسيطة المستوية	
٣٧٢	α - إيجاد قوى قضبان الجائر الشبكي	
٤١٤	٢ - ١٤ - ٦ - الجيزان الشبكية المعقدة - طريقة هنيبرغ	
٤٣٢	٢ - ١٤ - ٧ - الجيزان الشبكية المعقدة بدرجة عالية - طريقة هنيبرغ	
٤٣٨	٢ - ١٤ - ٨ - الجيزان الشبكية المعقدة - طريقة المقياس غير المحدد	
٤٣٩	٢ - ١٤ - ٩ - الجيزان الشبكية المعقدة - طريقة القطع المزدوج	
٤١٤	٢ - ١٤ - ١٠ - التكوين الحرج للجيزان الشبكية	
٤٤٣	٢ - ١٥ - الجبال والسلاسل	
	٢ - ١٥ - ١ - المحولات الشاقولية ذات الشدة الثابتة بالنسبة للمسقط الاقوي	
٤٤٣	$q_v(x) = q_0 = \text{const}$	
	٢ - ١٥ - ٢ - المحولات الشاقولية ذات الشدة الثابتة بالنسبة لطول الجبل	
٤٤٩	$q_v(s) = q = \text{const}$	
٤٥٨	٢ - ١٥ - ٣ - الجبال ذات التدلي الضئيل	
٤٦١	٢ - ١٥ - ٤ - تأثير الرياح والجليد	
٤٦٢	٢ - ١٥ - ٥ - أمثلة	
٤٦٩	٢ - ١٦ - الجيزان الفراغية	
٤٦٩	٢ - ١٦ - ١ - ردود افعال المساند في الجيزان الفراغية	
٤٧٠	٢ - ١٦ - ٢ - قيم القطع في الجيزان الفراغية	

علم مقاومة المواد

٤٦٨	مقدمة
٤٨٩	١ - عزوم الدرجة الثانية للسطوح
٤٨٩	١ - ١ تعريف عزوم الدرجة الثانية للسطوح
٤٨٩	١ - ١ - ١ عزوم العطالة المحورية
٤٩٠	١ - ١ - ٢ جداء العطالة
٤٩١	١ - ١ - ٣ عزوم العطالة القطبي
٤٩٢	١ - ١ - ٤ ملاحظات
٤٩٣	١ - ١ - ٥ أمثلة تطبيقية
٥٠١	٢ - ١ تحويل عزوم الدرجة الثانية للسطوح
٥٠١	١ - ٢ - ١ عزوم الدرجة الثانية للسطوح في حالة انسحاب مجموعة الاحداثيات
٥٠١	١ - ٢ - ٢ أ - مجموعتي المحاور الاحداثية y, x وكذلك \bar{x}, \bar{y} ليست محاور مركزية
٥٠٤	١ - ٢ - ٢ ب - مجموعة المحاور الاحداثية y, x هي مجموعة مركزية
٥٠٥	١ - ٢ - ٢ عزوم الدرجة الثانية للسطوح المركبة
٥٠٧	١ - ٢ - ٣ أمثلة
	١ - ٢ - ٤ عزوم الدرجة الثانية في حالة دوران مجموعة المحاور الاحداثية في مستوى السطح
٥٣٤	١ - ٣ محاور العطالة الاساسية (الرئيسية) وعزوم العطالة بالنسبة لها
٥٣٧	١ - ٣ الطريقة التحليلية لايجاد محاور العطالة الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية
٥٤٢	١ - ٣ - ٢ أمثلة
	١ - ٣ - ٣ الطريقة التخطيطية لتحديد محاور العطالة الرئيسية وعزوم العطالة الرئيسية
٥٤٥	المعطالة الرئيسية
٥٤٥	I - دائرة عطالة مور
٥٥٤	II - دائرة عطالة مور - لاند
٥٥٨	١ - ٣ - ٤ أمثلة
٥٥٥	١ - ٤ العزم المقاوم (عزم المقاومة)
٥٦٩	١ - ٥ نصف قطر العطالة ، قطع ناقص العطالة

٥٧٣	إيجاد عزوم الدرجة الثانية تخطيطياً	٦ - ١
٥٧٧	الاجهادات	- ٢
٥٧٧	مفهوم الاجهادات	١ - ٢
٥٨٣	حالة الاجهاد الخطية (المحورية ، وحيدة المحور)	٢ - ٢
٥٨٥	حالة الاجهاد المستوية (ثنائية المحور)	٣ - ٢
٥٨٥	تعريف حالة الاجهاد المستوية ، الاجهادات المناسبة المزدوجة	١ - ٣ - ٢
٥٩٠	الاجهادات على سطوح القطوع المائلة	٢ - ٣ - ٢
٥٩٣	الاجهادات الرئيسية والمحاور الرئيسية	٣ - ٣ - ٢
	دائرة اجهاد مور لتعيين المحاور الرئيسية والاجهادات الرئيسية	٤ - ٣ - ٢
٥٩٨	تخطيطياً	
٦٠٣	مسارات الاجهادات في حقل الاجهادات المستوية	٥ - ٣ - ٢
٦٠٥	أمثلة	٦ - ٣ - ٢
٦١٢	حالة الاجهاد الفراغية (حالة الاجهاد ثلاثية المحور)	٤ - ٢
٦١٢	تنسور الاجهاد الفراغي	١ - ٤ - ٢
٦١٨	الاجهادات الرئيسية ولا متغيرات حالة الاجهاد الفراغية	٢ - ٤ - ٢
٦٢٤	تمثيل حالة الاجهاد الفراغية بواسطة دائرة إجهاد مور	٣ - ٤ - ٢
٦٢٥	التشوهات	- ٣
٦٢٥	تشوهات القرص	١ - ٣
٦٢٦	تشوهات جسم	٢ - ٣
٦٢٨	العلاقة بين التشوهات والانتقالات	٣ - ٣
٦٣٢	التمدد (التغير النسبي) الحجمي	٤ - ٣
٥٣٣	المحاور الرئيسية والتمددات الرئيسية من اجل المستوي	٥ - ٣
٦٣٧	التشوهات بالنسبة للمحاور القطبية	٦ - ٣
٦٤٠	قانون المرونة	- ٤
٦٤٠	اختبار المواد	١ - ٤
٦٤٠	تجربة شد الفولاذ	٢ - ٤
٦٤٨	اضافات على تجربة الشد	٣ - ٤

٦٥١	أنواع الحملات	٤ - ٤
٦٥٥	مقاومة الاهتزاز	٥ - ٤
٦٥٦	قانون مرونة كوشي (او قانون هوك المعمم)	٦ - ٤
٦٦٠	قانون المرونة من أجل الاجهادات المماسية	٧ - ٤
٦٦٧	أمثلة	٨ - ٤
٦٧٦	مفهوم الاجهادات المسموحة	٩ - ٤
٦٧٩	التحميل على الشد - الضغط	- ٥
٦٧٩	الاجهادات في حالة التحميل على الشد / الضغط	١ - ٥
٦٨٤	مبدأ ده سانت فينانت	٢ - ٥
٦٨٥	أمثلة	٣ - ٥
٦٨٨	تغيرات الشكل	٤ - ٥
٦٩٧	إجهادات التماس	٥ - ٥
٦٩٩	تطبيقات	٦ - ٥
٧٠٦	حل المسائل غير المقررة ستاتيكيًا بالاستعانة بتغيرات الشكل	٧ - ٥
٧٠٦	١ - قضيب صلب متصل بثلاثة قضبان	١ - ٧ - ٥
٧٠٧	٢ - جاذب شبكي غير مقرر ستاتيكيًا	٢ - ٧ - ٥
٧١٣	الحلقات الدائرية رقيقة الجدار	٨ - ٥
٧١٨	التأثيرات الحرارية	٩ - ٥
٧٣٥	التحميل على القص	- ٦
٧٣٥	الاجهادات في حالة التحميل على القص	١ - ٦
٧٣٨	أمثلة	٢ - ٦
٧٤٢	القتل الصافي	- ٧
٧٤٢	مقدمة	١ - ٧
٧٤٢	أنواع القتل	٢ - ٧
٧٤٣	أنواع المقاطع العرضية من وجهة نظر القتل	٣ - ٧
٧٤٦	قتل القضبان الاسطوانية الدائرية	٤ - ٧
٧٥٨	قتل القضبان ذات المقطع العرضي القطع ناقصي	٥ - ٧

٧٦٣	٧ - ٦	قتل القضبان ذات المقطع العرضي الكيفي
٧٦٣	٧ - ٦ - ١	قتل سائت فينانت (سان فينان)
٧٦٥	٧ - ٦ - ٢	مطابقة الاغشية ومطابقة جريان السوائل
٧٧٠	٧ - ٧	قتل القضبان ذات المقطع العرضي مستطيل الشكل
٧٧٢	٧ - ٨	قتل القضبان رقيقة الجدران ذات المقاطع العرضية المغلقة
٧٧٨	٧ - ٩	قتل القضبان رقيقة الجدران ذات المقطع العرضي المفتوح
٧٨٦	٧ - ١٠	أمثلة
٨٠٣	٨ -	أسس (مبادئ) نظرية الانعطاف التقنية
٨٠٣	٨ - ١	مقدمة
٨٠٥	٨ - ٢	إنعطاف القضبان الموشورية
٨٠٥	٨ - ٢ - ١	توزيع الاجهادات في الانعطاف المستقيم
٨١١	٨ - ٢ - ٢	تصميم (تحديد ابعاد، مقايسة) المقاطع العرضية في حالة الانعطاف البسيط
٨١٢	٨ - ٢ - ٣	توزيع الاجهادات في الانعطاف المنحرف
٨٢٣	٨ - ٢ - ٤	انعطاف مع قوة ناظرية (الانعطاف المركب)
٨٤٢	٨ - ٢ - ٥	أمثلة
٨٦٠	٨ - ٣	الشد (او الضغط) اللامركزي
٨٦١	٨ - ٣ - ١	المحاور y و z هي محاور عطالة رئيسية
٨٦٦	٨ - ٣ - ٢	المحاور y و z ليست محاور عطالة رئيسية
٨٦٨	٨ - ٤	نواة المقطع العرضي
٨٧١	٨ - ٤ - ١	تعيين نقاط نواة المقطع العرضي
٨٧٤	٨ - ٤ - ٢	أمثلة
٨٨٥	٨ - ٥	إنعطاف القضبان المنحنية المتناظرة
٨٨٥	٨ - ٥ - ١	القضبان ذات الانحناء الطفيف
٨٨٥	٨ - ٥ - ٢	القضبان ذات الانحناء الكبير
٨٩٠	٩ -	التغير الناتج عن الانعطاف
	٩ - ١	المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية لخط انعطاف الجيزان الموشورية في
٨٩٠		حالة الانعطاف المستقيم

٨٩٥	٩ - ٢	المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة لخط انعطاف الجيزان الموسورية في حالة الانعطاف المستقيم
٨٩٨	٩ - ٣	أمثلة
٩٣٩	٩ - ٤	التأثير الحراري (الفعل الحراري)
٩٤١	٩ - ٥	أمثلة
٩٤٧	٩ - ٦	طريقة التحميل بمخططات العزوم (استخدام مطابقة مور لايجاد خط الانعطاف حساسياً)
٩٥٥	٩ - ١٠	اجراء مطابقة مور تخطيطياً
٩٧٤	٩ - ١١	طريقة الاستمرار وطريقة الماتريسات للانعطاف المستقيم في القضبان الموسورية
٩٨٤	٩ - ١٢	الجائز ذو الاستناد المرن (ذو الاضجاع المرن)
٩٨٧	٩ - ١٣	الانعطاف المنحرف للقضبان الموسورية
٩٩٠	٩ - ١٤	الانعطاف المستقيم في القضبان المنحنية
٩٩٧	٩ - ١٥	بعض المزايا الخاصة في الانعطاف
٩٩٨	٩ - ١٥ - ١	القضيب القصير - تأثير التغير القصي
١٠٠٣	٩ - ١٥ - ٢	القضيب العريض - تأثير التقلص العرضي
١٠٠٥	٩ - ١٥ - ٣	العرض المشارك في الحمل (العرض المساعد في الحمل)
١٠٠٦	٩ - ١٥ - ٤	انعطاف الانابيب المنحنية
١٠٠٧	٩ - ١٥ - ٥	المواد غير المتجانسة
١٠١٠	١٠ - ١	التحميل القصي في الانعطاف « نتيجة للاقوة العرضية »
١٠١٠	١٠ - ١	عموميات
١٠١٠	١٠ - ٢	الاجهادات المماسية في الانعطاف البسيط
١٠١٦	١٠ - ٣	أمثلة
١٠٣٢	١٠ - ٤	الاجهادات المماسية القصية في البروفيلات المفتوحة رقيقة الجدران
١٠٣٦	١٠ - ٥	الاجهادات المماسية القصية في البروفيلات المغلفة الرقيقة
١٠٣٩	١٠ - ٦	مركز القص

١٠٤٠	١٠ - ٦ - ١ البروفيلات المفتوحة (المقاطع العرضية المفتوحة)
١٠٤٢	١٠ - ٦ - ٢ البروفيلات (المقاطع العرضية) المغلقة
١٠٥٠	١٠ - ٧ حساب وسائل الاتصال
١٠٥٤	١١ - فرضيات المتانة
١٠٥٤	١١ - ١ عموميات
١٠٥٦	١١ - ٢ فرضية الاجهادات الرئيسية (فرضية الاجهادات الناعمية الاعظمية)
١٠٥٧	١١ - ٣ فرضية التمددات الرئيسية (فرضية التغيرات النسبية الرئيسية)
١٠٥٨	١١ - ٤ فرضية الاجهادات المماسية الاعظمية
١٠٦٢	١١ - ٥ فرضية العمل الاعظمي للتشوه
١٠٦٥	١١ - ٦ تطبيق الفرضيات على انواع خاصة للتحميل

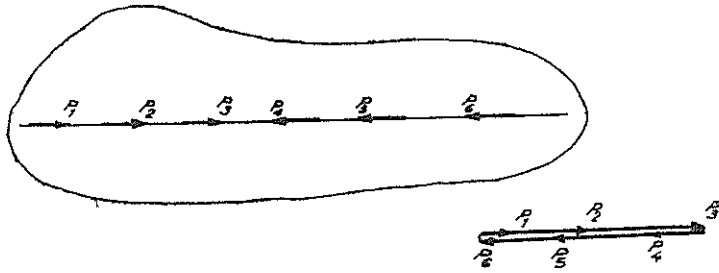
الملاحق

١٠٨٣	جدول 1 : مركز ثقل السطوح
١٠٨٨	جدول 2 : الاحرف الابعادية اليونانية
١٠٨٩	جدول 3 : عزوم الدرجة الثانية والعزم المقاوم للسطوح
	جدول 4 : عزوم الانعطاف والقوى العرضية وخط الانعطاف لقضيب
	بمجال واحد و $EI = \text{const}$
١١١٦	جدول 5 : بعض البروفيلات الفولاذية الهامة
١١٣١	المراجع العلمية
١١٣٣	معجم المصطلحات
١١٣٧	الفهرس
١١٤٨	جدول الخطأ والصواب

جدول الخطأ والصواب

هناك أخطاء مطبعية لا تخفى على القارئ من نقص في الأحرف أو في التنقيط
وسندرج فيما يلي معظمها :

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٨	الخامس عشر	الحركة الصلفية	الحركة الصافية
١٩	الشكل 18	الشكل مصور عند الزنكوغراف من الخلف	



freier Vector	freier Vector	الخامس من الأسفل	٣٥
liniefüchtige	hinienfüchtige	الرابع من الأسفل	٣٥
2, 1 h, l	شكل 2, 1 h, e	الشكل	١١٧
يجب أن يكون الشكل أفقياً		الشكل	١١٨
يجب أن يكون الشكل أفقياً		شكل 2-4	١١٩
x=const	=const.	الثالث من الأسفل	١٥٧
يجب إضافة M (x) للمعادلة		السابع من الأسفل	١٥٨
... + \frac{m_0}{2l} x^2	-- + \frac{m_0}{2} x^2	السابع من الأسفل	١٩٧
M=2	M=0	مخطط M	٢١٥
القطبين	القطبين	السابع	٢٤١ -
7,75 Mp	7,25 Mp	المخطط الثاني	٢٤١
الشكل مقلوب بزاوية 180°		شكل 2 222	٤٤٨
d\bar{x}d\bar{y}	d\bar{x}d\bar{x}	الآخر قبل الشكل	٤٩٦

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٦٩٦	الثالث	kd/cm^2	kp/cm^2
٧٠٠	الشكل الايسر		شكل 5.21
٧٠٦		٥ - ٩ حل المسائل ...	٥ - ٧ حل المسائل
٧٠٦		٥ - ٩ - ١ قضيب ..	٥ - ٧ - ١ قضيب ..
٧٠٧		٥ - ٩ - ٢ جائز ..	٥ - ٧ - ٢ جائز ..
٧٠٨			شكل 5.24
٧١٣		٥ - ٧ الحلقات . . .	٥ - ٨ الحلقات ..
٧١٤	الشكل 5.33		يدور بزاوية 90° نحو اليسار
٧١٥	الشكل 5.34		« « « « «
٧١٧	الشكل 5.36		يدور بزاوية 180° نحو اليسار
٧١٨		٥ - ٨ التأثيرات	٥ - ٩ التأثيرات ..
٨٣٥	السادس	تمثل قيماً	هي قيم
٨٥٧	الحادي عشر	وتعين ...	وتعين ..
٩٤١	الثاني	٢ - ٢ أمثلة	٩ - ٥ أمثلة
٩٥٥		٩ - ١٠ اجراء	٩ - ٧ اجراء ...
٩٦٠	المعادلة الاولى	$\frac{\max s_w}{M_w}$	$\frac{\max s_w}{m_w}$
٩٦٠	الثالث عشر	بمحولتين وحيدتين 1و	بمحولتين وحيدتين P_1
٩٨٠	الشكل 9.1		يوضع في الصفحة ٩٨١
٩٨١	الشكل 9.2		يوضع في الصفحة ٩٨٠
١٠٩٣	الرابع	$\max M$	$\max M$

